

# 连通性保持下的多机器人系统分布式群集控制

毛昱天<sup>†</sup>, 陈 杰, 方 浩, 窦丽华

(北京理工大学 自动化学院; 复杂系统智能控制与决策国家重点实验室, 北京 100081)

**摘要:** 多机器人系统群集控制中的连通性保持对于系统的稳定性和状态收敛的快速性具有重要影响. 本文在初始通信网络拓扑为强连通非平衡图条件下, 研究具有非完整约束运动学模型的多轮式移动机器人系统群集运动中的连通性保持控制问题. 首先, 构造了一类新颖的光滑有界的人工势场函数, 该类函数可以同时满足连通性保持、碰撞规避和相对距离镇定等任务需求. 进一步, 将基于势函数梯度的控制策略与一致性控制机制有机结合, 在系统中存在和不存在领航者的条件下, 分别设计出一类具有连通性保持功能的光滑有界的分布式群集控制协议, 不仅可有效避免不连续/非光滑控制器所固有的抖振现象以及执行器饱和问题, 而且实现了将传统群集控制中的连通性保持算法从个体运动模型和系统通信拓扑类型两个方面同时加以拓展. 最后, 仿真结果和实验结果验证了本文所提出的光滑有界群集控制算法的有效性.

**关键词:** 多机器人系统; 分布式控制; 群集; 连通性保持; 有向图

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Decentralized flocking of multi-robot systems with connectivity maintenance

MAO Yu-tian<sup>†</sup>, CHEN Jie, FANG Hao, DOU Li-hua

(Key Laboratory of Intelligent Control and Decision of Complex Systems; School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** Connectivity maintenance of flocking is vital for stability and fast state convergence of the entire multirobot system. To this end, the problem of flocking of multiple nonholonomic wheeled mobile robots with connectivity maintenance on directed communication graphs is investigated, provided that the initial network is strongly connected but not balanced. First, a new class of smooth and bounded artificial potential fields is developed to satisfy the requirements of connectivity maintenance, collision avoidance and distance stabilization, simultaneously. Furthermore, by combining potential-based gradient control techniques and the consensus seeking control schemes, we propose a set of smooth and bounded control protocols for leaderless flocking or flocking with local leader-follower with connectivity maintenance. Those control protocols not only avoids the chattering and saturation caused by the discontinuous/nonsmooth and unbounded flocking algorithms, but also extend the traditional connectivity-preserving flocking algorithms for both the individual motion model and the network topology types. Finally, nontrivial simulations and experiments are performed to validate the effectiveness of the proposed smooth and bounded control strategies.

**Key words:** multi-robot systems; decentralized control; flocking; connectivity maintenance; directed graphs

### 1 引言(Introduction)

网络化多智能体系统的分布式群集运动控制有着极其重要的理论研究价值和实际意义, 其近年来已得到来自各研究领域的专家和学者的广泛关注<sup>[1-4]</sup>. 众所周知, 网络连通性是绝大多数协调控制算法如队形保持与变换<sup>[5]</sup>、群体交汇与聚集<sup>[6]</sup>、协作区域探索与覆盖<sup>[7]</sup>等实现稳定和收敛的重要条件. 因此, 为了实现在整个网络范围内的信息交互与共享, 通常要求智

能体间能够形成并保持连通的多跳通信拓扑以确保系统能够高效可靠地完成既定的控制任务<sup>[8]</sup>. 然而, 一方面, 在系统动态演化过程中群体通信网络拓扑结构在本质上随时间动态切换, 如果不采取适当措施, 网络连通性可能遭到破坏; 另一方面, 智能体仅具有局部感知和通信能力, 而连通性是表征网络通信拓扑结构的全局特征参数. 这种局部与整体的矛盾使得单个智能体对网络的全局拓扑结构的连通性估计存在

收稿日期: 2014-01-17; 录用日期: 2014-06-16.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: virtual123@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金重大国际合作项目(61120106010); 国家自然科学基金面上项目资助项目(61175112); 国家杰出青年科学基金资助项目(60925011); 基金委创新研究群体资助项目(61321002); 教育部长江学者创新团队资助项目(IRT1208); 北京市优秀博士学位论文指导教师科技资助项目(20131000704).

本质局限性,从而导致网络的局部连通性与全局连通性并不等价.上述两方面给研究连通性保持下的多智能体系统分布式群集协调控制带来很大难度和挑战.

受到上述讨论的启发,群集运动中的连通性保持问题迅速成为了多智能体系统分布式协同控制领域的热点研究课题,各类具有连通性保持功能的群集控制策略也相继被提出,这些方法中既包含集中式的控制方法,也包含分布式的控制方法,其在总体上可分为3类:几何约束法、人工势场法和谱图理论法.几何约束法首先由Spanos和Murray提出,其基本思想是通过保持网络化多机器人系统的局部几何连通鲁棒性以实现网络的全局连通性保持<sup>[9]</sup>,该方法此后被Savla等推广至二阶系统<sup>[10]</sup>.人工势场法则通过吸引力和排斥力的综合叠加使得系统在收敛到期望的目标构形的同时实现网络的连通性保持.该方法的本质为通过赋予各邻接智能体间的通信连接以特定的非线性权重(张力作用),使得邻接智能体间的相对距离到达通信半径时产生无穷大的吸引力来实现连通性保持<sup>[11-17]</sup>.Zavlanos和Pappas等使用将基于市场竞争机制的拍卖算法(auction algorithm, AA)与流言传播算法(gossip algorithm, GA)有机结合,以实现连通性保持下的网络通信连接的添加与安全删除操作<sup>[18]</sup>.对于谱图理论法,相应的控制方法又可以进一步划分为两个分支.一类为通过次梯度优化和半正定规划(semi-definite programming, SDP)等集中式和分布式优化方法来实现网络的代数连通度(algebraic connectivity, AC)的最大化,进而实现网络的全局连通性保持与优化<sup>[19]</sup>.另一类为采用分布式特征值/特征向量估计方法与分布式平均值一致性估计方法相结合来使得网络的代数连通度恒为正,从而实现网络连通性保持<sup>[20-24]</sup>.

据笔者所知,一方面,上述控制方法存在的共同缺陷为控制律中所采用的人工势场函数为无界函数<sup>[12-24]</sup>,实现连通性保持的基本思想为:当初始邻接的智能体间的距离等于临界距离(通信半径)时,势函数的梯度为无穷大从而产生无穷大的吸引力使得相应的通信连接不会断裂,从而防止邻接的智能体彼此脱离各自的通信范围.其本质上是利用势函数梯度在通信半径处的无界性来保持网络连通性,然而使用有限的势场力以实现网络的连通性保持在理论上无法保证,当然也无法获得可以使得网络连通性得到保持的势场力的上界.然而,在实际应用中,由于智能体本身携带的驱动器仅具有有限执行能力,比如移动机器人或机械手的驱动电机无法产生无穷大的力矩,因而导致所得到的无界的控制输入在实际应用中具有本质局限性.

一方面,大多数连通性保持控制算法均针对一阶、二阶等理想的线性积分器模型<sup>[11-22,24-30]</sup>,其无法

充分体现实际工程群体如机器人,机械手等所具有的非线性运动学和动力学约束,因而具有较大幅度的局限性.另一方面,上述连通性保持下的群集控制算法的设计均针对无向网络<sup>[19-30]</sup>或有向平衡网络<sup>[31-32]</sup>.然而在实际应用中,由于各智能体所配备的通信和感知设备在功能和结构的异构性以及自身硬件信息传播和接收能力的互异性,系统的基础通信拓扑大多只能用有向非平衡网络来加以描述<sup>[33]</sup>,智能体间的信息交互关系不完全对等,因而使得传统的面向无向对称网络拓扑所设计的群集控制算法在信息交互发生对称性破缺的条件下无法使用.

综上所述,本文重点研究可用有向通信网络拓扑建模的多轮式移动机器人系统群集运动控制中的连通性保持问题.本文工作的主要贡献为设计出一类与轮式移动机器人系统所遵循的非完整运动学约束相适应且具有连通性保持功能的分布式群集运动控制协议.特别地,所设计的分布式控制律兼具光滑性和有界性,可以同时解决诸如连通性保持、碰撞规避和相对距离镇定等控制需求,可有效避免不连续时不变控制器所固有的抖振现象和执行器饱和问题.而且,系统的稳定性和收敛性只要求初始通信网络拓扑为更加一般的强连通非平衡图,从而使得所提出的控制算法在实际工程应用中具有更广泛的适应性.

## 2 预备知识(Preliminaries)

### 2.1 代数图论(Algebraic graph theory)

给定 $N$ 个移动智能体,每个智能体 $i$ 具有有限的通信半径 $R_i$ ,且各智能体的通信半径互不相同,即 $R_i \neq R_j, \forall i \neq j$ .系统的通信网络拓扑可以用一个有向图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 来加以建模,其中: $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为所有智能体的集合, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为所有智能体间的通信连接集合, $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为加权邻接矩阵,其用以表征邻接智能体间的信息交互关系.定义边 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 表示智能体 $i$ 能够获取智能体 $j$ 的信息,其在有向图上用由智能体 $j$ 指向智能体 $i$ 的有向箭头来加以表示,同时称智能体 $j$ 是智能体 $i$ 的邻居,但反之未必成立.令 $\mathcal{N}_i = \{j | (i, j) \in \mathcal{E}\}$ 表示智能体 $i$ 的邻居集合.进一步定义节点 $i$ 的入度和出度分别为

$$d_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^N a_{ij}, \quad d_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^N a_{ji},$$

其对应的入度和出度矩阵分别为 $\mathcal{D}^{\text{in}} = \text{diag}\{d_i^{\text{in}}\}$ ,  $\mathcal{D}^{\text{out}} = \text{diag}\{d_i^{\text{out}}\}$ .对于节点 $i$ ,若 $d_i^{\text{in}} = d_i^{\text{out}}$ ,则称节点 $i$ 是平衡的.若对于所有的节点 $i$ ,均满足 $d_i^{\text{in}} = d_i^{\text{out}}$ ,则称图 $\mathcal{G}$ 是平衡的.对于无向图,由于 $\mathcal{A}$ 是对称的,因此任何无向图都是平衡的.有向图 $\mathcal{G}$ 中的有向路径可用 $\mathcal{E}$ 中一系列的边 $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots$ 来加以表示.在有向图中,环路定义为起始点和终止点是同一节点的有向路径.如果每个节点与其他所有节点之间都存在

有向路径, 则该有向图为强连通图. 有向图 $\mathcal{G}$ 的Laplacian矩阵定义为 $\mathcal{L} = \mathcal{D}^{\text{in}} - \mathcal{A}$ , 其一般不具有对称性.

## 2.2 问题阐述(Problem formulation)

考虑由 $N$ 个轮式移动机器人所组成的多机器人系统, 其满足如下所示的非完整约束运动学方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \cos \theta_i, \\ \dot{y}_i = v_i \sin \theta_i, \\ \dot{\theta}_i = \omega_i, \\ \dot{v}_i = a_i, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $r_i = (x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2$  为机器人 $i$ 的位置矢量,  $v_i$  为机器人 $i$ 的线速度矢量,  $\theta_i \in [0, 2\pi)$  代表机器人 $i$ 的朝向角,  $a_i$  和  $\omega_i$  分别为施加在机器人 $i$ 上的线加速度和角速度控制输入向量, 令  $r = (r_1^T, r_2^T, \dots, r_N^T)^T \in \mathbb{R}^{2N}$  为多机器人系统的位置矢量,  $v = (v_1^T, v_2^T, \dots, v_N^T)^T \in \mathbb{R}^{2N}$  为多机器人系统的速度矢量,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)^T \in \mathbb{R}^N$  为多机器人系统的朝向角矢量. 定义  $r_{ij} = r_i - r_j$  为机器人 $i$ 与机器人 $j$ 之间的相对位置矢量.

进一步, 令  $\varepsilon_2 \in \bigcap_{j=1}^N (0, R_j)$  为加边迟滞常量, 则定义网络中通信连接的添加和删除规则如下:

- 1) 网络的初始连接为  $\mathcal{E}(0) = \{(i, j) \mid \|r_{ij}(0)\| < R_j - \varepsilon_0, i, j \in V\}$ , 其中  $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_2$ ;
- 2) 若  $(i, j) \notin \mathcal{E}(t^-) \wedge \|r_{ij}(t)\| < R_j - \varepsilon_2$ , 则  $(i, j) \in \mathcal{E}(t)$ ;
- 3) 若  $(i, j) \in \mathcal{E}(t^-) \wedge \|r_{ij}(t)\| \geq R_j$ , 则  $(i, j) \in \mathcal{E}(t)$ .

其中  $t^-$  表示网络在 $t$ 时刻发生切换前的瞬时时刻,  $\wedge$  表示布尔代数中的与(AND)算子. 注意到  $\varepsilon_2 > 0$  引入了加边迟滞区域, 在此区域中, 智能体间的通信连接会保持其当前的状态不变(网络中没有发生通信连接的添加和删除), 这对于整个系统的稳定性分析至关重要.

综上, 设计与边 $(i, j)$ 相对应的系统邻接矩阵 $\mathcal{A}$ 中的元素 $a_{ij}$ 如下:

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & (i, j) \in \mathcal{E}(t), \\ 0, & (i, j) \notin \mathcal{E}(t). \end{cases} \quad (2)$$

**引理 1**<sup>[34]</sup> 若 $\mathcal{G}$ 为强连通有向图, 则 $\mathcal{L}(\mathcal{G})\mathbf{1}_N = \mathbf{0}$ , 并且存在向量 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N > \mathbf{0}$ , 使得 $\mathbf{p}^T \mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{p}^T \mathbf{1}_N = 1$ .

**引理 2**<sup>[35]</sup> 若对称矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 的特征值序列满足 $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_N(A)$ ,  $\lambda_1(B) \leq \dots \leq \lambda_N(B)$ , 则有下列不等式成立:

$$\lambda_{i+j-1}(A+B) \geq \lambda_i(A) + \lambda_j(B), \quad (3)$$

其中:  $i+j \leq N+1$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ .

综上, 本文的控制目标为: 在初始通信网络拓扑为强连通非平衡图条件下, 设计一组分布式光滑有界控制协议, 从而使得具有非完整约束运动学特性的多移动机器人系统可以实现线速度和朝向角的渐近趋同, 彼此避免碰撞, 同时网络的强连通性在系统动态演化过程中始终能够得到保持.

## 3 主要结果(Main results)

### 3.1 不带有领航者的群集运动控制律设计(Controller design of flocking without a leader)

为了方便后续证明, 首先给出如下重要引理:

**引理 3** 若 $\mathcal{G}$ 为强连通有向图, 定义

$$\begin{cases} P = \text{diag}\{p_i\} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \\ Q = P\mathcal{L} + \mathcal{L}^T P, \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)^T \in \mathbb{R}^N$  为引理1中定义的对应于 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 的零特征根的正左特征向量, 则 $P > 0$ ,  $Q \geq 0$ .

**证** 易知  $\mathbf{x}^T P \mathcal{L} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N p_i x_i \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j)$ . 由于  $\mathcal{L}^T \mathbf{p} = \mathbf{0}$  意味着  $p_i \sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{j=1}^N p_j a_{ji}$ , 因此可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N p_i x_i \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j) &= \\ \sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{j=1}^N p_j a_{ji} - \sum_{i=1}^N p_i \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i x_j &= \\ \sum_{i=1}^N x_j^2 \sum_{j=1}^N p_i a_{ij} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_i a_{ij} x_i x_j &= \\ \sum_{i=1}^N p_i \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j (x_j - x_i), \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} &= 2\mathbf{x}^T P \mathcal{L} \mathbf{x} = \\ 2 \sum_{i=1}^N p_i x_i \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j) &= \\ \sum_{i=1}^N p_i x_i \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j) + \\ \sum_{i=1}^N p_i x_j \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i) &= \\ \sum_{i=1}^N p_i \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

证毕.

**引理 4** 对于有向强连通图以及如式(4)所定义的矩阵 $Q$ , 则有 $N(Q) = N(\mathcal{L}) = \text{span}\{\mathbf{1}_N\}$ , 其中 $N(\cdot)$ 表示核空间,  $\text{span}\{\cdot\}$ 表示生成空间.

**证** 首先, 由式(4)易得 $N(\mathcal{L}) \subseteq N(Q)$ . 进一步注意到有向图 $\mathcal{G}$ 为强连通图, 并且 $N(\mathcal{L}) = \text{span}\{\mathbf{1}_N\}$ ,

$\text{span}\{\mathbf{1}_N\} \subseteq N(Q)$ . 因此,  $Q\mathbf{1}_N = \mathbf{0}$ . 因此,  $Q$ 为与原系统具有相同节点的增广系统 $\bar{\mathcal{G}}$ 所对应的对称Laplacian矩阵, 且边 $(i, j)$ 的权重 $\bar{a}_{ij} = p_i a_{ij} + p_j a_{ji}$ . 显然 $\bar{\mathcal{G}}$ 为无向平衡图, 此后本文统称 $\bar{\mathcal{G}}$ 为原系统对应的有向图 $\mathcal{G}$ 的加权镜像图. 下面只需证明矩阵 $Q$ 的秩为 $\text{rank}(Q) = N - 1$ , 由于 $p_i > 0$ , 易知若 $a_{ij} > 0$ , 则 $\bar{a}_{ij} > 0$ . 图 $\mathcal{G}$ 的强连通性意味着其对应的加权镜像图 $\bar{\mathcal{G}}$ 的强连通性, 因此有 $N(Q) = \text{span}\{\mathbf{1}_N\}$ 和 $N(Q) = N(\mathcal{L})$ . 证毕.

为系统设计如下所示的分布式群集控制协议:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \langle \nabla_{\mathbf{r}_i} V_i, (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T \rangle \times \\ \quad \left\| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \right\| + \\ \quad \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \langle \nabla_{\mathbf{r}_j} V_j, (\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T \rangle \times \\ \quad \left\| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \right\| - \\ \quad k \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j), \\ \omega_i = - \langle \nabla_{\mathbf{r}_i} V_i, (-\sin \theta_i, \cos \theta_i)^T \rangle \times \\ \quad \left\| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\theta_i - \theta_j) \right\| + \\ \quad \langle \nabla_{\mathbf{r}_j} V_j, (-\sin \theta_j, \cos \theta_j)^T \rangle \times \\ \quad \left\| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\theta_i - \theta_j) \right\| \\ \quad - k \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\theta_i - \theta_j), \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $k > 0$ 为控制增益,  $\langle \cdot \rangle$ 表示向量内积.  $V_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} V_{ij}$ 为与机器人 $i$ 相关联的复合人工势场函数. 为了在有界控制输入的条件下使得整个系统能够实现期望的稳定群集运动,  $V_{ij}(\|\mathbf{r}_{ij}\|)$ 应该设计为以智能体 $i$ 和 $j$ 间相对距离 $\|\mathbf{r}_{ij}\|$ 为自变量的一个非负有界的光滑函数, 以同时解决碰撞规避、距离镇定和连通性保持问题. 因此,  $V_{ij}$ 应同时满足下述性质:

- i)  $V_{ij}(\|\mathbf{r}_{ij}\|)$ 在 $\|\mathbf{r}_{ij}\| \in (0, R_j)$ 内连续可微;
- ii)  $V_{ij}(\|\mathbf{r}_{ij}\|)$ 在 $\|\mathbf{r}_{ij}\| \in (0, d)$ 内单调递减, 并且在 $\|\mathbf{r}_{ij}\| \in (d, R_j)$ 内单调递增, 其中 $\varepsilon_1 < d < R_j - \varepsilon_2$ ;
- iii)  $V_{ij}(0) = c_1 + H_{\max}$ ,  $V_{ij}(R_j) = c_2 + H_{\max}$ ,

其中:  $c_1, c_2 \geq 0$ ,

$$H_{\max} \triangleq \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i^T(0) \mathbf{v}_i(0) + \sum_{i=1}^N \theta_i^T(0) \theta_i(0) + (N^2 - N - 1) V_{\max}, \quad (6)$$

其中:  $V_{\max} = \max_{(i,j) \in \mathcal{E}(0)} \{V_{ij}(\varepsilon_1), V_{ij}(R_j - \varepsilon_2)\}$ ,  $\varepsilon_1 = \min_{(i,j) \in \mathcal{E}(0)} \{\|\mathbf{r}_{ij}(0)\|\}$ .

性质i)可确保控制器的光滑性; 性质ii)表明 $V_{ij}$ 能够在智能体 $i$ 和 $j$ 间相对距离趋于 $R_j$ 时产生吸引力, 相对距离 $\|\mathbf{r}_{ij}\|$ 趋于0时产生排斥力. 显然,  $V_{ij}$ 可在 $\|\mathbf{r}_{ij}\| = d$ 处达到最小值; 性质iii)表明势函数 $V_{ij}$ 可在智能体 $i$ 和 $j$ 间相对距离为 $R_j$ 时产生足够大的吸引力

以保证邻接智能体间的连通性保持, 同时其又可在智能体 $i$ 和 $j$ 间相对距离为0时产生足够大的排斥力以避免彼此发生碰撞. 综上, 且受到文献[7]的启发, 设计光滑有界的群集人工势场函数如下:

$$V_{ij}(\|\mathbf{r}_{ij}\|) = \frac{(\|\mathbf{r}_{ij}\| - d)^2 (R_j - \|\mathbf{r}_{ij}\|)}{\|\mathbf{r}_{ij}\| + \frac{d^2 (R_j - \|\mathbf{r}_{ij}\|)}{c_1 + H_{\max}}} + \frac{\|\mathbf{r}_{ij}\| (\|\mathbf{r}_{ij}\| - d)^2}{(R_j - \|\mathbf{r}_{ij}\|) + \frac{\|\mathbf{r}_{ij}\| (R_j - d)^2}{c_2 + H_{\max}}}. \quad (7)$$

注意到在文献[15-18]和文献[22-24]中引入了两类特殊的在通信半径 $R$ 处取值为无穷大的人工势场函数. 由于这些势函数本质上需要执行器能够提供无穷大控制作用, 因此大大限制了其在工程实际中的应用范围. 令 $f_{\max}$ 为交互人工势场作用力最大值, 则本文有下述定理:

**定理 1** 考虑由 $N$ 个移动机器人组成的多机器人系统, 每个机器人满足非完整运动学约束(1), 为每个机器人 $i$ 设计控制律(5). 并且假定初始网络拓扑为强连通图 $\mathcal{G}(0)$ , 若控制增益满足

$$k > \frac{2f_{\max} N^2}{\lambda_2(Q(0))}, \quad (8)$$

并且初始能量有限. 则网络的强连通性在任意时刻均会得到保持, 所有机器人的线速度和朝向角最终会渐近趋同, 机器人间彼此可以实现碰撞规避, 相对距离可以得到渐近镇定.

**证** 考虑如下所示的半正定能量函数:

$$H = \boldsymbol{\theta}^T P \boldsymbol{\theta} + \mathbf{v}^T P \mathbf{v}. \quad (9)$$

假设网络 $\mathcal{G}(t)$ 在系统演化过程中发生切换的时刻为 $t_k, k = 1, 2, \dots$ , 则其在时间区间 $[t_{k-1}, t_k)$ 所对应的通信拓扑固定不变. 特别地, 若系统的能量函数初始有限, 则在时间区间 $[0, t_1)$ 上对 $H(t)$ 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{H} &= 2\boldsymbol{\theta}^T P (-k\mathcal{L}\boldsymbol{\theta} - \mathcal{L}(\nabla V)_\perp \|\mathcal{L}\boldsymbol{\theta}\|) + \\ & 2\mathbf{v}^T P (-k\mathcal{L}\mathbf{v} - \mathcal{L}(\nabla V)_\parallel \|\mathcal{L}\mathbf{v}\|) = \\ & -k\boldsymbol{\theta}^T (P\mathcal{L} + \mathcal{L}^T P) \boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\theta}^T P \mathcal{L} (\nabla V)_\perp \|\mathcal{L}\boldsymbol{\theta}\| - \\ & k\mathbf{v}^T (P\mathcal{L} + \mathcal{L}^T P) \mathbf{v} - 2\mathbf{v}^T P \mathcal{L} (\nabla V)_\parallel \|\mathcal{L}\mathbf{v}\|, \end{aligned} \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} \nabla V &= [\nabla_{\mathbf{r}_1}^T V_1, \nabla_{\mathbf{r}_2}^T V_2, \dots, \nabla_{\mathbf{r}_N}^T V_N]^T, \\ (\nabla V)_\perp &= [(\nabla_{\mathbf{r}_1} V_1)_\perp, \dots, (\nabla_{\mathbf{r}_N} V_N)_\perp]^T, \\ (\nabla V)_\parallel &= [(\nabla_{\mathbf{r}_1} V_1)_\parallel, \dots, (\nabla_{\mathbf{r}_N} V_N)_\parallel]^T, \end{aligned}$$

$(\nabla_{\mathbf{r}_i} V_i)_\parallel$ 和 $(\nabla_{\mathbf{r}_i} V_i)_\perp$ 分别为 $\nabla_{\mathbf{r}_i} V_i$ 在机器人 $i$ 本体坐标系上平行于当前线速度方向和垂直于当前线速度方向的分量.

进一步, 将线速度矢量 $\mathbf{v}$ 和朝向角矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 分别分解

为  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 \oplus \mathbf{v}^{1^\perp}$  和  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^1 \oplus \boldsymbol{\theta}^{1^\perp}$ . 其中上标  $\mathbf{1}$  和  $\mathbf{1}^\perp$  分别代表与  $\mathbf{1}_N$  相平行和垂直的方向. 进一步利用引理 3, 式(10)可变为

$$\begin{aligned} \dot{H} \leq & -k\lambda_2(Q)\|\boldsymbol{\theta}^{1^\perp}\|^2 + 2f_{\max}\|\boldsymbol{\theta}^{1^\perp}\| \|P\| \|\mathcal{L}\| \|\mathcal{L}\boldsymbol{\theta}^{1^\perp}\| - \\ & k\lambda_2(Q)\|\mathbf{v}^{1^\perp}\|^2 + 2f_{\max}\|\mathbf{v}^{1^\perp}\| \|P\| \|\mathcal{L}\| \|\mathcal{L}\mathbf{v}^{1^\perp}\| \leq \\ & - (k\lambda_2(Q) - 2f_{\max}N^2)\|\boldsymbol{\theta}^{1^\perp}\|^2 - \\ & (k\lambda_2(Q) - 2f_{\max}N^2)\|\mathbf{v}^{1^\perp}\|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

由引理 2 和式(8), 可得

$$\dot{H}(t) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (12)$$

由式(12)可知,  $H(t)$  在时间区间  $[0, t_1]$  内单调递减, 且根据势函数的定义(7), 有  $V_{ij}(R_j) \geq H_{\max} > H(0)$ ,  $\forall (i, j) \in \mathcal{E}(t)$ , 这表明对于任一机器人  $i$ , 其与所有邻居机器人的相对距离均不会达到或超过  $R_j$ , 网络中的所有初始的通信连接均能够得到保持, 因此网络只能在切换时刻  $t_1$  加入新的通信连接.  $\mathcal{G}(t)$  的强连通性在  $[0, t_1]$  内可以得到保持. 不失一般性, 假设在  $t_1$  时刻, 有  $N_1$  条通信连接被加入通信网络之中, 由于  $\mathcal{G}(t)$  强连通, 所以系统初始强连通非平衡通信网络  $\mathcal{G}(0)$  至少含有  $N + 1$  条通信连接, 从而有

$$\begin{aligned} 0 < N_1 \leq N_{\max} = N(N - 2), \\ H(t_1) < H(0) + N_{\max}V(R_{\max} - \varepsilon_2). \end{aligned}$$

将引理 2 应用于无向加权镜像图  $\bar{\mathcal{G}}$ , 有  $\lambda_2(Q(t_1)) \geq \lambda_2(Q(0))$ . 类似地, 取  $H(t)$  在  $[t_{k-1}, t_k)$ ,  $\forall k \geq 2$  内的导数可得

$$\begin{aligned} \dot{H}(t) \leq & - (k\lambda_2(Q(t_{k-1})) - 2f_{\max}N^2)\|\boldsymbol{\theta}^{1^\perp}\|^2 - \\ & (k\lambda_2(Q(t_{k-1})) - 2f_{\max}N^2)\|\mathbf{v}^{1^\perp}\|^2, \end{aligned} \quad (13)$$

从而有

$$H(t) \leq H(t_{k-1}) < H_{\max}, \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k), \quad (14)$$

其中:  $k = 2, 3, \dots$ , 由式(14)可知, 系统中已经存在的通信连接在切换时刻  $t_k$  前均能够得到保持. 由于  $\mathcal{G}(0)$  强连通, 且  $\mathcal{E}(0)$  中的通信连接均能够得到保持, 所以  $\mathcal{G}(t)$  的强连通性始终能够得到保持. 进一步假设有  $N_k$  条通信连接在  $t_k$  时加入到当前系统的通信网络拓扑之中. 显然,  $0 < N_k \leq N_{\max}$ , 有

$$H(t_k) \leq H(0) + (N_1 + N_2 + \dots + N_k) \leq H_{\max}, \quad (15)$$

由于对于  $t \geq 0$ , 在任一切换时刻至多有  $N_{\max}$  条通信连接被加入到  $\mathcal{G}(t)$  当中, 所以切换次数  $k \leq N_{\max}$  为有限值, 这意味着系统的通信拓扑最终会保持不变. 因此, 只需在时间区间  $[t_k, +\infty)$  内对系统进行稳定性分析, 注意到网络中每条通信连接的长度既不小于  $\min\{V^{-1}(H_{\max})\}$ , 也不大于  $\max\{V^{-1}(H_{\max})\}$ .

定义集合

$$\Omega = \{\bar{\mathbf{r}} \in D, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N} | H(\bar{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) \leq H_{\max}\}, \quad (16)$$

其中:

$$\begin{aligned} D = & \{\bar{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^{2N^2} | \|\mathbf{r}_{ij}\| \in [\min\{V^{-1}(H_{\max})\}, \\ & \max\{V^{-1}(H_{\max})\}\}, \forall (i, j) \in \mathcal{E}(t)\}, \\ \bar{\mathbf{r}} = & (\mathbf{r}_{11}^T, \dots, \mathbf{r}_{1N}^T, \dots, \mathbf{r}_{N1}^T, \dots, \mathbf{r}_{NN}^T)^T. \end{aligned}$$

由于  $\|\mathbf{r}_{ij}\| \leq (N - 1)R_{\max}$ ,  $\forall (i, j) \in \mathcal{E}(t)$ ,  $H(t) \leq H(0) \leq H_{\max}$ , 则有  $\|\mathbf{v}_i\| \leq \sqrt{2H_{\max}}$ ,  $|\theta_i| \leq \sqrt{2H_{\max}}$ ,  $\forall i$ , 因此  $\Omega$  为紧集. 注意到带有控制输入(5)的系统(1)至少在时间区间  $[t_k, \infty)$  内为自治系统. 由 LaSalle 不变集原理可知, 起始于集合  $\Omega$  的状态轨迹最终会渐近收敛至下述集合的最大不变子集中:

$$S = \{\bar{\mathbf{r}} \in D, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N} | \dot{H} = 0\}. \quad (17)$$

由式(15),  $\dot{H} = 0$  当且仅当  $\boldsymbol{\theta}^{1^\perp} = \mathbf{0}$  和  $\mathbf{v}^{1^\perp} = \mathbf{0}$ , 此即意味着

$$\theta_1 = \dots = \theta_N = \theta^*, \quad \mathbf{v}_1 = \dots = \mathbf{v}_N = \mathbf{v}^*. \quad (18)$$

式(18)表明所有的机器人均可实现线速度和朝向角的渐近趋同, 进而可得

$$\omega_1 = \dots = \omega_N = 0, \quad \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_N = \mathbf{0}.$$

综上所述

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & \|\mathbf{v}^*\| \cos \theta^*, \quad \dot{y}_i = \|\mathbf{v}^*\| \sin \theta^*, \quad (19) \\ \mathbf{a} = & - \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{r}_1} V_{1j} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{r}_N} V_{Nj} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \dots, \mathbf{a}_N^T)^T \in \mathbb{R}^{2N}$ . 式(20)表明多机器人系统渐近收敛至对应于各机器人的复合势场函数的局部极小值点所对应于固定几何构形. 然而, 由于除了局部极小点之外的每个平衡点均为不稳定平衡点, 因此系统几乎所有的最终位形均会最小化与每个机器人相关联的复合势函数  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} V_{ij}$ .

最后, 假设机器人  $i$  和机器人  $j$  彼此间发生碰撞, 由式(15)有  $H(t) \leq H_{\max}, \forall t \geq 0$ . 又由势函数定义式(7), 有  $\lim_{\mathbf{r}_{ij} \rightarrow 0} V_{ij}(0) \geq H_{\max}$ , 此与式(15)产生矛盾, 所以系统中所有机器人均不会彼此发生碰撞. 证毕.

### 3.2 带有领航者的群集运动控制律设计(Controlller design of flocking with a leader)

本小节研究带有一个领航者的多移动机器人系统的群集运动控制. 定义  $\mathbf{r}_l = (x_l, y_l)^T$ ,  $\mathbf{v}_l$  和  $\theta_l$  分别为领航机器人的位置、定常速度和朝向角矢量, 且领航机器人沿固定的朝向角做匀速运动.  $\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_l$  和  $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \theta_l$  分别为跟随机器人  $i$  关于领航机器人  $l$  的位置、速度和朝向角误差矢量. 由势函数

$V_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$ 的定义,有 $V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) = \tilde{V}_{ij}(\tilde{\mathbf{r}}_{ij})$ ,其中 $\tilde{\mathbf{r}}_{ij} = \tilde{\mathbf{r}}_i - \tilde{\mathbf{r}}_j$ .进而为每个跟随机器人*i*设计如下的群集控制协议:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= -\langle \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_i} \tilde{V}_i, (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T \rangle \left| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \right| - \\ &\quad k \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - h_i \tilde{\mathbf{v}}_i, \\ \omega_i &= -\langle \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_i} \tilde{V}_i, (-\sin \theta_i, \cos \theta_i)^T \rangle \left| \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\theta_i - \theta_j) \right| - \\ &\quad k \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\theta_i - \theta_j) - h_i \tilde{\theta}_i, \end{aligned} \quad (21)$$

其中:  $\tilde{V}_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tilde{V}_{ij}$ ,  $|\cdot|$ 为作用在向量各分量上的绝对值算子.若跟随机器人*i*能够获取领航机器人*l*的信息,则 $h_i = 1$ ,否则 $h_i = 0$ .此时设计光滑有界群集势函数如下:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{ij}(\|\tilde{\mathbf{r}}_{ij}\|) &= \frac{(\|\tilde{\mathbf{r}}_{ij}\| - d)^2 (R_j - \|\tilde{\mathbf{r}}_{ij}\|)}{\|\tilde{\mathbf{r}}_{ij}\| + \frac{d^2 (R_j - \|\tilde{\mathbf{r}}_{ij}\|)}{c_1 + U_{\max}}} + \\ &\quad \frac{\|\tilde{\mathbf{r}}_{ij}\|(\|\tilde{\mathbf{r}}_{ij}\| - d)^2}{(R_j - \|\tilde{\mathbf{r}}_{ij}\|) + \frac{\|\tilde{\mathbf{r}}_{ij}\|(R_j - d)^2}{c_2 + U_{\max}}}, \end{aligned} \quad (22)$$

其中:

$$\begin{aligned} U_{\max} &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(0)P\tilde{\boldsymbol{\theta}}(0) + \tilde{\mathbf{v}}^T(0)P\tilde{\mathbf{v}}(0) + \\ &\quad (N^2 - N - 1)V_{\max}, \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}} &= (\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_N)^T, \quad \tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1^T, \dots, \tilde{v}_N^T)^T. \end{aligned}$$

进一步,针对领航跟随多机器人系统,本文给出下述定理:

**定理 2** 考虑由运动模型(1)所描述的*N*个跟随机器人和1个领航机器人所组成的多机器人系统.假设系统的初始网络拓扑 $\mathcal{G}(0)$ 为强连通非平衡图,且系统初始能量 $U(0)$ 为有限值.若有

$$\lambda_1(\Xi(0)) > 2f_{\max}N, \quad (23)$$

其中:  $\Xi = kQ + 2PH$ ,  $H = \text{diag}\{h_1, h_2, \dots, h_N\}$ .则在群集控制律(21)的作用下,所有的跟随机器人可实现与领航者机器人的速度和朝向角的渐近同步,系统的通信拓扑始终保持强连通,各机器人间可以避免碰撞.

证 考虑如下定义的系统Lyapunov函数:

$$U = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T P \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\mathbf{v}}^T P \tilde{\mathbf{v}}. \quad (24)$$

类似于定理1的证明,对 $U(t)$ 在 $[t_{k-1}, t_k]$ 上求导可得

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \\ & 2\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T P(-k\mathcal{L}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \text{diag}\{(\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_i} \tilde{V}_i)_\perp\}|\mathcal{L}\tilde{\boldsymbol{\theta}}| - H\tilde{\boldsymbol{\theta}}) + \\ & 2\tilde{\mathbf{v}}^T P(-kL\tilde{\mathbf{v}} - \text{diag}\{(\nabla_{\mathbf{r}_i} V_i)_\parallel\}|\mathcal{L}\tilde{\mathbf{v}}| - H\tilde{\mathbf{v}}) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(kQ + 2PH)\tilde{\boldsymbol{\theta}} + 2f_{\max}\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \|P\| \|\mathcal{L}\| \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \\ & \tilde{\mathbf{v}}^T(kQ + 2PH)\tilde{\mathbf{v}} + 2f_{\max}\|\tilde{\mathbf{v}}\| \|P\| \|\mathcal{L}\| \|\tilde{\mathbf{v}}\| \leq \\ & -(\lambda_1(\Xi) - 2f_{\max}N)(\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2), \end{aligned} \quad (25)$$

其中:

$$\begin{aligned} \text{diag}\{(\nabla_{\mathbf{r}_i} V_i)_\parallel\} &= \begin{bmatrix} (\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_1} \tilde{V}_1)_\parallel & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & (\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_N} \tilde{V}_N)_\parallel \end{bmatrix}, \\ \text{diag}\{(\nabla_{\mathbf{r}_i} V_i)_\perp\} &= \begin{bmatrix} (\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_1} \tilde{V}_1)_\perp & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & (\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_N} \tilde{V}_N)_\perp \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由于矩阵 $PH$ 为对称半正定,由引理2和式(23)可知

$$\dot{U}(t) \leq 0, \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2, \dots \quad (26)$$

此即表明

$$U(t_k) \leq U(t_{k-1}) < U_{\max}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (27)$$

因此,类似于定理1中的分析,对于任意时刻 $t \in [t_{k-1}, t_k]$ 和机器人*i*,其与所有邻居机器人*j*间的相对距离均不会达到或超过 $R_j$ ,这意味着在 $t_k$ 时刻网络中所有当前的通信连接均能够得到保持.由于 $\mathcal{G}(0)$ 强连通,且 $\mathcal{E}(0)$ 中所有的通信连接均能够得到保持,所以 $\mathcal{G}(t)$ 将会始终保持强连通.进一步可知集合

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{2N}, \tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^N, \tilde{\mathbf{r}} \in D_g | U(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\mathbf{r}}) \leq \\ & U(0)\} \end{aligned} \quad (28)$$

为正向不变紧集.其中

$$\begin{aligned} D_g &= \{\tilde{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^{2N^2} | \|\mathbf{r}_{ij}\| \in [\min\{V_{ij}^{-1}(U_{\max})\}, \\ & \max\{V_{ij}^{-1}(U_{\max})\}], \forall (i, j) \in \mathcal{E}(t)\}, \end{aligned} \quad (29)$$

则由LaSalle不变集原理,起始于 $\Omega$ 的系统的状态轨迹最终均会收敛至如下集合的最大不变子集中:

$$S = \{\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{2N}, \tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^N, \tilde{\mathbf{r}} \in D_g | \dot{U} = 0\},$$

则根据式(25),可得 $\tilde{\mathbf{v}}_1 = \dots = \tilde{\mathbf{v}}_N = \mathbf{0}$ 和 $\tilde{\theta}_1 = \dots = \tilde{\theta}_N = 0$ .即 $\mathbf{v}_1 = \dots = \mathbf{v}_N = \mathbf{v}_l$ 和 $\theta_1 = \dots = \theta_N = \theta_l$ 以及 $\dot{\theta}_1 = \dots = \dot{\theta}_N = \dot{\theta}_l = 0, \dot{\mathbf{v}}_1 = \dots = \dot{\mathbf{v}}_N = \dot{\mathbf{v}}_l = \mathbf{0}$ .进一步,由式(21),有

$$\dot{\mathbf{v}} = - \begin{bmatrix} \sum_{j \in \mathcal{N}_1 \cup \{l\}} \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_1} \tilde{V}_{1j} \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_2 \cup \{l\}} \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_2} \tilde{V}_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_N \cup \{l\}} \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_N} \tilde{V}_{Nj} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (30)$$

因此,系统几乎所有最终的几何拓扑构形均会局部最小化与每个机器人*i*相关联的复合势函数  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i \cup \{l\}} \tilde{V}_{ij}$ .最后,类似于定理1的证明,系统中各机器人间均会实现碰撞规避. 证毕.



## 4 仿真和实验(Simulations and experiments)

### 4.1 不带有领航者的系统群集运动仿真(Simulation of multi-robot flocking without a leader)

本节给出比较数值仿真实例以验证本文所提出的带有连通性保持功能的分布式群集运动控制算法的正确性和有效性. 实验程序主要采用C++语言来编写, 机器人仿真系统采用了全新的MobileSim仿真平台, 所以有别于Matlab中的数值仿真, 每个机器人的线速度和朝向角在程序中都进行了详细的考虑. 用于测量机器人自身线速度和角速度的编码器的分辨率分别为0.6 cm/s和30 rad/s. 仿真中使用满足运动学模型(1)且在平面上运动的5个轮式移动机器人, 初始时刻为 $t_0 = 0$  s, 仿真时间为50 s, 各轮式移动机器人的通信半径为 $R_1 = R_2 = R_4 = 2.5$  m,  $R_3 = R_5 = 3$  m. 系统的初始位置、线速度和朝向角随机选取并满足下列条件:

- 1) 所有机器人的初始位置均位于半径为 $R = 10$  m的圆周内, 并且保证系统的初始通信拓扑为连通图;
- 2) 所有机器人的初始速度大小在 $[0, 2]$  m/s范围内随机选择;
- 3) 所有机器人的初始朝向角在 $(-\pi, \pi]$  rad范围内随机选择.

进一步, 如式(7)所示的人工势函数对应的邻接智能体期望距离 $d = 2$  m,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_1 = 0.5$ . 控制增益 $k = 15$ , 经过简单数学推导可得到 $V_{\max} = V(R_{\max} - \varepsilon_2)$ , 然后由

$$\begin{aligned}
 H_{\max} \leq & N(N-1)V(R_{\max} - \varepsilon_2) + \\
 & N\lambda_N(P) \max_{i \in V} \tilde{v}_i^T(0)\tilde{v}_i(0) + \\
 & N\lambda_N(P) \max_{i \in V} \tilde{\theta}_i^T(0)\tilde{\theta}_i(0) \quad (31)
 \end{aligned}$$

可得 $H_{\max} \leq 748.3$ , 选择 $c_1 = c_2 = 50$ , 则可得势函数的具体形式如下:

$$\begin{aligned}
 V_{ij}(\|\mathbf{r}_{ij}\|) = & \frac{(\|\mathbf{r}_{ij}\| - 2)^2(R_j - \|\mathbf{r}_{ij}\|)}{\|\mathbf{r}_{ij}\| + \frac{(R_j - \|\mathbf{r}_{ij}\|)}{200}} + \\
 & \frac{\|\mathbf{r}_{ij}\|(\|\mathbf{r}_{ij}\| - 2)^2}{(R_j - \|\mathbf{r}_{ij}\|) + \frac{\|\mathbf{r}_{ij}\|(R_j - 2)^2}{800}}. \quad (32)
 \end{aligned}$$

图1给出了在控制律(5)作用下系统进行群集运动的仿真结果. 图1(a)给出了初始强连通非平衡的通信网络拓扑. 机器人用红色矩形表示, 机器人之间的单向通信连接关系用带有箭头的黑色粗实线表示, 双向通信连接用不带有箭头的黑色粗实线表示. 整个系统运动的典型时刻如图1(b)–1(d)所示, 从中可以看出, 初始网络拓扑中所有的通信连接都能够得到保持, 新

的通信连接在系统演化过程中被添加至当前的通信网络拓扑之中, 因而网络的强连通性不会遭到破坏, 并且所有机器人在运动过程中不会发生彼此碰撞. 图2(a)–2(c)分别给出了系统沿 $x$ 轴、 $y$ 轴的速度演化曲线以及朝向角演化曲线, 从中可以看出, 系统中所有的机器人最终能够实现速度和朝向角的渐近趋同, 稳定的群集运动行为最终能够得到实现.

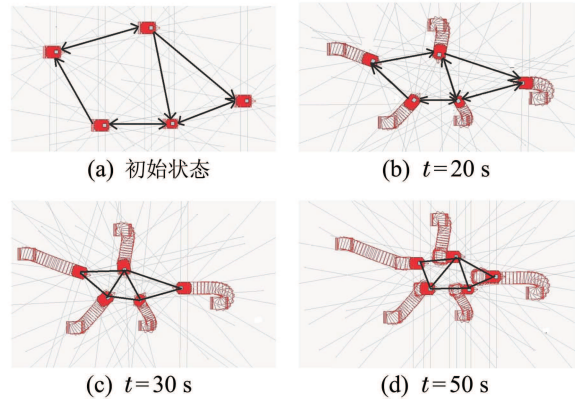


图 1 控制律(5)作用下的系统的群集运动仿真

Fig. 1 Simulation of flocking of the multi-robot system

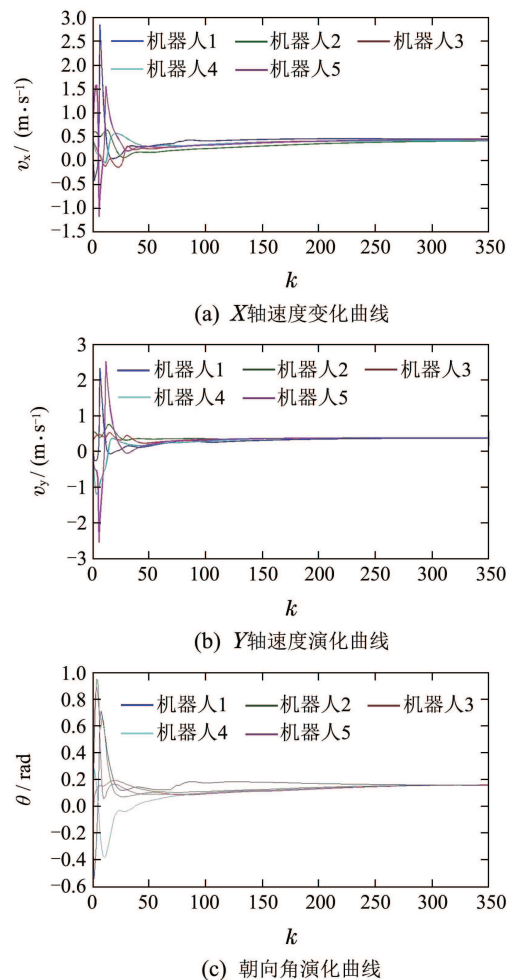


图 2 控制律(5)作用下的系统的速度和朝向角演化曲线  
Fig. 2 Velocities and orientations of the multi-robot system

图3(a)–3(c)给出了不带有连通性保持控制策略下

的系统群集运动演化过程中的典型时刻. 从中可以看出, 对于系统某些特定的初始状态, 与图1中所显示的结果相反, 不带有连通性保持的群集算法会导致网络产生分割现象, 系统中所有的机器人最终会分割成孤立的子群而无法形成连通的整体, 并且所有机器人的速度和朝向角最终无法趋同. 综上可得如下结论: 当系统在任意初始连通拓扑的条件下进行自主演化时, 具有网络连通性保持功能的群集控制策略十分重要, 通过设计带有连通性保持功能的人工势场函数和相应的光滑有界的群集控制协议, 可有效保证系统整体的速度和朝向角的同步, 从而使得整个系统可以实现期望的稳定群集行为.

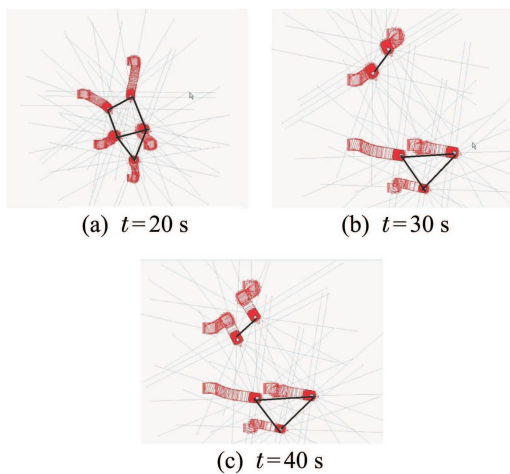


图3 无连通性保持机制下系统的群集运动仿真  
Fig. 3 Simulation of flocking of the multi-robot system without connectivity maintenance

#### 4.2 不带有领航者的系统群集运动实验(Experiment of multi-robot flocking without a leader)

接下来, 本文给出在控制算法(5)作用下的多机器人系统的群集运动控制实物实验的相关结果. 实验对象为5台满足非完整运动学约束的轮式移动机器人系统. 系统的初始位置配置满足通信拓扑的初始强连通性. 机器人的线速度在 $[0, 2]$  m/s内随机选取, 系统的采样控制周期为 $T = 0.5$  s. 各机器人的通信半径设置为 $R_1 = R_2 = R_4 = 2.5$  m,  $R_3 = R_5 = 3$  m, 期望的距离 $d = 1$  m. 进一步, 假设系统中所有的移动机器人均受到非滑动纯滚动约束, 各机器人之间可通过机载的无线通信设备进行信息交互.

图4给出了控制律(5)作用下多轮式移动机器人系统群集运动实验全过程的典型时刻. 其中单向通信连接用带有红色箭头的黄色粗实线表示, 双向通信连接用不带有红色箭头的黄色粗实线表示. 图4(a)给出了系统的强连通非平衡通信拓扑. 图4(b)和4(c)分别为系统在 $t = 20$  s和 $t = 35$  s时的状态. 系统的最终状态由图4(d)所示, 从中可以看出, 系统的通信网络拓扑的强连通性始终能够得到保持, 所有的机器人最终可以

逐渐形成一个紧致的群簇并实现彼此间线速度和朝向角的渐近同步, 因而整个系统最终可实现期望的稳定群集运动行为.

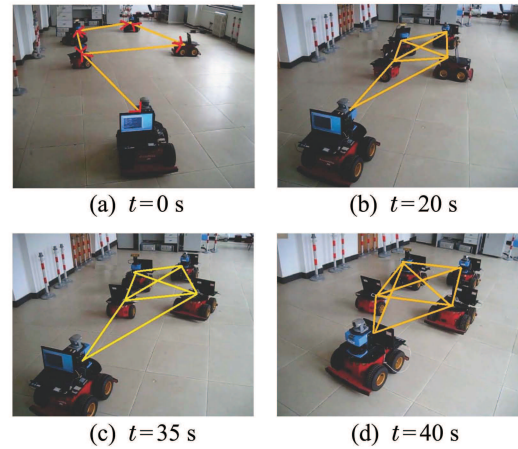


图4 控制律(5)作用下多机器人系统群集运动实验  
Fig. 4 Experiment of flocking of multi-robot system under control law (5)

#### 4.3 带有领航者的系统群集运动仿真(Simulation of multi-robot flocking with a leader)

进一步, 本文给出在控制律(21)作用下带有一个领航者的多移动机器人系统的群集运动仿真结果. 仿真中选取在平面上运动的5个机器人, 各机器人的通信半径设为 $R_1 = R_5 = 5$  m,  $R_2 = R_3 = R_4 = 3$  m, 初始通信网络设置为强连通非平衡图. 5个机器人的初始速度在 $[-3, 3]$  m/s内随机选取, 领航者机器人的线速度和朝向角分别为 $\mathbf{v}_l = [0.5, 0, 5]^T$  m/s,  $\theta_l = -\pi/2$  rad, 其他相关参数为 $\varepsilon_1 = 0.9$ ,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = 0.5$ . 因此, 易知 $V_{\max} = V(R_{\max} - \varepsilon_2)$ , 进而可得

$$\begin{aligned} U_{\max} &\leq N(N-1)V(R_{\max} - \varepsilon_2) + \\ &N\lambda_N(P) \max_{i \in V} \tilde{\mathbf{v}}_i^T(0) \tilde{\mathbf{v}}_i(0) + \\ &N\lambda_N(P) \max_{i \in V} \tilde{\theta}_i^T(0) \tilde{\theta}_i(0). \end{aligned} \quad (33)$$

因此可得 $H_{\max} \leq 1990.7$ , 进而选择 $c_1 = c_2 = 10$ ,  $d = 2$ , 则选择光滑有界势函数如下:

$$\begin{aligned} V_{ij}(\|\mathbf{r}_{ij}\|) &= \frac{(\|\mathbf{r}_{ij}\| - 2)^2 (R_j - \|\mathbf{r}_{ij}\|)}{\|\mathbf{r}_{ij}\| + \frac{(R_j - \|\mathbf{r}_{ij}\|)}{500}} + \\ &\frac{\|\mathbf{r}_{ij}\| (\|\mathbf{r}_{ij}\| - 2)^2}{(R_j - \|\mathbf{r}_{ij}\|) + \frac{\|\mathbf{r}_{ij}\| (R_j - 2)^2}{2000}}. \end{aligned} \quad (34)$$

图5给出了系统群集运动演化过程各典型时刻的仿真结果, 仿真时间为50 s. 图5(a)描述了系统的初始状态, 其中具有引导信息的机器人用大写字母“L”来加以标记. 图5(b)和5(c)分别给出了在 $t = 10$  s和 $t = 30$  s时系统的状态, 从中可以明显看出, 在控制律(21)的作用下, 网络的强连通性始终能够得到保持,



初始稀疏分布的各机器人可以逐渐形成一个紧致的群簇而且彼此间可以避免发生碰撞. 系统的最终状态由图5(d)所示. 所有跟随者和领航者的速度误差和朝向角误差曲线如图6所示.

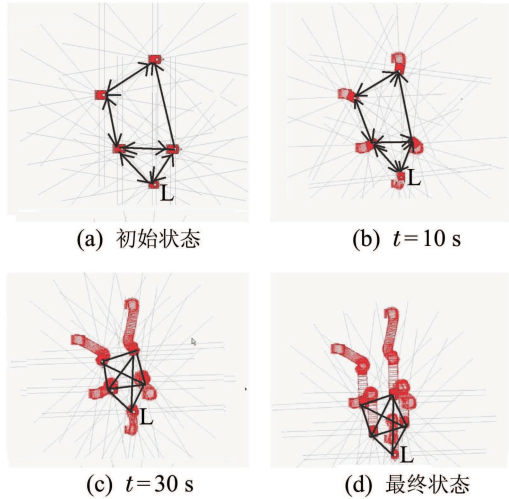


图 5 控制律(21)作用下多轮式移动机器人系统群集运动仿真  
Fig. 5 Simulation of flocking of the multi-robot system under control law (21)

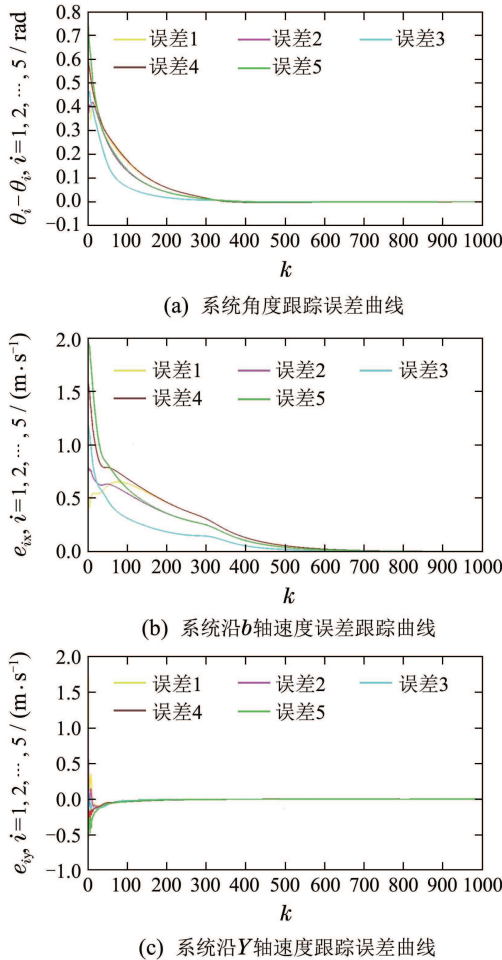


图 6 控制律(21)作用下系统跟踪误差演化曲线  
Fig. 6 Tracking errors of multi-robot flocking under control law (21)

从图6中可以清楚地看出所有跟随机器人的线速度和朝向角均与领航机器人渐趋趋同, 系统最终可以实现期望的稳定群集运动行为. 施加在各机器人上的光滑有界控制输入曲线由图7所示.

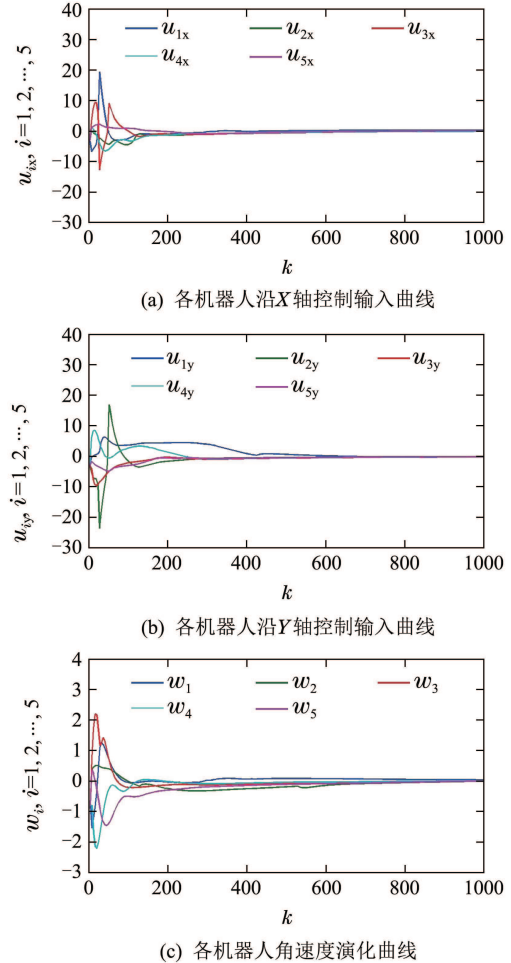


图 7 控制律(21)作用下系统有界控制输入演化曲线  
Fig. 7 Bounded control inputs of the multi-robot system under control law (21)

#### 4.4 带有领航者的系统群集运动实验(Experiment of multi-robot flocking with a leader)

最后, 图8给出了系统群集运动演化过程的典型时刻的实验结果, 实验时间为50 s, 控制周期 $T = 0.5$  s. 其中蓝色实心圆点代表系统中的虚拟领航者, 且用大写字母“L”表示, 其以恒定的线速度和朝向角做匀速直线运动, 虚拟领航机器人的初始线速度为 $[0.1, 0]^T$  m/s, 初始朝向角为0 rad. 图8(a)给出了系统的初始状态, 可见系统的初始通信拓扑为强连通非平衡图. 图8(b)和图8(c)分别给出了系统在 $t = 10$  s和 $t = 20$  s时的瞬时状态. 从图8可以看出, 系统在动态演化过程中, 各机器人在控制律(21)的作用下逐渐向虚拟领航者靠拢并且时刻调整其各自的线速度和朝向角以保持和虚拟领航者同步运动. 图8(d)给出了系统的最终状态, 可见所有的跟随机器人最终能够与虚

拟领航者保持速度和朝向角的渐近同步, 通信网络拓扑的强连通性始终能够得到保持, 系统最终能够实现渐近稳定的领航跟随群集运动行为。

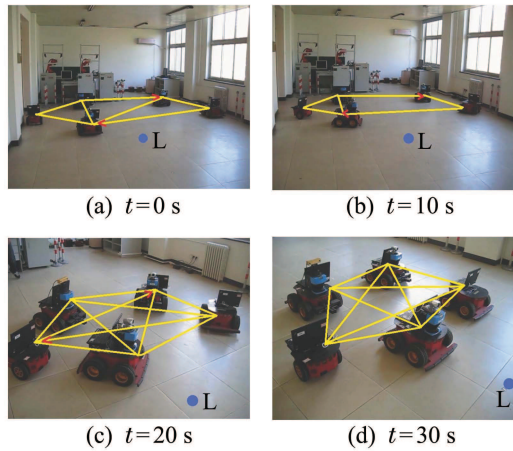


图8 控制律(21)作用下多轮式移动机器人系统群集运动实验  
Fig. 8 Experiment of flocking of the multi-robot system under control law (21)

图9给出了系统的控制输入演化曲线。

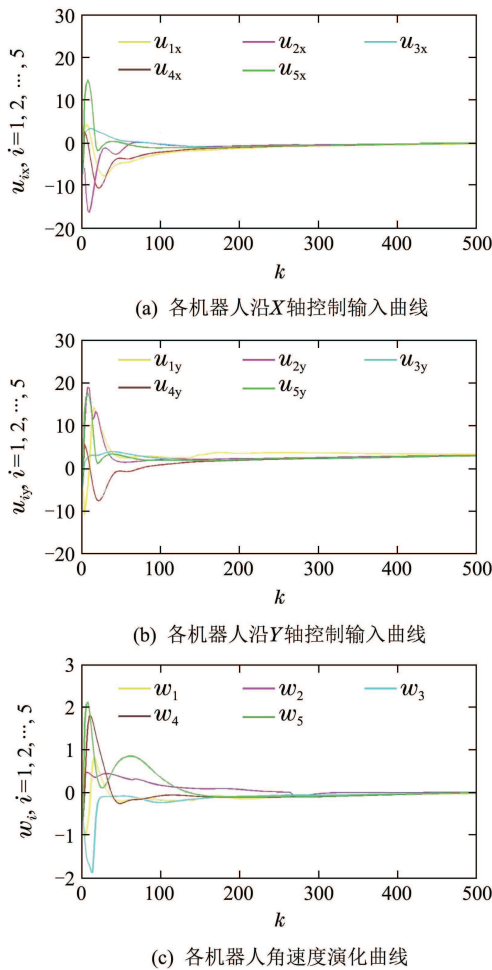


图9 控制律(21)作用下的有界控制输入演化曲线  
Fig. 9 Bounded control inputs of the multi-robot system under control law (21)

从图9可以看出, 系统在整个动态演化过程中, 施加在各机器人上的控制输入始终保持有界性, 因此可成功验证相关理论结果的正确性和群集控制算法的有效性。

### 5 结论(Conclusions)

本文将传统连通性保持条件下的群集运动控制算法从个体运动模型和系统通信拓扑类型两个方面同时加以推广, 即重点讨论有向通信网络中具有非完整运动学约束的多轮式移动机器人系统群集运动控制中的连通性保持问题. 研究中特别考虑网络拓扑初始为强连通非平衡图的情形, 首先针对系统中不具有领航机器人的情形, 提出一类光滑有界的分布式人工势场函数, 给出了与个体非完整约束运动模型相适应的一类有界的分布式群集运动控制协议, 其可以同时实现网络在动态演化过程中的连通性保持、个体间的避碰控制及相对距离镇定. 进一步, 该算法被拓展到具有一个领航机器人的群集运动控制系统, 通过为每个跟随机器人设计相应的分布式群集跟踪控制协议, 以使得即使在系统只有一个具有引导信息的机器人的条件下, 所有的跟随者仍然可以与领航机器人实现速度和朝向角的渐近一致. 最后本文给出数值仿真和实物实验来验证相关理论结果和控制算法正确性和有效性。

未来的研究工作将重点考虑在任意事先给定控制律上界的条件下进行光滑有界群集控制律的分析与设计问题, 此外, 在更一般的有向弱连通通信拓扑下进行分布式有界群集控制算法的分析与设计也是具有重要意义且富有难度和挑战性的研究方向。

### 参考文献(References):

- [1] TANNER H G, JADBABAIE A, PAPPAS G J. Stable flocking of mobile agents, part I: fixed topology [C] // *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Pasadena, CA: IEEE, 2003: 2010 – 2015.
- [2] TANNER H G, JADBABAIE A, PAPPAS G J. Stable flocking of mobile agents, part II: dynamic topology [C] // *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Pasadena, CA: IEEE, 2003: 2016 – 2021.
- [3] OLFATI-SABER R, MURRY R M. Flocking with obstacle avoidance: cooperation with limited communication in mobile networks [C] // *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Pasadena, CA: IEEE, 2003: 2022 – 2028.
- [4] OLFATI-SABER R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 401 – 420.
- [5] 程磊, 俞辉, 吴怀宇, 等. 一类有序化多移动机器人群集运动控制系统 [J]. *控制理论与应用*, 2007, 25(6): 1117 – 1120. (CHENG Lei, YU Hui, WU Huaiyu, et al. A sequential flocking control system for multiple mobile robots [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 25(6): 1117 – 1120.)
- [6] SCHURESKO M D, CORTES J. Safe graph rearrangements for distributed connectivity of robotic networks [C] // *Proceedings of the*

- 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA: IEEE, 2007: 4602 – 4607.
- [7] SU H, WANG X, CHEN G. Rendezvous of multiple mobile agents with preserved network connectivity [J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(5): 313 – 322.
- [8] LI X, XI Y. Distributed cooperative coverage and connectivity maintenance for mobile sensing devices [C] // *Proceedings of the 48th IEEE International Conference on Decision and Control*. Shanghai, China: IEEE, 2009: 7891 – 7896.
- [9] ZAVLANOS M M, EGERSTEDT M, PAPPAS G J. Graph-Theoretic connectivity control of mobile robot networks [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2011, 99(9): 215 – 233.
- [10] SPANOS D P, MURRAY R M. Robust Connectivity of networked vehicles [C] // *Proceedings of the 43rd IEEE Conference and Decision and Control*. Pasadena, CA: IEEE, 2004: 2893 – 2898.
- [11] NOTARSTEFANO G, SAVLA K, BULLO F. Maintaining limited-range connectivity among second-order agents [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Minneapolis, MN: IEEE, 2006: 2124 – 2129.
- [12] JI M, EGERSTEDT M. Distributed formation control while preserving connectedness [C] // *Proceedings of the 45th IEEE Conference and Decision and Control*. San Diego, CA: IEEE, 2006: 5962 – 5967.
- [13] JI M, EGERSTEDT M. Distributed coordination control of multi-agent systems while preserving connectedness [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2007, 23(4): 693 – 703.
- [14] ZAVLANOS M M, PAPPAS G J. Controlling connectivity of dynamic graphs [C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE, 2005: 6388 – 6393.
- [15] ZAVLANOS M M, JADBABAIE A, PAPPAS G J. Flocking while preserving network connectivity [C] // *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA: IEEE, 2007: 2919 – 2924.
- [16] ZAVLANOS M M, PAPPAS G J. Potential fields for maintaining connectivity of mobile networks [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2007, 23(4): 812 – 816.
- [17] ZAVLANOS M M, PAPPAS G J. Distributed connectivity control of mobile networks [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2008, 24(6): 1 – 12.
- [18] ZAVLANOS M M, TANNER H G, JADBABAIE A, et al. Hybrid control for connectivity preserving flocking [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(12): 2869 – 2875.
- [19] KIM Y, MESBAHI M. On maximizing the second smallest eigenvalue of a state-dependent graph Laplacian [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(1): 116 – 120.
- [20] YANG P, FREEMAN R A, GORDON G J, et al. Decentralized estimation and control of graph connectivity for mobile sensor networks [J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 390 – 396.
- [21] LI X, ZHAO S, XUE H. Cooperative coverage of mobile robots with distributed estimation and control of connectivity [C] // *Proceedings of the 9th Asian Control Conference*. Istanbul, Turkey: IEEE, 2013: 1 – 6.
- [22] SABATTINI L, CHOPRA N, SECCHI C, et al. Distributed Control of multirobot systems with global connectivity maintenance [J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2013, 0(0): 1 – 13.
- [23] SABATTINI L, SECCHI C, CHOPRA N. Decentralized connectivity maintenance for networked Lagrangian dynamical systems [C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Saint Paul, MN: IEEE, 2012: 2433 – 2438.
- [24] SABATTINI L, CHOPRA N, SECCHI C. Decentralized connectivity maintenance for cooperative control of mobile robotic systems [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2013, 29(5): 1326 – 1332.
- [25] DIMAROGONAS D V, JOHANSSON K H. Bounded control of network connectivity in multi-agent systems [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2010, 4(8): 1330 – 1338.
- [26] KAN Z, DANI A, SHEA J M, et al. Ensuring network connectivity during formation control using a decentralized navigation function [C] // *Proceedings of IEEE Military Communication Conference*. San Jose, CA: IEEE, 2010: 954 – 959.
- [27] KAN Z, DANI A, SHEA J M, et al. Network connectivity preserving formation stabilization and obstacle avoidance via a decentralized controller [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(7): 1827 – 1832.
- [28] KAN Z, DANI A, SHEA J M, et al. Ensuring network connectivity for nonholonomic robots during rendezvous [C] // *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*. Orlando, FL: IEEE, 2011: 2369 – 2374.
- [29] AJORLOU A, MOMEINI A, AGHDAM A G. Connectivity preservation in a network of single integrator agents [C] // *Proceedings of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and the 28th Chinese Control Conference*. Shanghai, China: IEEE, 2009: 7061 – 7067.
- [30] AJORLOU A, AGHDAM A G. Connectivity preservation in non-holonomic multi-agent systems: a bounded distributed control strategy [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(9): 2366 – 2371.
- [31] LEE D, SPONG M W. Stable flocking of multiple inertial agents on balanced graphs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1469 – 1475.
- [32] 俞辉, 王永骥, 程磊. 基于有向网络的智能群体群集控制 [J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(1): 79 – 83.  
(YU Hui, WANG Yongji, CHENG Lei. Flocking motion control of flock in directed networks [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(1): 79 – 83.)
- [33] 谭拂晓, 关新平, 刘德荣. 非平衡拓扑结构的多智能体网络系统一致性协议 [J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(10): 1087 – 1092.  
(TAN Fuxiao, GUAN Xinping, LIU Derong. Consensus protocol in networked multi-agent systems with non-balanced topology [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(1): 79 – 83.)
- [34] REN W, CAO Y. *Distributed Coordination of Multi-agent Networks — Emergent Problems, Models, and Issues* [M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2011.
- [35] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. London, UK: Cambridge University Press, 1985.

#### 作者简介:

毛昱天 (1984–), 男, 博士研究生, 研究方向为多智能体系统分布式协同控制、多机器人协调控制, E-mail: virtual123@126.com;

陈杰 (1965–), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为动态环境下复杂系统的多指标优化与多目标决策、复杂约束条件下的系统优化、决策与控制, E-mail: chenjie@bit.edu.cn;

方浩 (1973–), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为多智能体协同控制、智能移动机器人, E-mail: fangh@bit.edu.cn;

窦丽华 (1962–), 女, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为模式识别、多机器人协同控制, E-mail: doulihua@bit.edu.cn.