第 31 卷第 7 期
2014 年 7 月
控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications
Vol. 31 No. 7
Jul. 2014

DOI: 10.7641/CTA.2014.40071

一类非线性输出反馈系统的自适应输出调节问题

郭美忱, 刘 璐†
(香港城市大学 机械与生物医学工程学系, 香港 九龙)

摘要: 本文讨论一类非线性系统的全局鲁棒输出调节问题. 假定被控非线性系统的系统输入方向未知, 且产生参考或扰动信号的外部系统含未知参数, 这为控制律的设计带来了挑战. 文章使用自适应控制方法和内模原理, 解决了一类相对阶为1的非线性输出反馈系统的输出调节问题, 并将结果应用于处理Lorenz系统的渐近跟踪问题.

关键词: 输出调节问题; 自适应控制; 非线性系统; Lyapunov函数

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Adaptive output regulation problem for a class of nonlinear systems

GUO Mei-chen, LIU Lu†
(Department of Mechanical and Biomedical Engineering, City University of Hong Kong, Kowloon, Hong Kong)

Abstract: We study the global robust output regulation problem for a class of nonlinear output feedback systems. In this problem, it is assumed that the exosystem and the control direction are unknown, which poses challenges in control law design. Adaptive control scheme and internal model principle are employed to solve the output regulation problem for nonlinear output feedback systems with relative degree 1. The controller proposed in this paper is also applied to solving an asymptotic tracking problem of the controlled Lorenz system.

Key words: output regulation; adaptive control; nonlinear systems; Lyapunov function

1 引言(Introduction)

线性及非线性系统的输出调节问题自20世纪70年代被提出之后, 一直受到广泛关注. 早期, 研究人员将线性系统作为输出调节问题的对象, 得到了一系列重要结论, 如输出调节问题的可解性条件[1]、内模原理[2]等. 其后, 研究的焦点转入非线性系统的输出调节问题, 例如文献[3–6].

关于非线性输出调节问题的一个研究热点是非线性鲁棒输出调节问题. 首先, 内模原理被用于处理含有未知参数的非线性系统的输出调节问题[7–8]. 但用于解决此类问题的鲁棒控制方法无法处理外部系统含有未知参数的问题. 例如内模原理可以处理当外部信号为频率已知、幅值和初始相位为任意值的一类正弦信号的输出调节问题, 但若此正弦信号的频率未知, 内模原理便无能为力[9]. 为解决这个问题, 自适应控制方法被引入以处理外部系统含有未知参数的问题[10–12]. 其中文献[11]通过解决外部系统含未知参数的非线性输出反馈系统的全局鲁棒输出调节问题, 给出了估计参数收敛于其真实值的条件. 而文献[12]则给出了利用状态反馈解决外部系统含未知参数时, 非线性下三角系统的全局抗扰动问题的方法.

以上所提到的输出调节问题的解决方法都建立在系统输入方向已知的条件下. 系统的输入方向是其输入系数的符号, 其正负会决定控制信号增益的方向. 因此, 系统输入方向未知为控制器的设计带来了挑战. 解决这一问题的标准方法是使用Nussbaum增益技术[13]. Nussbaum增益技术被用于设计系统输入方向未知的非线性系统的全局自适应控制器[14]及鲁棒跟踪控制器[15–16]. 在假设系统输入方向未知的条件下, 文献[17]用Nussbaum增益技术解决了非线性下三角系统的输出调节问题; 而文献[18–19]则解决了可转化为输出反馈形式的非线性系统的输出调节问题. 其中文献[19]给出了针对一类相对阶为1的非线性输出反馈系统的输出调节问题的解决方法, 并将结果应用于解决Lorenz系统的渐近跟踪问题.

据作者了解, 目前已有的控制方法可解决的全局鲁棒非线性输出调节问题包括：含有未知参数的线性外部系统的问题, 或系统输入方向未知的问题. 但还没有文献讨论外部系统为含有未知参数的线性系统且系统输入方向未知的输出调节问题. 因此, 本文将讨论以下自适应全局鲁棒输出调节问题: 对于一类相对阶为1的非线性输出反馈系统, 在系统输入方向

收稿日期: 2014−01−25; 录用日期: 2014−05−23.
†通信作者. E-mail: luliu45@cityu.edu.hk; Tel.: +852 34425426.
基金项目: 香港城市大学资助项目(CityU–7200330).

未知, 且线性外部系统含有未知参数的条件下设计控制器, 使得在任意初始条件下及任意时间点上, 系统状态及控制律的轨迹存在并有界, 且跟踪误差渐近趋近于0. 系统输入方向未知的相对阶为1的非线性输出反馈系统的输出调节问题在文献[19]中有所讨论, 但其未考虑外部系统中的未知参数, 因此其方法不适用于本文提出的问题. 文献[11]中给出了解决线性外部系统含未知参数情况下, 非线性输出反馈系统的输出调节问题的方法, 但其假设系统输入方向已知, 因此也不能解决本文提出的问题. 针对两个未知参数, 文章将结合Nussbaum增益技术和自适应内模设计控制器. 同时, 本文使用的非线性系统模型相比文献[11,18]范围更广, 能够包括更多类的非线性系统[19].

本文结构安排如下: 第2部分将给出问题描述及预备知识, 从而将以上提到的全局鲁棒输出调节问题转化为全局鲁棒镇定问题. 控制器的设计等主要结果将于第3部分给出. 文章的第4部分和第5部分分别为仿真算例及结论.

后文会用到的符号包括: $\|A\|$表示矩阵A的Euclidean范数; $\mathrm{col}(v_1,v_2)$为由任意列向量v_1, v_2组成的向量$(v_1^{\mathrm{T}},v_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$; I_r表示r阶单位矩阵.

2 问题描述及预备知识(Problem formulation and preliminaries)

考虑如下不确定非线性输出反馈系统:

$$\begin{cases}\dot z=f(z,y,v,w),\\ \dot y=g(z,y,v,w)+bu,\\ e=y-q(v,w),\end{cases}\tag{1}$$

其中: $z\in\mathbb{R}^n$和$y\in\mathbb{R}$为系统状态变量, $u\in\mathbb{R}$为控制输入信号, $w\in W\subset\mathbb{R}^p$是系统未知参数, W为一紧集, $e\in\mathbb{R}$表示输出跟踪误差. 假设函数f, g, 和q足够光滑, 并且满足对任意$w\in W$, $f(0,0,0,w)=0$, $g(0,0,0,w)=0$, $q(0,w)=0$. 系统输入系数$b\neq0$, 但符号未知. 方程组(1)描述的是一类相对阶为1的输出反馈系统. $v\in\mathbb{R}^q$为外部信号, 由以下线性外部系统产生:

$$\dot v(t)=A_1(\sigma)v(t),\ v(0)=v_0,\tag{2}$$

其中$\sigma\in S\subset\mathbb{R}^l$表示未知参数. 矩阵$A_1(\sigma)$满足如下假设:

假设 1 对任意$\sigma\in S$, 矩阵$A_1(\sigma)$的特征值各异, 且实部都为0.

假设1使得外部系统(2)可以产生有限个任意幅值的阶跃函数及任意幅值、初始相位的正弦函数的组合.

下面给出系统(1)的输出调节问题的描述: 对于任意$v\in\mathbb{R}^q$, $w\in W$, $\sigma\in S$, 设计如下输出反馈控制器:

$$u=u_K(\zeta,e),\ \dot\zeta=g_K(\zeta,e),\tag{3}$$

使在任意初始条件$(z(0),y(0),v(0),\zeta(0))$下, 由式(1)−(3)组成的闭环系统的解在$t\in[0,+\infty)$上存在并有界, 且误差输出信号$e(t)$在$t\to+\infty$时渐进趋近于零. 其中, 控制律中的$u_K(\cdot)$和$g_K(\cdot)$都为足够光滑的函数, 并满足$u_K(0,0)=0$, $g_K(0,0)=0$.

为将系统(1)的输出调节问题转化为其增广系统的镇定问题, 按照文献[6]中提出的框架, 需做出如下几个假设:

假设 2 对任意$v\in\mathbb{R}^q$, $w\in W$, $\sigma\in S$, 存在一个足够光滑的函数$\boldsymbol{z}(v,w,\sigma)$满足$\boldsymbol{z}(0,0,0)=0$, 并且其对时间的导数满足

$$\frac{\partial\boldsymbol{z}(v,w,\sigma)}{\partial v}A_1(\sigma)v=f(\boldsymbol{z}(v,w,\sigma),q(v,w),v,w).$$

假设2保证系统(1)的调节器方程可解[6]. 定义$\boldsymbol{y}(v,w)=q(v,w)$及

$$\boldsymbol{u}(v,w,\sigma)=\\ b^{-1}(\frac{\partial q(v,w)}{\partial v}A_1(\sigma)v-g(\boldsymbol{z}(v,w,\sigma),q(v,w),v,w)),$$

则$\boldsymbol{z}(v,w,\sigma)$, $\boldsymbol{y}(v,w)$和$\boldsymbol{u}(v,w,\sigma)$为调节器方程的解.

假设 3 函数$\boldsymbol{u}(v,w,\sigma)$是关于$v$的多项式, 其系数由$w$和$\sigma$决定.

假设2和3决定下文将得到一个线性内模[19]. 在假设3下, 存在一个整数s, 使得对所有$v\in\mathbb{R}^q$, $w\in W$, $\sigma\in S$, 函数$\boldsymbol{u}(v,w,\sigma)$满足

$$\frac{\mathrm{d}^s\boldsymbol{u}(v,w,\sigma)}{\mathrm{d}t^s}=\\ a_1(\sigma)\boldsymbol{u}(v,w,\sigma)+a_2(\sigma)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(v,w,\sigma)}{\mathrm{d}t}+\cdots+\\ a_s(\sigma)\frac{\mathrm{d}^{(s-1)}\boldsymbol{u}(v,w,\sigma)}{\mathrm{d}t^{(s-1)}},$$

其中$a_1(\sigma),a_2(\sigma),\cdots,a_s(\sigma)$为实标量, 并且对任意$\sigma\in S$, 多项式

$$P^\sigma(\lambda)=\lambda^s-a_1(\sigma)-a_2(\sigma)\lambda-\cdots-a_s(\sigma)\lambda^{(s-1)}$$

的根互异, 且实部都为0.

定义$\tau(v,w,\sigma)=\mathrm{col}(\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},\cdots,\mathbf{u}^{(s-1)})$,

$$\varPhi(\sigma)=\begin{bmatrix}0 & I_{s-1}\\ a_1(\sigma) & a_2(\sigma),\cdots,a_s(\sigma)\end{bmatrix},$$

$$\varGamma=[1\ 0\ \cdots\ 0]_{1\times s},$$

则对于任意$v\in\mathbb{R}^q$, $w\in W$, $\sigma\in S$, 矩阵$\tau(v,w,\sigma)$, $\varPhi(\sigma)$和$\varGamma$满足

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\tau(v,w,\sigma)}{\partial v}A_1(\sigma)v=\varPhi(\sigma)\tau(v,w,\sigma),\\ &\boldsymbol{u}(v,w,\sigma)=\varGamma\tau(v,w,\sigma).\end{aligned}\tag{4}$$

系统(4)称为输出为u的稳态发生器, 它可以用来产生

稳态信号$\boldsymbol{u}(v,w,\sigma)$. 对满足$(M,N)$可控的矩阵$N\in\mathbb{R}^{s\times 1}$和Hurwitz矩阵$M\in\mathbb{R}^{s\times s}$, 由于矩阵对$(\Gamma,\Phi(\sigma))$可观且$\Phi(\sigma)$的特征值的实部都为0, 则Sylvester方程

$$T(\sigma)\Phi(\sigma)-MT(\sigma)=N\Gamma \tag{5}$$

存在唯一的非奇异解$T(\sigma)$. 定义

$$\theta(v,w,\sigma)=T(\sigma)\tau(v,w,\sigma),\ \Psi^{\sigma}=\Gamma T^{-1}(\sigma),$$

则有

$$\begin{aligned}&\dot\theta=T(\sigma)\Phi(\sigma)T^{-1}(\sigma)\theta,\\&\boldsymbol{u}(v,w,\sigma)=\Psi^{\sigma}\theta.\end{aligned} \tag{6}$$

定义如下动态补偿器:

$$\dot\eta=M\eta+Nu. \tag{7}$$

系统(7)称为输出为u的内模[6].

定义以下变量及函数:

$$\begin{aligned}&\varphi=b\Psi^{\sigma},\ \mu=\mathrm{col}(v,w),\\&\bar f(\bar z,e,\mu)=f(\bar z+\boldsymbol{z},e+q,\mu)-f(\boldsymbol{z},q,\mu),\\&\bar g(\bar z,e,\mu)=g(\bar z+\boldsymbol{z},e+q,\mu)-g(\boldsymbol{z},q,\mu).\end{aligned}$$

将系统(1)和动态补偿器(7)合并, 对其做如下的坐标变换:

$$\begin{cases}\bar z=z-\boldsymbol{z}(v,w,\sigma),\\\tilde\eta=\eta-\theta(v,w,\sigma)-Nb^{-1}e,\\e=y-q(v,w),\end{cases} \tag{8}$$

代入式(5)–(7)得到

$$\begin{aligned}\dot{\bar z}=&\dot z-\dot{\boldsymbol{z}}=f(\bar z+\boldsymbol{z},e+q,\mu)-f(\boldsymbol{z},q,\mu)=\\&\bar f(\bar z,e,\mu),\\\dot e=&\dot y-\dot q=\dot y-\dot{\boldsymbol{y}}=\\&g(\bar z+\boldsymbol{z},e+q,\mu)+bu-g(\boldsymbol{z},q,\mu)-b\Psi^{\sigma}\theta=\\&\bar g(\bar z,e,\mu)+bu-b\Psi^{\sigma}(\eta-\tilde\eta-Nb^{-1}e)=\\&\bar g(\bar z,e,\mu)+b\Psi^{\sigma}\tilde\eta+\Psi^{\sigma}Ne+bu-\varphi\eta,\\\dot{\tilde\eta}=&\dot\eta-\dot\theta-Nb^{-1}\dot e=\\&M(\tilde\eta+\theta+Nb^{-1}e)+Nu-T\Phi T^{-1}\theta-\\&Nb^{-1}(\bar g(\bar z,e,\mu)+bu-b\Psi^{\sigma}\theta)=\\&M\tilde\eta+MNb^{-1}e+Nu-Nb^{-1}\bar g(\bar z,e,\mu)-\\&Nu+(M-T\Phi T^{-1}+N\Psi^{\sigma})\theta=\\&M\tilde\eta+MNb^{-1}e-Nb^{-1}\bar g(\bar z,e,\mu)+\\&(MT-T\Phi+N\Gamma)T^{-1}\theta=\\&M\tilde\eta+MNb^{-1}e-Nb^{-1}\bar g(\bar z,e,\mu),\end{aligned}$$

于是可得增广系统,

$$\begin{cases}\dot{\bar z}=\bar f(\bar z,e,\mu),\\\dot{\tilde\eta}=M\tilde\eta+MNb^{-1}e-Nb^{-1}\bar g(\bar z,e,\mu),\\\dot e=\bar g(\bar z,e,\mu)+b\Psi^{\sigma}\tilde\eta+\Psi^{\sigma}Ne+bu-\varphi\eta.\end{cases} \tag{9}$$

如果存在如下形式的控制器:

$$u=k_{\zeta}(\zeta,e,\eta),\ \dot\zeta=g_{\zeta}(\zeta,e,\eta), \tag{10}$$

可以使系统(9)全局鲁棒稳定, 即对闭环系统及外部系统的任意初始条件, 和任意固定未知参数$w\in W$, 闭环系统的解在任意$t\geqslant 0$时间点都有界, 且增广系统(9)的状态在$t\to+\infty$时趋近于0, 则控制器

$$\begin{cases}u=k_{\zeta}(\zeta,e,\eta),\\\dot\eta=M\eta+Nu,\\\dot\zeta=g_{\zeta}(\zeta,e,\eta)\end{cases} \tag{11}$$

可以解决系统(1)的全局鲁棒输出调节问题[6].

3 主要结果(Main result)

为设计可以使增广系统(9)全局鲁棒稳定的控制器, 还需要如下的假设:

假设 4　对任意紧集$\Sigma\subset\mathbb{R}^q\times W$及两个$\mathcal{K}_{\infty}$类函数$\alpha_1(\cdot)$和$\alpha_2(\cdot)$, 存在一个$C^1$函数$\bar V_{\bar z}$满足$\alpha_1(\|\bar z\|)\leqslant\bar V_{\bar z}(\bar z)\leqslant\alpha_2(\|\bar z\|)$, 使得对任意$\mu\in\Sigma$, 函数$\bar V_{\bar z}$在子系统$\dot{\bar z}=\bar f(\bar z,e,\mu)$轨迹上的导数满足

$$\dot{\bar V}_{\bar z}\leqslant-\alpha(\|\bar z\|)+\bar\beta\gamma(e), \tag{12}$$

其中: $\bar\beta$为一未知正常数, $\alpha(\cdot)$为一个已知的$\mathcal{K}_{\infty}$类函数, 并满足$\lim\limits_{s\to0^+}\sup(\alpha^{-1}(s^2)/s)<+\infty$, $\gamma(\cdot)$为一个已知的光滑正定函数.

注 1　在假设4下, 子系统$\dot{\bar z}=\bar f(\bar z,e,\mu)$是以$\bar z$为状态, e为输入的输入状态稳定系统. 利用变供给函数方法[20], 给定任意光滑函数$\Delta(\bar z)>0$及两个$\mathcal{K}_{\infty}$类函数$\alpha_{1\bar z}(\cdot)$和$\alpha_{2\bar z}(\cdot)$, 存在一个C^1函数$V_{\bar z}$满足$\alpha_{1\bar z}(\|\bar z\|)\leqslant V_{\bar z}(\bar z)\leqslant\alpha_{2\bar z}(\|\bar z\|)$, 使得对任意$\mu\in\Sigma$, 函数$V_{\bar z}$在子系统$\dot{\bar z}=\bar f(\bar z,e,\mu)$轨迹上的导数满足

$$\dot V_{\bar z}\leqslant-\Delta(\bar z)\|\bar z\|^2+\beta\pi(e)e^2, \tag{13}$$

其中: β为一未知正常数, $\pi(\cdot)\geqslant 1$为一光滑正函数[19].

由于系统输入方向未知, 需要使用Nussbaum增益技术来设计控制器. Nussbaum增益函数满足以下条件[14]:

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\inf\frac{1}{k}\int_0^k\mathcal{N}(\xi)\mathrm{d}\xi=-\infty,\\&\lim_{k\to\infty}\sup\frac{1}{k}\int_0^k\mathcal{N}(\xi)\mathrm{d}\xi=\infty.\end{aligned} \tag{14}$$

本文使用$\mathcal{N}(k)=k^2\cos k$作为Nussbaum增益函数.

引理 1　在假设4下, 考虑闭环系统(9)及如下控制器:

$$\begin{cases}u=\mathcal{N}(k)(\rho(e)e-\hat\varphi\eta),\\\dot{\hat\varphi}=-\eta^{\mathrm{T}}e,\\\dot k=\rho(e)e^2-e\hat\varphi\eta,\end{cases} \tag{15}$$

其中: $\hat\varphi$为未知参数φ的估计值, 存在一个足够光滑的函数$\rho(\cdot)\geqslant 1$,正常数c和Lyapunov函数V, 使其在闭环系统的轨迹上的导数满足

$$\dot{V} \leqslant (b\mathcal{N}(k)+c)\dot{k}. \tag{16}$$

证 首先考虑系统(9)的子系统

$$\begin{aligned}&\dot{\bar{z}} = \bar{f}(\bar{z}, e, \mu),\\ &\dot{\tilde{\eta}} = M\tilde{\eta} + MNb^{-1}e - Nb^{-1}\bar{g}(\bar{z}, e, \mu).\end{aligned} \tag{17}$$

定义$V_1(\bar{z},\tilde{\eta}) = V_{\bar{z}} + \bar{l}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}P\tilde{\eta}$, 其中$\bar{l}$为正常数, 矩阵$P$为Lyapunov方程$PM + M^{\mathrm{T}}P = -I_s$的正定解.

由于$\bar{g}(\bar{z}, e, \mu)$为实连续函数, 且$\bar{g}(0,0,\mu) = 0$, 根据文献[21]中的引理7.8, 存在光滑的实函数$h_i(\cdot) \geqslant 1$, $i = 1, 2$以及未知正常数p, 对任意的μ和e, 如下不等式成立:

$$|\bar{g}(\bar{z}, e, \mu)| \leqslant p\big(h_1(\bar{z})\|\bar{z}\| + h_2(e)|e|\big). \tag{18}$$

于是, 对任意$\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, 函数V_1在子系统(17)轨迹上的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 \leqslant\ & -(\varDelta(\bar{z}) - \bar{l}\epsilon_2^{-1}p^2h_1^2(\bar{z}))\|\bar{z}\|^2 - \bar{l}(1 - \\ & \epsilon_1\|PMNb^{-1}\|^2 - 2\epsilon_2\|PNb^{-1}\|^2)\|\tilde{\eta}\|^2 + \\ & (\beta\pi(e) + \bar{l}\epsilon_1^{-1} + \bar{l}\epsilon_2^{-1}p^2h_2^2(e))e^2.\end{aligned} \tag{19}$$

定义

$$V = V_1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2c}\|c\hat{\varphi} - \varphi\|^2,$$

可得到

$$\begin{aligned}\dot{V} \leqslant\ & \dot{V}_1 + (1 + p^2h_2^2(e) + \|\varPsi^\sigma N\|^2)e^2 + \\ & p^2h_1^2(\bar{z})\|z\|^2 + \|b\varPsi^\sigma\|^2\|\tilde{\eta}\|^2 + \\ & (b\mathcal{N}(k)+c)(\rho(e)e^2 - e\hat{\varphi}\eta) - c\rho(e)e^2 + \\ & ce\hat{\varphi}\eta - e\varphi\eta + (c\hat{\varphi} - \varphi)\dot{\hat{\varphi}}^{\mathrm{T}} \leqslant \\ & -(\varDelta(\bar{z}) - s_1(\bar{z}))\|\bar{z}\|^2 - (\bar{l} - s_2(\tilde{\eta},\sigma))\|\tilde{\eta}\|^2 - \\ & (c\rho(e) - s_3(e,\sigma))e^2 + (b\mathcal{N}(k)+c)\dot{k} + \\ & (c\hat{\varphi} - \varphi)(\dot{\hat{\varphi}} + \eta^{\mathrm{T}}e)^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{20}$$

其中:

$$\begin{aligned}& s_1(\bar{z}) = (1 + \bar{l}\epsilon_2^{-1})p^2h_1^2(\bar{z}),\\ & s_2(\tilde{\eta},\sigma) = \\ & \bar{l}(\epsilon_1\|PMNb^{-1}\|^2 + 2\epsilon_2\|PNb^{-1}\|^2) + \|b\varPsi^\sigma\|^2,\\ & s_3(e,\sigma) = \\ & 1 + (1+\bar{l}\epsilon_2^{-1})p^2h_2^2(e) + \|\varPsi^\sigma N\|^2 + \beta\pi(e) + \bar{l}\epsilon_1^{-1}.\end{aligned}$$

对任意确定的w和σ, 存在ϵ_1, ϵ_2使得

$$1 - \epsilon_1\|PMNb^{-1}\|^2 - 2\epsilon_2\|PNb^{-1}\|^2 > 0,$$

因此选择

$$\bar{l} \geqslant \frac{1 + \|b\varPsi^\sigma\|^2}{1 - \epsilon_1\|PMNb^{-1}\|^2 - 2\epsilon_2\|PNb^{-1}\|^2},$$

则$\bar{l} - s_2(\tilde{\eta},\sigma) \geqslant 1$.

同时, 对任意确定的σ, 存在正常数c满足

$$c \geqslant a^{-1}\max((1 + \bar{l}\epsilon_2^{-1})p^2, \beta, \|\varPsi^\sigma N\|^2 + \bar{l}\epsilon_1^{-1} + 2).$$

其中a为任意正常数, 选择

$$\begin{aligned}& \varDelta(\bar{z}) \geqslant 1 + (1 + \bar{l}\epsilon_2^{-1})p^2h_1^2(\bar{z}),\\ & \rho(e) \geqslant a(h_2^2(e) + \pi(e) + 1),\end{aligned}$$

便可以得到不等式(16). 证毕.

定理 1 在假设1–4下, 存在由式(7)及(15)组成的控制器可以解决非线性系统(1)及外部系统(2)的全局鲁棒输出调节问题.

证 将不等式(16)的两边在时间区间$[0,t)$, $\forall t \geqslant 0$上积分,得到

$$V(t) \leqslant \int_0^t (b\mathcal{N}(k)+c)\dot{k}(\tau)d\tau + V(0). \tag{21}$$

根据文献[14]中的引理1, 从不等式(21)可知$V(t)$和$k(t)$在时间区间$[0,T)(0 < T \leqslant +\infty)$上是有界的. 因此, 由系统(9)和控制器(15)组成的闭环系统的解存在并且有界. 由于$k(t)$是有界的, 根据式(15)中$\dot{k}(t)$的定义, 可知$e(t)$为一个平方可积函数. 因为$e(t)$和$\dot{e}(t)$都有界, 由Barbalat引理得, 当时间t趋于正无穷时, $e(t)$趋近于0. 证毕.

4 仿真算例(Numerical simulation)

以下Lorenz系统[19]为例:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\\ \dot{x}_2 = a_3x_1 - x_2 - x_1x_3 + bu,\\ \dot{x}_3 = a_2x_3 + x_1x_2,\end{cases} \tag{22}$$

其中: $(a_{11}, a_{12}, a_2, a_3)$为一个常参数向量, 并满足$a_{11} < 0$, $a_3 < 0$; b为一未知非零常数. 当$u = 0$时, 系统(22)为著名的Lorenz系统. 设定输出$y = x_2$, 并定义跟踪误差$e = y - F(t)$. 参考信号$F(t)$为一类可以表示为$F(t) = A_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \phi)$的正弦信号, 其幅值$A_{\mathrm{m}} > 0$和初始相位$\phi$均未知. 与文献[19]不同的是, 本文假设参考信号$F(t)$的频率ω也未知. 下面, 将把系统(22)的全局渐近跟踪问题转化为系统输入系数b未知, 且外部系统含有未知参数的输出调节问题.

定义$(z_1, z_2, y) = (x_1, x_3, x_2)$, 可将系统(22)转化为类似式(1)的相对阶为1的输出反馈系统

$$\begin{cases}\dot{z}_1 = a_{11}z_1 + a_{12}y,\\ \dot{z}_2 = a_2z_2 + z_1y,\\ \dot{y} = a_3z_1 - y - z_1z_2 + bu.\end{cases} \tag{23}$$

以上系统中$(a_{11}, a_{12}, a_2, a_3) = (\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_2, \bar{a}_3) + (w_{11}, w_{12}, w_2, w_3)$, 其中: $(\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$代表各参数的标称值, $(w_{11}, w_{12}, w_2, w_3)$代表各参数的不确定值. 由于Lorenz系统需保证参数$a_{11} < 0$, $a_3 < 0$, 定义$\mathbb{R}^p = \{w | w \in W, \bar{a}_{11} + w_{11} < 0, \bar{a}_3 + w_3 < 0\}$.

定义参考信号$F(t) = v_1(t)$, 其中$v_1(t)$由以下外部系统产生:

$$\begin{bmatrix}\dot v_1\\ \dot v_2\end{bmatrix} = A_1(\sigma)\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \sigma\\ -\sigma & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}, \quad (24)$$

其中$\sigma \in S = \{\sigma > 0\}$为未知参数, 表示正弦参考信号$F(t)$的频率$\omega$.

根据文献[19], 以上系统满足假设1–4. 按照第3部分中给出的设计方法, 可以得到形式如下的控制器:

$$\begin{cases} u = k^2\cos k(4e(e^2+1) - \hat\varphi\eta),\\ \dot\eta = M\eta + Nu,\\ \dot{\hat\varphi} = -\eta^{\mathrm T} e,\\ \dot k = 4e^2(e^2+1) - e\hat\varphi\eta. \end{cases} \quad (25)$$

控制器中矩阵M, N给出如下:

$$M = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -2 & -6 & -8 & -3\end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}. \quad (26)$$

图1和图2分别为系统输入系数$b = 1$和$b = -1$时的仿真结果. 仿真中使用的参数为

$$\sigma = 0.8,\ a_{11} = -10,\ a_{12} = 10,$$
$$a_3 = -8/3,\ a_4 = 28.$$

初始条件分别为

$$v_0 = \mathrm{col}(1, 0),$$
$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-1, 2, 1),$$
$$\eta(0) = 0,\ \hat\varphi(0) = 0,\ k(0) = 4.$$

从图中可以看出, 在系统输入方向未知, 及外部系统含未知参数的情况下, 根据第3部分中给出的方法, 使用Nussbaum增益技术和内模原理设计的控制器可以使被控系统渐近追踪参考输入信号.

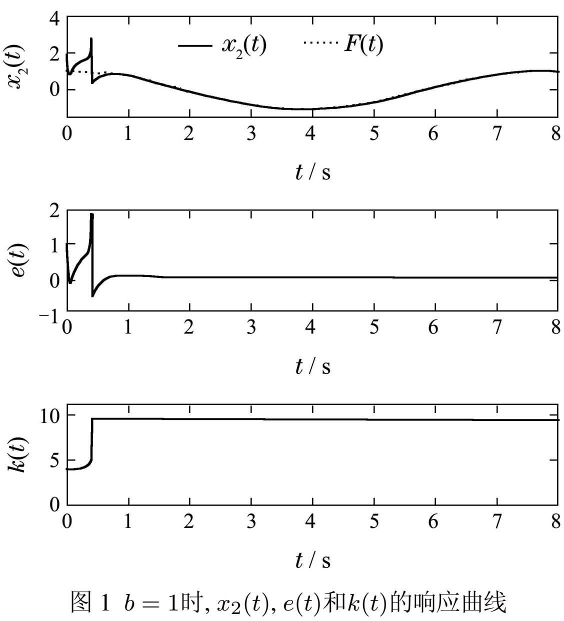

图 1　$b = 1$时, $x_2(t)$, $e(t)$和$k(t)$的响应曲线

Fig. 1　Response of $x_2(t)$, $e(t)$ and $k(t)$, when $b = 1$

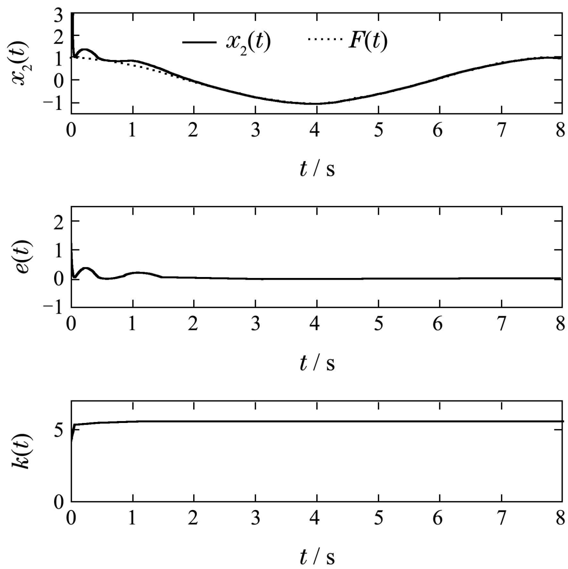

图 2　$b = -1$时, $x_2(t)$, $e(t)$和$k(t)$的响应曲线

Fig. 2　Response of $x_2(t)$, $e(t)$ and $k(t)$, when $b = -1$

5　结论(Conclusions)

本文讨论了一类相对阶为1的非线性输出反馈系统的输出调节问题. 在假设被控系统的输入方向未知, 且外部系统含未知参数的情况下, 文中的输出调节问题无法用已有文献中的方法解决. 通过使用Nussbaum增益技术和自适应内模, 两部分系统未知参数带来的问题都得到了应对, 从而解决了系统(1)的全局鲁棒输出调节问题. 同时文章还将此结果应用于处理Lorenz系统的渐近跟踪问题. 后续工作可考虑相对阶为任意值的非线性输出反馈系统或下三角系统的类似输出调节问题.

参考文献(References):

[1] FRANCIS B. The linear multivariable regulator problem [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1977, 15(3): 486 – 505.

[2] FRANCIS B, WONHAM W. The internal model principle of control theory [J]. *Automatica*, 1976, 12(5): 457 – 465.

[3] HUANG J, LIN C. On the solvability of the general nonlinear servomechanism problem [J]. *Control-Theory and Advanced Technology*, 1995, 10(4): 1253 – 1262.

[4] ISIDORI A, BYRNES C. Output regulation of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(2): 131 – 140.

[5] HUANG J. On the solvability of the regulator equations for a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(5): 880 – 885.

[6] HUANG J, CHEN Z. A general framework for tackling the output regulation problem [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(12): 2203 – 2218.

[7] HUANG J. Asymptotic tracking and disturbance rejection in uncertain nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(6): 1118 – 1122.

[8] SERRANI A, ISIDORI A. Global robust output regulation for a class of nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39(2): 133 – 139.

[9] SERRANI A, ISIDORI A, MARCONI L. Semiglobal nonlinear output regulation with adaptive internal model [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2001, 46(8): 1178 – 1194.

[10] CHEN Z, HUANG J. Global tracking of uncertain nonlinear cascaded systems with adaptive internal model [C] //*Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas: IEEE, 2002, 12: 3855 – 3862.

[11] LIU L, CHEN Z, HUANG J. Parameter convergence and minimal internal model with an adaptive output regulation problem [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1306 – 1311.

[12] LIU L, CHEN Z, HUANG J. Global disturbance rejection of lower triangular systems with an unknown linear exosystem [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(7): 1690 – 1695.

[13] NUSSBAUM R. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control [J]. *Systems & Control Letters*, 1983, 3(5): 243 – 246.

[14] YE X, JIANG J. Adaptive nonlinear design without *a priori* knowledge of control directions [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(11): 1617 – 1621.

[15] YE X. Asymtotic regulation of time-varying uncertain nonlinear systems with unknown control directions [J]. *Automatica*, 1999, 35(5): 929 – 935.

[16] YE X, DING Z. Robust tracking control of uncertain nonlinear systems with unknown control directions [J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 42(1): 1 – 10.

[17] LIU L, HUANG J. Global robust output regulation of lower triangular systems with unknown control direction [J]. *Automatica*, 2008, 44(5): 1278 – 1284.

[18] LIU L, HUANG J. Global robust output regulation of output feedback systems with unknown high-frequency gain sign [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(4): 625 – 631.

[19] XU D, HUANG J. Output regulation design for a class of nonlinear systems with an unknown control direction [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2010, 132(1): 014503–1 – 014503–6.

[20] SONTAG E, TEEL A. Changing supply functions in input/state stable systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(8): 1476 – 1478.

[21] HUANG J. *Nonlinear Output Regulation: Theory and Applications* [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 2004.

作者简介:

郭美忱 (1990–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为非线性系统控制理论及其应用, E-mail: meicheguo2-c@my.cityu.edu.hk;

刘 璐 (1982–), 女, 第14届(2008年)《关肇直奖》获奖论文作者, 助理教授, 博士生导师, IEEE高级会员, 目前研究方向为非线性系统控制理论及其应用、多智能体系统与控制等, E-mail: luliu45@cityu.edu.hk.