

联合连通条件下的二阶多智能体系统有限时间一致性控制

王芳, 陈鑫[†], 何勇, 吴敏

(中南大学信息科学与工程学院, 湖南长沙 410083)

摘要: 针对时变动态拓扑下无 leader 的二阶多智能体系统有限时间一致性控制问题, 本文给出有限时间一致性协议, 并对所提出的一致性协议进行理论分析. 基于图论、Lyapunov 稳定性理论、同次性理论和积分不等式方法, 证明了当通信拓扑为联合连通时, 有限时间一致性协议可保证系统在有限时间达到一致. 最后给出仿真结果, 验证了理论的有效性.

关键词: 多智能体系统; 无领导者; 有限时间一致性; 时变动态拓扑; 联合连通

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Finite-time consensus control of second-order multi-agent systems with jointly-connected topologies

WANG Fang, CHEN Xin[†], HE Yong, WU Min

(School of Information Science & Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China)

Abstract: For the second-order multi-agent systems with no leader and time-varying dynamic topologies, this paper discusses the finite-time consensus protocol, and gives the theoretical analysis on the proposed protocol. Based on the graph theory, Lyapunov stability theory, homogeneity with dilation and integral inequality, the finite-time consensus protocol guarantees that the systems reach the finite-time consensus with the jointly-connected topologies. Finally, some simulation results are given to illustrate the effectiveness of our theoretical results.

Key words: multi-agent systems; leaderless; finite-time consensus; time-varying dynamic topologies; jointly-connected topologies

1 引言(Introduction)

近年来, 随着计算机、网络和通信技术的发展, 多智能体系统协调控制已广泛应用于众多领域, 如无线传感器网络^[1]、移动机器人编队任务^[2]、集群航天器深空探测^[3]等. 因此, 多智能体系统协调控制的研究具有十分重要的理论和实践意义. 一致性问题作为协调控制中最基本的问题之一, 受到了各领域研究人员的广泛关注. 所谓一致性是指在多智能体系统中, 所有智能体最终状态能够趋于一致.

在实际应用中, 控制系统的性能指标的收敛性能是很关键的一个指标, 有限时间控制除了收敛性能最优的优点外, 由于控制器中带有分数幂项, 使得有限时间闭环控制系统与非有限时间闭环控制系统相比, 具有更好的鲁棒性能和抗扰动性能^[4].

在固定拓扑条件下, 文献[5]中考虑了无 leader 条件下双积分系统的有限时间一致性问题, 并给出了几种不同形式的局部时不变控制协议. 文献[6]给出了非线性系统有限时间稳定的一个充分条件, 并讨论了一

类非线性系统的有限时间观测器设计, 解决一类具有下三角结构的非线性系统的有限时间稳定问题. 文献[7]对一类不确定非线性系统提出了一种连续的全局鲁棒有限时间控制律, 并可以推广到 n 阶此类型的非线性系统的有限时间镇定控制律设计中.

在时变拓扑条件下, 文献[8]讨论了非线性协议条件下的有限时间一致性问题. 对于带有未知有界时变干扰的连续时间系统, 文献[9]基于非连续局部交互作用律, 提出了一种分布式算法来解决有限时间一致性问题. 对于未知的非线性系统, 文献[10]提出了一种非线性分布式一致性算法, 并给出了充分条件保证有限时间收敛.

从以上文献研究可知, 虽然拓扑是时变的, 但需保证时变拓扑是连通的或者是强连通. 但实际中, 由于系统通信有限、环境干扰等因素, 时变拓扑并不能保证是时刻连通的. 因此, 本文研究联合连通拓扑, 也就是在拓扑可能是不连通的情况下的有限时间一致性问题. 所谓联合连通是指对于一系列具有相同点集的

拓扑图, 如果它们的联合图是连通的, 则称这一系列拓扑图为联合连通的.

在联合连通拓扑下, 文献[11]研究了一阶多智能体系统带有多个时滞的一致性问题, 并扩展到二阶多智能体系统^[12]. 文献[13]研究了带有联合可达leader的二阶多智能体系统的有限时间一致性问题. 对于时变时滞系统, 文献[14]考虑了当leader状态为静止时和运动时两种情况下的leader-following二阶多智能体系统的一致性问题.

基于现有文献对联合连通条件下带有leader的有限时间一致性问题研究, 本文研究了联合连通条件下无leader的有限时间一致性问题, 由于拓扑不连通, 不能直接利用全局平均值作为虚拟领导者, 因此利用矩阵变换转化为局部连通分支的有限时间一致性问题, 证明了给出的有限时间一致性协议能够保证系统在有限时间内达到一致, 并给出了系统达到稳定状态时的稳态值是等于所有智能体初始状态的平均值.

2 问题描述(Problem description)

本文研究的对象为如下由 n 个多智能体组成的二阶积分器型线性系统, 其动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = u_i, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^m$, $v_i \in \mathbb{R}^m$ 和 $u_i \in \mathbb{R}^m$ 分别表示第 i 个智能体的位置、速度、控制输入.

本文研究目标是在联合连通下, 设计一种控制器, 使得系统能在有限时间内达到一致.

2.1 代数图论(Algebraic graph theory)

设 n 阶加权图 $G = (V, E, A)$ 表示 n 个多智能体之间的通信拓扑, 且智能体作为节点, 由节点集 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 、边集 $E \subseteq V \times V$ 和加权邻接矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($a_{ij} > 0$)组成. 在无向图 G 中, 对于任意的 $i, j \in V$, 假设 $a_{ij} = a_{ji}$ 且 $a_{ii} = 0$, 相应的拉普拉斯矩阵表示为 $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 且有 $l_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 和 $l_{ij} = -a_{ij}$, $i \neq j$. I_n 表示 n 维单位矩阵; \otimes 表示矩阵的张量积; $\mathbf{0}_n$ 和 $\mathbf{1}_n$ 分别表示 n 维矢量 $(0, 0, \dots, 0)^T$ 和 $(1, 1, \dots, 1)^T$. 对于给定的任意矢量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 和常数 $\alpha > 0$, 定义

$$\begin{aligned} x^\alpha &= [x_1^\alpha \ x_2^\alpha \ \dots \ x_n^\alpha]^T, \\ |x|^\alpha &= [|x_1|^\alpha \ |x_2|^\alpha \ \dots \ |x_n|^\alpha]^T, \\ \text{sig}(x)^\alpha &= |x|^\alpha \text{sgn } x, \end{aligned}$$

$\text{sgn}(\cdot)$ 是符号函数, 且有

$$\text{sig}(x)^\alpha = [\text{sig}(x_1)^\alpha \ \text{sig}(x_2)^\alpha \ \dots \ \text{sig}(x_n)^\alpha]^T,$$

且

$$o(x) = [o(x_1) \ o(x_2) \ \dots \ o(x_n)]^T,$$

$o(\cdot)$ 表示高阶无穷小量.

2.2 联合连通拓扑(Jointly-connected topologies)

实际应用中, 往往由于系统通信有限、外界环境存在干扰等因素导致通信拓扑时变且不连通, 下面是对联合连通的定义^[12].

定义 1 设拓扑图 G_1, G_2, \dots, G_m 具有相同的顶点集 V ; 并集记为 G_{1-m} , 它的节点集是 V , 边集是所有图 G_1, G_2, \dots, G_m 的并集, 它的第 i 个节点和第 j 个节点间的链接权重是图 G_1, G_2, \dots, G_m 第 i 个节点和第 j 个节点间所有的链接权重之和. 称 G_1, G_2, \dots, G_m 为联合连通, 如果它们的联合图 G_{1-m} 是连通的.

$G_{\sigma(t)}$ 表示切换时刻 t 智能体的通信拓扑图, $L_{\sigma(t)}$ 表示相应的拉普拉斯矩阵, 函数 $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, M\}$ 是一个分段切换常函数, M 表示所有切换通信拓扑图的总数.

考虑一组非零、不重叠、无限严格递增的时间区间 $[t_r, t_{r+1})$, $r = 0, 1, 2, \dots$ 且 $t_{r+1} - t_r \leq T_1$, 其中 $T_1 > 0$. 在时间区间 $[t_r, t_{r+1})$ 中存在有限个时间子区间 $[t_{r,j}, t_{r,(j+1)})$, $j = 0, 1, \dots, M_r - 1$, 其中: $t_{r,0} = t_r$, $t_{r,M_r} = t_{r+1}$, 且满足 $t_{r,(j+1)} - t_{r,j} \geq T_2$.

假设 1 由智能体组成的通信拓扑图的集合在每个时间区间 $[t_r, t_{r+1})$ ($r = 0, 1, 2, \dots$)内是联合连通的.

定理 1^[15] 若系统(1)具有齐次度 $\kappa < 0$, 且为全局渐近稳定的, 则该系统全局有限时间稳定.

3 联合连通拓扑下的有限时间一致性算法 (Finite-time consensus algorithms under jointly-connected topologies)

对于无leader的多智能体系统来说, 智能体 i 的控制器 u_i 只依赖于本身的状态变量和自身邻域内智能体之间的状态相对误差.

在一个多智能体系统中, 如果对于任意的 $i \neq j$, 当 $t \rightarrow T_0$ 时, 有 $\|x_i - x_j\| \rightarrow 0$, $\|v_i(t) - v_j(t)\| \rightarrow 0$. 则系统的最终状态可以在有限时间内趋于一致.

为求解上述有限时间一致性问题, 考虑如下一致性协议:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t) \varphi_1(\text{sig}(x_j - x_i)^{\alpha_1}) + \\ &\quad \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t) \varphi_2(\text{sig}(v_j - v_i)^{\alpha_2}), \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示第 i 个智能体在 t 时刻的位置, $v_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示速度, $u_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示控制输入, $a_{ij}(t)$ 表示智能体 i 与 j 在 t 时刻的连接权值, $N_i(t)$ 表示 t 时刻智能体 i 的邻域, φ_l 是一个连续的奇函数满足 $x\varphi_l(x) > 0$ ($\forall x \neq 0$), 对于常数 $c_l > 0$ ($l = 1, 2$), 在 $x = 0$ 附近有 $\varphi_l(x) = c_l x + o(x)$, $o(x)$ 为无穷小量, 系数 $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ 是正常数, 且有 $\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{1 + \alpha_1}$.

因为 $a_{ij} = a_{ji}$, 得到 $\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \dot{v}_i = \mathbf{0}$, 表示 $u_i \equiv$

0, 且 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$ 是不变量.

由以上定义变量

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k, \\ \tilde{x}_i &= x_i - \bar{x}, \quad \tilde{v}_i = v_i - \bar{v}, \end{aligned}$$

那么

$$\tilde{x}_i - \tilde{x}_j = x_i - x_j, \quad \tilde{v}_i - \tilde{v}_j = v_i - v_j,$$

且有 $\sum_{k=1}^n \tilde{x}_k = 0, \sum_{k=1}^n \tilde{v}_k = 0$.

由一致性协议(2), 系统方程可写为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i &= \tilde{v}_i, \\ \dot{\tilde{v}}_i &= \dot{v}_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \dot{v}_k = \\ &\sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t) \varphi_1(\text{sig}(\tilde{x}_j - \tilde{x}_i)^{\alpha_1}) + \\ &\sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t) \varphi_2(\text{sig}(\tilde{v}_j - \tilde{v}_i)^{\alpha_2}). \end{aligned} \quad (3)$$

定义 $Y = [\tilde{x}^T \ \tilde{v}^T]^T$, 其中:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= [\tilde{x}_1^T \ \tilde{x}_2^T \ \cdots \ \tilde{x}_n^T]^T, \quad \tilde{v} = [\tilde{v}_1^T \ \tilde{v}_2^T \ \cdots \ \tilde{v}_n^T]^T, \\ \chi &= [\chi_1^T \ \chi_2^T \ \cdots \ \chi_n^T]^T, \\ \chi_i &= \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t) [\varphi_1(\text{sig}(\tilde{x}_j - \tilde{x}_i)^{\alpha_1}) + \\ &\quad \varphi_2(\text{sig}(\tilde{v}_j - \tilde{v}_i)^{\alpha_2})], \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

则系统(3)可写为如下闭环系统:

$$\dot{Y} = (A \otimes I_n \otimes I_m)Y + ([0 \ 1]^T \otimes I_n \otimes I_m)\chi, \quad (4)$$

初始条件为 $Y(s) = Y(0), s \in (-\infty, 0]$.

拓扑图 G_σ 是无向图, 即 $a_{ij} = a_{ji}$, 则可得 $\mathbf{1}_{2n}^T \otimes I_m \tilde{x} = \mathbf{0}, \mathbf{1}_{2n}^T \otimes I_m \tilde{v} = \mathbf{0}$. 对于闭环系统(4), 可以得到

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}_{2n}^T \otimes I_m [(A \otimes I_n \otimes I_m)Y + \\ &([0 \ 1]^T \otimes I_n \otimes I_m)\chi] = \\ &\mathbf{1}_{2n}^T \otimes I_m ((A \otimes I_n \otimes I_m)Y) = \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{1}_{2n}^T \otimes I_m \dot{Y} = \sum_{i=1}^n (\dot{\tilde{x}}_i + \dot{\tilde{v}}_i) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

因此可以得到 $\sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i + \tilde{v}_i)$ 是一个不变常矢量, 且有

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i + \tilde{v}_i) = \mathbf{0}.$$

令 $\eta = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i + \tilde{v}_i)$, 则有 $\eta = \mathbf{0}$. 定义误差为

$\delta(t) = Y(t) - \mathbf{1}_{2n} \otimes \eta$, 那么系统(4)可转换为

$$\dot{\delta} = (A \otimes I_n \otimes I_m)\delta + ([0 \ 1]^T \otimes I_n \otimes I_m)\chi_\delta, \quad (5)$$

初始条件为 $\delta(s) = \delta(0), s \in (-\infty, 0]$.

显然可知 $\sum_{i=1}^{2n} \delta_i = \mathbf{0}$. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta\| = 0$, 也就是 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_i\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{v}_i\| = \|\eta\| = 0$, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k\| = 0.$$

由式(2)可知 $\sum_{i=1}^n \dot{v}_i = \mathbf{0}$, 则对系统(1), 可得到 $v_i =$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k(0), \quad \forall i \in V, \text{ 且有 } x_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k(0) + v_k(0)t),$$

则系统可达到一致.

由假设1, 时间区间 $[t_r, t_{r+1}) (r = 0, 1, 2, \dots)$ 内拓扑的并集是连通的, 且每个时间区间内有有限个不重叠的时间子区间 $[t_{r,j}, t_{r,(j+1)})$, $j = 0, 1, \dots, M_r - 1$, 通信拓扑在 $[t_{r,j}, t_{r,(j+1)})$ 内保持不变. 假设时不变通信拓扑 G_σ 在时间子区间 $[t_{r,j}, t_{r,(j+1)})$ 内有 $m_\sigma \geq 1$ 连通分支, 相应的节点集表示为 $\phi_{r,j}^1, \phi_{r,j}^2, \dots, \phi_{r,j}^{m_\sigma}$, 每个节点集 $\phi_{r,j}^i$ 有 d_σ^i 个节点, $i = 1, 2, \dots, m_\sigma$.

根据 L_σ 的定义, 存在一个正交矩阵 $E_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$E_\sigma^T L_\sigma E_\sigma = \text{diag}\{L_\sigma^1, L_\sigma^2, \dots, L_\sigma^{m_\sigma}\}, \quad (6)$$

$$E_\sigma^T I_n E_\sigma = \text{diag}\{I_{d_\sigma^1}, I_{d_\sigma^2}, \dots, I_{d_\sigma^{m_\sigma}}\}, \quad (7)$$

$$\tilde{x}^T (E_\sigma \otimes I_m) = [\tilde{x}_\sigma^{1T} \ \tilde{x}_\sigma^{2T} \ \cdots \ \tilde{x}_\sigma^{m_\sigma T}], \quad (8)$$

$$\tilde{v}^T (E_\sigma \otimes I_m) = [\tilde{v}_\sigma^{1T} \ \tilde{v}_\sigma^{2T} \ \cdots \ \tilde{v}_\sigma^{m_\sigma T}], \quad (9)$$

$$\delta^T (E_\sigma \otimes I_2 \otimes I_m) = [\delta_\sigma^{1T} \ \delta_\sigma^{2T} \ \cdots \ \delta_\sigma^{m_\sigma T}], \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\sigma^i &= [\tilde{x}_{\sigma 1}^i \ \cdots \ \tilde{x}_{\sigma d_\sigma^i}^i]^T, \quad \tilde{v}_\sigma^i = [\tilde{v}_{\sigma 1}^i \ \cdots \ \tilde{v}_{\sigma d_\sigma^i}^i]^T, \\ \chi_\sigma^i &= [\chi_{\sigma 1}^i \ \cdots \ \chi_{\sigma d_\sigma^i}^i]^T, \quad \delta_\sigma^i = [\delta_{\sigma 1}^i \ \cdots \ \delta_{\sigma 2d_\sigma^i}^i]^T, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \chi_{\sigma k}^i &= \sum_{j=1}^{d_\sigma^i} a_{kj}(t) [\varphi_1(\text{sig}(\tilde{x}_{\sigma j}^i - \tilde{x}_{\sigma k}^i)^{\alpha_1}) + \\ &\quad \varphi_2(\text{sig}(\tilde{v}_{\sigma j}^i - \tilde{v}_{\sigma k}^i)^{\alpha_2})]. \end{aligned}$$

则系统(5)可写为如下闭环系统:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_\sigma^i &= (A \otimes I_{d_\sigma^i} \otimes I_m)\delta_\sigma^i + ([0 \ 1]^T \otimes I_{d_\sigma^i} \otimes I_m)\chi_\sigma^i, \\ &i = 1, 2, \dots, m_\sigma. \end{aligned} \quad (11)$$

定理 2 考虑无leader的二阶多智能体系统(1), 系统的通信拓扑是时刻切换的. 若假设1成立, 则系统在协议(2)下能够达到一致. 系数 $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ 是正常数, 且 $\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{1 + \alpha_1}$, φ_l 为连续的奇函数, 满足 $x\varphi_l(x) > 0 (\forall x \neq 0)$, 在 $x = 0$ 周围有 $\varphi_l(x) = c_l x + o(x)$, 系数 $c_l > 0 (l = 1, 2)$ 为常数, $o(x)$ 为无穷小量.

证 此证明可分为两步. 第1步: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\|x_i - x_j\| \rightarrow 0, \|v_i - v_j\| \rightarrow 0 (\forall i \in V)$. 第2步: 在有限时间内, 能够使得 $\|x_i - x_j\| \rightarrow 0, \|v_i - v_j\| \rightarrow 0, \forall i \in V$.

步骤 1 证明当时间 $t \rightarrow \infty$ 时, $\|x_i - x_j\| \rightarrow 0$, $\|v_i - v_j\| \rightarrow 0 (\forall i \in V)$.

构造Lyapunov函数

$$V(t, \delta) = \frac{1}{2} \delta^T \delta,$$

可证明 $V(t, \delta)$ 是平滑、正定函数. 由式(10)可得

$$V(t, \delta) = \sum_{i=1}^{m_\sigma} \frac{1}{2} \delta_\sigma^{iT} \delta_\sigma^i.$$

计算 $V(t, \delta)$ 沿闭环系统时间导数:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \delta) &= \sum_{i=1}^{m_\sigma} \delta_\sigma^{iT} \dot{\delta}_\sigma^i = \\ &\sum_{i=1}^{m_\sigma} [\delta_\sigma^{iT} (A \otimes I_{d_\sigma^i} \otimes I_m) \delta_\sigma^i] + \\ &\sum_{i=1}^{m_\sigma} [\delta_\sigma^{iT} ([0 \ 1]^T \otimes I_{d_\sigma^i} \otimes I_m) \chi_\sigma^i]. \end{aligned}$$

等式右边第1项为 $1_m^T \sum_{k=1}^{d_\sigma^i} \tilde{x}_{\sigma k} \tilde{v}_{\sigma k} \leq 0$. 等式右边第2项等于

$$\begin{aligned} \delta_\sigma^{iT} ([0 \ 1]^T \otimes I_{d_\sigma^i} \otimes I_m) \chi_\sigma^i &= 1_m^T \sum_{k=1}^{d_\sigma^i} \tilde{v}_{\sigma k}^i \chi_\sigma^i = \\ &-\frac{1}{2} 1_m^T \sum_{k=1}^{d_\sigma^i} \sum_{j=1}^{d_\sigma^i} a_{kj}(t) (\tilde{v}_{\sigma j}^i - \\ &\tilde{v}_{\sigma k}^i) \varphi_1(\text{sig}(\tilde{x}_{\sigma j}^i - \tilde{x}_{\sigma k}^i)^{\alpha_1}) - \frac{1}{2} 1_m^T \sum_{k=1}^{d_\sigma^i} \sum_{j=1}^{d_\sigma^i} a_{kj}(t) (\tilde{v}_{\sigma j}^i - \\ &\tilde{v}_{\sigma k}^i) \varphi_1(\text{sig}(\tilde{v}_{\sigma j}^i - \tilde{v}_{\sigma k}^i)^{\alpha_2}) \leq 0, \end{aligned}$$

因此, 函数 $\dot{V} \leq 0$, 表示了系统(5)是稳定的. 当且仅当 $\tilde{x}_{\sigma j}^i = \tilde{x}_{\sigma k}^i = \mathbf{0}$, $\tilde{v}_{\sigma j}^i = \tilde{v}_{\sigma k}^i = \mathbf{0}$, 即

$$\begin{aligned} x_{\sigma j}^i &= x_{\sigma k}^i = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (x_p(0) + v_p(0)t), \\ v_{\sigma j}^i &= v_{\sigma k}^i = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n v_p(0) \end{aligned}$$

时 $\dot{V} = 0$. 因为每个连通分支的拓扑图 G_σ^i 在时间子区间 $[t_{rj}, t_{r(j+1)})$ 是连通且是无向的, 且有 \dot{V} 是负定的, 由LaSalle不变原理, 可以得到系统达到一致, 即: 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \|x_{\sigma j}^i - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (x_p(0) + v_p(0)t)\| &\rightarrow 0, \\ \|v_{\sigma j}^i - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n v_p(0)\| &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

步骤 2 证明在有限时间内, $\|x_i - x_j\| \rightarrow 0$, $\|v_i - v_j\| \rightarrow 0 (\forall i \in V)$.

由同次性定理只需证明系统(3)关于 $(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{mn}, \underbrace{\alpha_1+1, \alpha_1+1, \dots, \alpha_1+1}_{mn})$ 具有齐次度 $\kappa = \alpha_1 - 1 < 0$.

令

$$\begin{aligned} \psi(t) &= (\tilde{x}_1^T, \tilde{x}_2^T, \dots, \tilde{x}_n^T, \tilde{v}_1^T, \tilde{v}_2^T, \dots, \tilde{v}_n^T)^T = \\ &(\psi_1^T(t), \dots, \psi_n^T(t), \psi_{n+1}^T(t), \dots, \psi_{2n}^T(t))^T = \\ &(\psi_{11}(t), \dots, \psi_{1m}(t), \dots, \psi_{n1}(t), \dots, \psi_{nm}(t), \\ &\psi_{(n+1)1}(t), \dots, \psi_{(n+1)m}(t), \dots, \\ &\psi_{(2n)1}(t) \dots, \psi_{(2n)m}(t))^T \end{aligned}$$

在每个时间子区间拓扑是不变的, 并且奇函数 $\varphi_l(x)$ 满足 $\varphi_l(x) = c_l x + o(x) (l = 1, 2)$, 那么系统(3)可以写为

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{ik}(t) &= \psi_{(n+i)k} = f_{ik}(\psi) = \tilde{f}_{ik}(\psi) + \bar{f}_{ik}(\psi), \\ \dot{\psi}_{(n+i)k}(t) &= f_{(n+i)k}(\psi) = \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) c_1 \text{sig}(\psi_{jk} - \psi_{ik})^{\alpha_1} + \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) c_2 \text{sig}(\psi_{(n+j)k} - \psi_{(n+i)k})^{\alpha_2} + \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) o(\text{sig}(\psi_{jk} - \psi_{ik})^{\alpha_1}) + \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) o(\text{sig}(\psi_{(n+j)k} - \psi_{(n+i)k})^{\alpha_2}) = \\ &\tilde{f}_{(n+i)k}(\psi) + \bar{f}_{(n+i)k}(\psi), \quad \forall i, j \in V, k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

其中: $\tilde{f}_{ik}(\psi) = \psi_{(n+i)k}$, $\bar{f}_{ik}(\psi) = 0$ 且有

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{(n+i)k}(\psi) &= \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) [c_1 \text{sig}(\psi_{jk} - \psi_{ik})^{\alpha_1}] + \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) [c_2 \text{sig}(\psi_{(n+j)k} - \psi_{(n+i)k})^{\alpha_2}], \\ \bar{f}_{(n+i)k}(\psi) &= \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) o(\text{sig}(\psi_{jk} - \psi_{ik})^{\alpha_1}) + \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) o(\text{sig}(\psi_{(n+j)k} - \psi_{(n+i)k})^{\alpha_2}). \end{aligned}$$

当

$$\begin{aligned} r_{11} &= \dots = r_{1m} = \dots = r_{n1} = \dots = r_{nm} = R_1, \\ r_{(n+1)1} &= \dots = r_{(n+1)m} = \dots = \\ r_{(2n)1} &= \dots = R_{(2n)m} = R_2, \\ R_2 &= R_1 + \kappa, \end{aligned}$$

且有 $R_1 \alpha_1 = R_2 \alpha_2 = R_2 + \kappa$, 则存在

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{ik}(\psi) &= \psi_{(n+i)k} = \dot{\psi}_{ij}, \\ \tilde{f}_{ik}(\varepsilon^{r_{1k}} \psi_{1k}, \dots, \varepsilon^{r_{nk}} \psi_{nk}, \varepsilon^{r_{(n+1)k}} \psi_{(n+1)k}, \dots, \\ \varepsilon^{r_{(2n)k}} \psi_{(2n)k}) &= \\ \dot{\psi}_{ik}(\varepsilon^{r_{1k}} \psi_{1k}, \dots, \varepsilon^{r_{(n+1)k}} \psi_{(n+1)k}, \dots, \\ \varepsilon^{r_{(2n)k}} \psi_{(2n)k}) &= \varepsilon^{r_{(n+i)k}} \dot{\psi}_{(n+i)k} = \\ \varepsilon^{R_2} \dot{\psi}_{(n+i)k} &= \varepsilon^{\kappa+R_1} \tilde{f}_{ik}(\psi) = \\ \varepsilon^{\kappa+r_{ik}} \tilde{f}_{ik}(\psi), \quad \forall i \in V, k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

另外

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_{(n+i)k}(\varepsilon^{r_1 k} \psi_{1k}, \varepsilon^{r_{(n+1)k}} \psi_{(n+1)k}, \dots, \\ & \varepsilon^{r_{(2n)k}} \psi_{(2n)k}) = \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) [c_1(\text{sig}(\varepsilon^{r_{jk}} \psi_{jk} - \varepsilon^{r_{ik}} \psi_{ik})^{\alpha_1} + \\ & c_2(\text{sig}(\varepsilon^{r_{(n+j)k}} \psi_{(n+j)k} - \varepsilon^{r_{(n+i)k}} \psi_{(n+i)k})^{\alpha_2})] = \\ & \varepsilon^{R_1 \alpha_1} [\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) [c_1(\text{sig}(\psi_{jk} - \psi_{ik})^{\alpha_1})] + \\ & c_2(\text{sig}(\psi_{(n+j)k} - \psi_{(n+i)k})^{\alpha_2})] = \\ & \varepsilon^{R_2 + \kappa} \tilde{f}_{(n+i)k}(\psi) = \varepsilon^{r_{(n+i)k} + \kappa} \tilde{f}_{(n+i)k}(\psi), \\ & \forall i, j \in V, k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}_{n+i}(\varepsilon^{r_1} \psi_1, \dots, \varepsilon^{r_n} \psi_n, \varepsilon^{r_{n+1}} \psi_{n+1}, \dots, \varepsilon^{r_{2n}} \psi_{2n})}{\varepsilon^{r_{n+i} + \kappa}} = 0.$$

证明了系统(3)是关于度 $\kappa = \alpha_1 - 1 < 0$ 局部同次的. 因此, 可得到不变流形

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k(0) + v_k(0)t), \\ v_i &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k(0), \end{aligned}$$

$\forall i \in V$ 为系统(3)的Lyapunov稳定性.

由上面的讨论, 系统(3)是全局渐近稳定且关于度 $\kappa < 0$ 是局部同次的. 由定理 1 可得, 系统在有限时间内趋于稳定, 即在有限时间内,

$$\begin{aligned} \|x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k(0) + v_k(0)t)\| &\rightarrow 0, \\ \|v_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k(0)\| &\rightarrow 0 (\forall i \in V). \end{aligned}$$

证毕.

4 仿真算例(Simulation example)

本节将通过一些仿真算例来证明所提出的有限时间一致性协议的有效性.

考虑多智能体系统是由6个作为节点的智能体组成, 且每次通信拓扑进行切换时, 每个智能体最多与2个智能体进行通信, 切换周期时间为 $T_1 = 0.8$, 每次切换时间为 $T_2 = 0.1$. 由上面的证明, 可知当 $m = 1$ 时, 可得到同样的结果. 因此, 考虑 $m = 1$ 时的仿真结果. 假设智能体的初始状态分别为

$$\begin{aligned} x(0) &= (-2.5, -1.5, 0, 2.5, 3, 1.5)^T, \\ v(0) &= (-0.2, -0.1, 0, 0.3, 0.4, 0.2)^T. \end{aligned}$$

图1表示的是6个智能体在8个不同的拓扑图之间按顺序依次进行切换. 由图1可知每个拓扑图都是不连通的, 但拓扑图的并集即 G_{1-4} 和 G_{5-8} 是连通的.

$\tilde{f}(\psi)$ 关于 $(\underbrace{R_1, R_1, \dots, R_1}_{mn}, \underbrace{R_2, R_2, \dots, R_2}_{mn})$ 具有同次度 κ , 其中: $\kappa = \frac{1}{2}(\alpha_1 - 1)R_1, R_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 1)R_1$. 当 $R_1 = 2, 0 < \alpha_1 < 1, \alpha_2 = 2\alpha_1/(\alpha_1 + 1)$, 可得到 $\kappa = \alpha_1 - 1 < 0, R_2 = \alpha_1 + 1$.

综合以上分析, 可得到: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\|\tilde{x}_{\sigma k}^i\| \rightarrow 0, \|\tilde{v}_{\sigma k}^i\| \rightarrow 0 (\forall i \in V)$, 也就是当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\|\psi_i\| \rightarrow 0, \|\psi_{n+i}\| \rightarrow 0 (\forall i \in V)$. 对任意的 $\theta > 0$, 存在时间 $t_0 > 0$, 使得 $\|\psi_i(t)\| < \theta, \|\psi_{n+i}(t)\| < \theta (\forall i \in V)$. 由 $\theta > 0$ 的任意性, ψ_i 与 $\psi_{n+i} (\forall i \in V)$ 对所有的 $t \geq t_0$ 是有界的. 那么

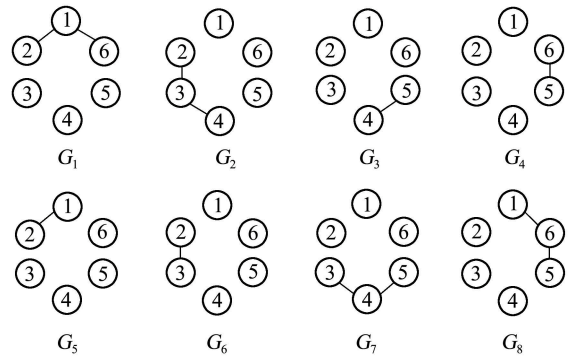


图 1 拓扑图

Fig. 1 Topology graph

图2-4表示了系统中6个智能体在不同的切换拓扑图中的位置状态与速度状态.

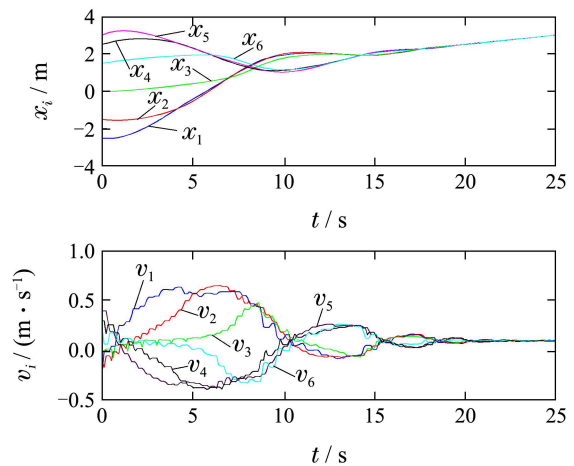


图 2 拓扑图 G_{1-4} 和 G_{5-8} 下智能体的状态和速度
Fig. 2 States and velocities of agents among topologies G_{1-4} and G_{5-8}

图2表示系统按照8个拓扑图的顺序依次进行切换, 从仿真结果可以看到, 系统的速度图最终达到一个稳定状态值, 且速度最终的稳定值是等于速度初始状态的平均值, 由上节分析位置与速度之间的

关系,说明了位置是与速度和时间相关的,且仿真结果也验证了理论的正确性.图3同样是表示了当联合拓扑图是连通时,6个智能体的状态能在有限时间内达到一致.图2和3表示了只要保证拓扑图是联合连通,系统就能够在有限时间内达到一致,且最终的稳定状态是相同的.图4表示了联合拓扑图不是连通时系统的位置与速度状态,由图可知,当联合图不是连通时,系统不能在有限时间内达到一致.

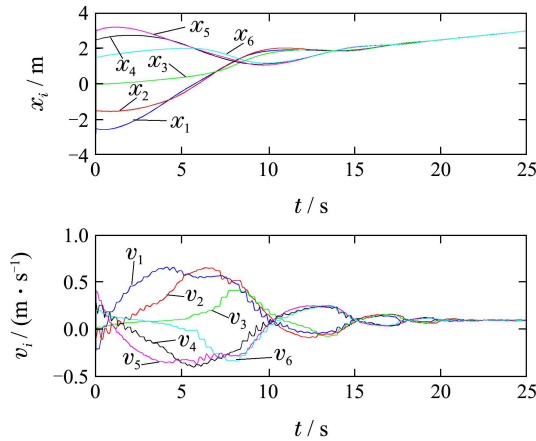


图3 拓扑图 G_2, G_3, G_5, G_8 下智能体的状态和速度
Fig. 3 States and velocities of agents among topologies G_2, G_3, G_5, G_8 .

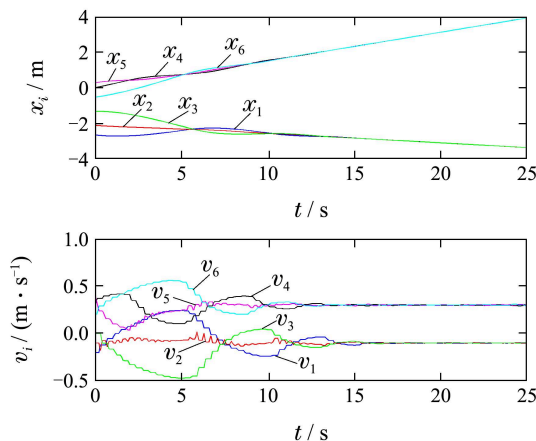


图4 拓扑图 G_3, G_4, G_5, G_6 下智能体的状态和速度
Fig. 4 States and velocities of agents among topologies G_3, G_4, G_5, G_6

由以上的仿真结果可知,当系统拓扑为联合连通时,所给出的一致性协议能够保证系统在有限时间内达到一致,同时也验证了系统最终达到稳定状态值是与状态初始值有关的.

5 结论(Conclusions)

本文研究了在联合连通条件下无领导者的二阶多智能体系统有限时间一致性问题,基于代数图论、LaSalle不变原理、Lyapunov稳定性理论和同次性证明了给出的一致性协议能够保证系统在有限时间内达到一致.并通过仿真,证明了理论结果的有效性.

参考文献(References):

- [1] CORTÉS J. Distributed algorithms for reaching consensus on general functions [J]. *Automatica*, 2008, 44(3): 726 – 737.
- [2] ZHENG Y F, CHEN W D. Robot team forming for crystallization of proteins [J]. *Autonomous Robots*, 2007, 23(1): 69 – 78.
- [3] SMITH R S, HADAEGH F Y. Control of deep-space formation-flying spacecraft: relative sensing and switched information [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2009, 28(1): 106 – 114.
- [4] DING S H, LI S H, LI Q. Stability analysis for a second-order continuous finite-time control system subject to a disturbance [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2009, 7(3): 271 – 176.
- [5] WANG X, HONG Y. Finite-time consensus for multi-agent networks with second-order agent dynamics [C] // *The 17th IFAC World Congress (IFAC'08)*. Seoul, Korea: [s.n.], 2008: 15185 – 15190.
- [6] 沈艳军, 刘万海, 张勇. 一类非线性系统全局有限时间观测器设计 [J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(5): 668 – 674.
(SHEN Yanjun, LIU Wanhai, ZHANG Yong. Global finite-time observers for a class of nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(5): 668 – 674.)
- [7] 李鹏, 郑志强, 马建军. 一类不确定非线性系统的全局鲁棒有限时间镇定 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(7): 915 – 920.
(LI Peng, ZHENG Zhiqiang, MA Jianjun. Global robust finite time stabilization of a class of nonlinear uncertain systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(7): 915 – 920.)
- [8] JIANG F, WANG L. Finite-time information consensus for multi-agent systems with fixed and switching topologies [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2009, 238(16): 1550 – 1560.
- [9] FRANCESCHELLI M, GIUA A, PISANO A, et al. Finite-time consensus for switching network topologies with disturbances [J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2013, 10: 83 – 93.
- [10] CAO Y, REN W. Finite-time consensus for second-order systems with unknown inherent nonlinear dynamics under an undirected switching graph [C] // *The 2012 American Control Conference Fairmont Queen Elizabeth*. Montréal, Canada: IEEE, 2012: 26 – 31.
- [11] LIN P, JIA Y. Multi-agent consensus with diverse time-delays and jointly-connected topologies [J]. *Automatica*, 2011, 47(4): 848 – 856.
- [12] LIN P, JIA Y. Consensus of a class of second-order multi-agent systems with time-delay and jointly-connected topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(3): 778 – 784.
- [13] SUN F, CHEN J, GUAN Z H, et al. Leader-following finite-time consensus for multi-agent systems with jointly-reachable leader [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, 13(5): 2271 – 2284.
- [14] 缪盛, 崔宝同, 朱夏冰. 基于时变时滞动态拓扑的二阶leader-following多智能体一致性分析 [J]. *计算机应用研究*, 2013, 30(4): 1024 – 1027.
(MIAO Sheng, CUI Baotong, ZHU Xiabing. Consensus of second order leader-following multi-agent systems with jointly-connected topologies and time-varying delays [J]. *Application Research of Computers*, 2013, 30(4): 1024 – 1027.)
- [15] 丁世宏, 李世华. 有限时间控制问题综述 [J]. *控制与决策*, 2011, 26(2): 161 – 169.
(DING Shihong, LI Shihua. A survey for finite-time control problems [J]. *Control & Decision*, 2011, 26(2): 161 – 169.)

作者简介:

王芳 (1987-), 女, 博士研究生, 目前研究方向为多智能体系统, E-mail: fangfang099@163.com;

陈鑫 (1976-), 男, 博士, 副教授, 博士生导师, 目前研究方向为多智能体系统、机器人学、过程控制和智能控制, E-mail: chenxin@mail.csu.edu.cn;

何勇 (1969-), 男, 第13届(2007年)《关肇直奖》获奖论文作者, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为时滞系统鲁棒控制、网络控制和过程控制, E-mail: heyong@csu.edu.cn;

吴敏 (1963-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为过程控制、鲁棒控制和智能系统, E-mail: min@csu.edu.cn.