

分布式非线性控制的回路小增益方法

刘腾飞^{1†}, 姜钟平^{1,2}

(1. 东北大学 流程工业综合自动化国家重点实验室, 辽宁 沈阳 110004; 2. 纽约大学 工学院, 美国 纽约 11201)

摘要: 近年来, 分布式控制在控制及相关学科引起了广泛的兴趣. 复杂的包含不确定性的非线性动力学在控制系统中普遍存在, 而针对这种系统的分布式控制研究尚处于起步阶段. 其中一个关键问题就是由分布式控制系统中信息交换约束与复杂非线性动力学的并存所导致的. 近期相关研究表明, 基于回路小增益定理的控制设计方法能够较有效地解决这类问题. 本文重点回顾分布式控制回路小增益方法的近期主要结果, 给出了一种分布式非线性控制器的系统化设计方法, 并在此基础上指出若干未来研究方向.

关键词: 分布式控制; 非线性动力学; 不确定性; 回路小增益定理

中图分类号: TP13 文献标识码: A

Cyclic-small-gain method for distributed nonlinear control

LIU Teng-fei^{1†}, JIANG Zhong-ping^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China; 2. Polytechnic School of Engineering, New York University, Brooklyn, NY 11201, USA)

Abstract: Distributed control has attracted considerable attention from control and other scientific communities. Complex nonlinear uncertain dynamics is ubiquitous in control systems, and the distributed control for this kind of systems has not been fully studied. One fundamental problem is caused by the coexistence of constraints on information exchange and complex nonlinear dynamics in distributed control systems. The cyclic-small-gain methods have recently shown to be a powerful tool for the design of distributed nonlinear controllers. This paper reviews the main results on the cyclic-small-gain methods for distributed control, and pinpoints several directions for future research.

Key words: distributed control; nonlinear dynamics; uncertainties; cyclic-small-gain theorem

1 引言(Introduction)

过去十多年中, 多自主体系统(multi-agent system)的分布式控制在控制领域受到了广泛关注. 在多自主体系统以及更一般的网络化系统中, 通讯约束和复杂动力学并存. 针对这些系统的控制问题, 分布式控制是较好的解决途径, 在实际中也得到了较广泛的应用.

对分布式控制的研究可以追溯到20世纪80年代研究分布式决策和并行计算时所提出的异步渐进一致性(asynchronous asymptotic agreement)问题^[1-3]. 近年来, 通过开发基于自适应梯度^[4]、代数图论^[5-9]、无源性^[10-11]、李雅普诺夫稳定性^[12-21], 以及输出调节^[22-24]等的新方法, 分布式控制理论高速发展, 其所考虑的问题愈来愈复杂.

分布式控制理论在实际中也已经得到了较广泛的应用. 以耦合振荡器的同步为例, 这类问题在物理学、生物学、神经科学等领域的研究中普遍存在^[25-26]. Kuramoto模型就是一种典型的振荡器. 最近的基于控制理论的结果给出了这类系统实现全局同

步的条件, 而且还考虑了更一般的存在变化时滞的情况^[27-29].

装备有传感和通讯装置的集群移动机器人能够实现未知环境的大范围分布式探测, 也是分布式控制的一个重要应用方向^[30]. 例如, 文献[4]使用自适应梯度方法控制水下自主机器人的移动从而实现大范围海洋探测. 在移动机器人的控制过程中, 机器人之间的通讯链路往往受环境和机器人之间距离的影响. 那么, 在控制过程中机器人之间的通讯拓扑结构可能随系统状态的变化而切换. 文献[31]研究了这类系统的能控性.

分布式编队控制的对象是多个运动的机器人或车辆, 其目的在于控制机器人的运动队形. 具体来说, 编队控制就是利用可测量的信息(例如, 机器人之间的相对位置)把各个运动中的机器人控制到特定的相对位置并使之保持队形. 这方面的研究具有广泛的商业和军事应用价值. 近期的主要结果请见文献[32-40]. 相对较早的工作^[32-33]均假设机器人之间的信息交换满

足树型结构, 这样可以避免结构中出现环路所导致的技术问题. 文献[34–37]放宽了对树形结构的假设, 但取而代之的是要求各个车辆的全局(绝对)位置信息是可以测量的. 文献[41]中所设计的摇摆控制器, 其能够将集群移动机器人控制到固定的相对位置, 既不需要假设树形结构也不需要全局位置信息. 在协同轨迹跟踪(coordinated path-following)问题中, 由于每个机器人都能够获取其期望运动轨迹, 往往也不需要全局位置信息^[38–40]. 最近, 文献[42]提出了基于非线性小增益定理的分布式编队控制设计, 其既不假设树形结构, 也不需要全局位置信息.

分布式控制的应用非常广泛, 本文仅列出以上3个方面. 对分布式控制在传感器网络信息融合、复杂网络等方向的应用感兴趣的读者请参考文献[43–48].

非线性动力学在工程系统中普遍存在. 但是, 大部分已有的分布式控制理论成果主要考虑的是线性系统. 非线性动力学和不确定性并存的情况更加难于处理. 针对这一重要的理论问题, 本文介绍一种分布式非线性控制的回路小增益方法, 其能够将非线性动力学、不确定性以及分布式控制系统固有的通信约束一并考虑, 给出了分布式非线性控制的系统化设计方法.

非线性多自主系统可以看作是一种耦合非线性系统. 基于非线性关联大系统的最新理论成果, 本文主要探讨非线性多自主系统的分布式控制问题. 耦合非线性系统的稳定性分析和控制设计在过去20年中引起了极大的关注. 小增益, 即回路增益小于一, 是确保耦合系统稳定性的一个重要途径. 小增益定理最初考虑的是线性(有限)增益的情况. 最初从输入–输出和李雅普诺夫理论两个角度开展了研究; 请见文献[49–50]. 基于非线性系统的一种输入–输出特性, 文献[51–52]给出了增益为非线性的小增益定理. 在一系列关于输入状态稳定性(input-to-state stability, ISS)^[53–55]和输入输出稳定性(input-to-output stability, IOS)^[56, 76]的杰出工作的基础上, 文献[56]给出了状态空间中的非线性小增益定理. 这一重要结果将初始状态和外部输入对系统的影响同时考虑进来, 并且在基础上开发了一套极其有效的控制设计工具. ISS小增益定理的李雅普诺夫函数描述请见文献[57]. 小增益定理还被进一步地拓展到更一般的非线性系统. 如文献[58]利用向量李雅普诺夫函数的思想给出了包含时滞的非线性系统的小增益定理. 作为一个强有力工具, ISS小增益定理已经广泛应用到非线性系统的分析和控制设计中^[59–60]. 多自主系统往往可以看作是由多个子系统相互关联而成的. 最近提出的回路小增益定理(cyclic-small-gain theorem)^[61]进一步拓宽了小增益定理的适用范围, 能够很好地处理包含多个子系统的关联复杂大系统的稳定性分析和控制设计问题. 文献[62]给出了回路小增益定理的一个李

雅普诺夫描述及针对关联大系统的李雅普诺夫函数的构造方法. 非线性小增益定理的最新成果请见文献[63, 77].

一致性(agreement)问题是近年来研究较多的一类具有代表性的协调控制目标. 许多其他的控制目标, 例如, 编队控制(formation control)、趋同(consensus)、同步(synchronization)、群集(swarm)等也可以转化为一致性问题来解决. 在以上工作的基础上, 本文围绕分布式控制设计实现一致性展开讨论, 重点介绍分布式非线性控制设计的小增益方法. 具体地说, 第2节介绍ISS和IOS的基本概念以及回路小增益定理的基本结果. 在第3节, 通过一个简单的编队控制的例子来讨论怎样将分布式协同控制问题转化为镇定问题以及使用小增益方法进行分布式控制设计的可行性. 第4节将给出一个有向图中的小增益结果. 在此基础上, 第5节将介绍针对一类非线性不确定系统的分布式控制设计结果. 通过新型分布式输出反馈控制设计, 可以将闭环多自主系统最终转化为回路小增益定理能够处理的关联大系统. 第6节将简要回顾基于小增益定理的分布式状态反馈控制和分布式编队控制的相关结果. 在第7节, 将给出结论并对小增益定理在未来分布式控制发展中的应用做出展望.

为文章完整性起见, 现给出文中所使用的一些基本定义和表示. 函数 $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是正定的, 如果 $\gamma(s) > 0$ 对所有 $s > 0$ 都成立并且 $\gamma(0) = 0$. $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是一个 \mathcal{K} 类函数(表示为 $\gamma \in \mathcal{K}$), 如果其连续、严格递增且 $\gamma(0) = 0$. $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是一个 \mathcal{K}_∞ 类函数(表示为 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$), 如果其是一个 \mathcal{K} 类函数并满足当 $s \rightarrow \infty$ 时 $\gamma(s) \rightarrow \infty$. 函数 $\beta: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是一个 \mathcal{KL} 函数(表示为 $\beta \in \mathcal{KL}$), 如果对任意固定的 $t \in \mathbb{R}_+$, $\beta(\cdot, t)$ 是一个 \mathcal{K} 类函数, 并且对任意 $s \in \mathbb{R}_+$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\beta(s, t)$ 递减且趋近于零. Id表示单位函数. 对于 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$, 不等式 $\gamma_1 \circ \gamma_2 < \text{Id}$ 表示 $\gamma_1(\gamma_2(s)) < s$ 对所有 $s > 0$ 都成立. 如果函数 f 在 x 处可导, 用 $\nabla f(x)$ 表示 f 在 x 处的梯度.

2 输入状态稳定性与回路小增益定理(Input-to-state stability and cyclic-small-gain theorem)

本节首先介绍输入状态稳定性(ISS)、输入输出稳定性 IOS)的基本概念. 在此基础上介绍回路小增益定理的基本结果.

考虑系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 是其状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 表示其输入, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个局部李普希茨的函数并满足 $f(0, 0) = 0$. 若把 u 看作时间的函数, 假设 u 是可测且局部本质有界的. (若 $\|u\|_{[0, t]}$ 对任意 $t \geq 0$ 都有限, 则称 u 是局

部本质有界的.) 用 $x(t, x_0, u)$ 或者简单地用 $x(t)$ 来表示系统(1)以 $x(0) = x_0$ 为初始状态、 u 为输入的解.

定义 1 系统(1)是输入状态稳定(ISS)的, 如果存在 $\beta \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}$ 使得对于任意初始状态 $x(0) = x_0$ 和任意可测的、局部本质有界的输入 u , 系统的解 $x(t)$ 对所有的 $t \geq 0$ 都满足

$$|x(t)| \leq \max\{\beta(|x_0|, t), \gamma(\|u\|_\infty)\}. \quad (2)$$

这里 γ 称为系统的ISS增益. 需要注意的是, 如果系统(1)输入恒为零, 即 $u \equiv 0$, 那么系统(1)就是在原点处全局渐进稳定的.

针对式(1)形式的系统, 文献[54]给出了ISS和ISS-李雅普诺夫函数存在性之间的等价性.

定理 1 系统(1)是ISS的, 当且仅当存在一个连续可导的函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ 满足:

1) 存在 $\underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in \mathcal{K}_\infty$ 使得

$$\underline{\alpha}(|x|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(|x|), \quad \forall x; \quad (3)$$

2) 存在一个 $\gamma \in \mathcal{K}$ 和一个连续且正定的 α 使得

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \gamma(|u|) \Rightarrow \\ \nabla V(x)f(x, u) &\leq -\alpha(V(x)), \quad \forall x, u. \end{aligned} \quad (4)$$

如果一个函数 V 满足条件(3)和(4), 那么称之为ISS-李雅普诺夫函数. 而对应的 γ 函数就称为基于李雅普诺夫的ISS增益. 在定理1的基础上, 构造李雅普诺夫函数是判定系统ISS特性的重要手段.

在分布式控制设计中, 如果控制目标是实现各个自主体的输出协同, 那么还需要考虑更一般的由IOS子系统构成的关联系统. 现在给出IOS的定义.

考虑系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (5)$$

$$y = h(x), \quad (6)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 是其状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是其输入, $y \in \mathbb{R}^l$ 是其输出, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ 都是局部李普希茨的函数. 假设 $f(0, 0) = 0$, $h(0) = 0$.

将式(2)左侧的状态 x 替换为输出 y 即是IOS的定义.

定义 2 系统(5)–(6)是输入输出稳定(IOS)的, 如果存在 $\beta \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}$ 使得对任意初始状态 $x(0) = x_0$, 任意可测的、局部本质有界的输入 u , 以及任意使系统的解 $x(t)$ 存在的 t 都有

$$|y(t)| \leq \max\{\beta(|x_0|, t), \gamma(\|u\|_\infty)\}, \quad (7)$$

这里 γ 称为系统(5)–(6)的IOS增益.

显而易见, ISS可以看做是IOS的特例. 由于篇幅限制, 仅给出一个针对IOS系统的回路小增益定理.

考虑如下形式的关联大系统:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, y_2, y_3, \dots, y_n, u_1) \quad (8)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2, y_1, y_3, \dots, y_n, u_2) \quad (9)$$

\vdots

$$\dot{x}_n = f_n(x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, u_n). \quad (10)$$

其各子系统的输出定义为

$$y_i = h_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

其中: $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ 是各个子系统的状态, $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ 是外部输入, $y_i \in \mathbb{R}^{l_i}$ 是输出, f_i, h_i 均为局部李普希茨的函数. $x = [x_1^T \dots x_n^T]^T$, $y = [y_1^T \dots y_n^T]^T$, $u = [u_1^T \dots u_n^T]^T$. 如果将 u 看做是时间的函数, 假设 u 是可测且局部本质有界的.

假设每个子系统(以 $y_j (j \neq i)$ 和 u_i 为输入、以 y_i 为输出)都是零偏差无界可观(unboundedness observable (UO) with zero-offset)的和IOS的. 具体地, 存在 $\alpha_i^O \in \mathcal{K}_\infty, \beta_i \in \mathcal{KL}, \gamma_{ij} \in \mathcal{K}, \gamma_i^u \in \mathcal{K}$ 使得

$$|x_i(t)| \leq \alpha_i^O(|x_i(0)| + \sum_{j \neq i} \|y_j\|_{[0,t]} + \|u_i\|_{[0,t]}), \quad (12)$$

$$|y_i(t)| \leq \max_{j \neq i} \{\beta_i(|x_i(0)|, t), \gamma_{ij}(\|y_j\|_{[0,t]}), \gamma_i^u(\|u_i\|_\infty)\} \quad (13)$$

对所有 $t \in [0, T_{\max})$ 都成立, 其中 $[0, T_{\max}) (0 < T_{\max} \leq \infty)$ 是使 $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ 向右有定义的最大区间.

这里, 式(12)给出的就是UO特性. UO的详细定义请见文献[56].

定理2给出了系统(8)–(10)的回路小增益定理.

定理 2 假设系统(8)–(11)的每个子系统均满足(12)–(13). 系统(8)–(11)是零偏差无界可观的和IOS的, 如果对系统中的任何一个简单环 $(i_1, i_2, \dots, i_r, i_1)$ 都有

$$\gamma_{i_1 i_2} \circ \gamma_{i_2 i_3} \circ \dots \circ \gamma_{i_r i_1} < \text{Id}, \quad (14)$$

其中: $r = 2, \dots, N, 1 \leq i_j \leq N$, 并且若 $j \neq j'$, 则 $i_j \neq i_{j'}$.

条件(14)可解释为沿系统连接拓扑中任意一个简单环的增益的复合函数均严格小于单位函数. 称此条件为回路小增益条件.

值得一提的是, 回路小增益条件对包含时滞的系统仍然有效. 详见文献[63–64]. 这个结果对受时滞影响的分布式控制设计具有实际意义. 由于篇幅限制, 在此不再赘述.

3 协调控制问题与镇定问题(Coordinated control problem and stabilization problem)

分布式控制设计的小增益方法的基本思想是将协调控制问题转化为关联大系统的镇定问题, 并使用小增益定理来保证闭环系统的稳定性. 本部分采用车辆

编队控制的例子来说明分布式控制问题是怎样转化为镇定问题的, 并给出基于小增益定理的解决方案.

考虑如图1所示的一个由 $N + 1$ 个车辆组成的多车系统(multi-vehicle system). 每个车辆的运动学特性均由一个积分器描述:

$$\dot{x}_i = v_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (15)$$

其中: $x_i \in \mathbb{R}$ 是第 i 个车的位置, $v_i \in \mathbb{R}$ 是其速度. 标号为 0 的车是领队. 控制设计目标是通过调节各个车辆的速度 v_i 来控制各个车辆到领队的特定相对位置并保持队形. 具体来讲, 就是实现

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - x_j(t)) = d_{ij}, \quad i, j = 0, \dots, N, \quad (16)$$

其中常数 d_{ij} 表示车辆 i 和车辆 j 之间的期望相对位置. 显然, 在这个问题中, 对任意 $i, j, k = 0, \dots, N$, 必须满足 $d_{ij} = d_{ik} + d_{kj}$, 且对任意 $i, j = 0, \dots, N$, 必须满足 $d_{ij} = -d_{ji}$. 那么, 对任意 $i = 0, \dots, N$ 都有 $d_{ii} = 0$. 若把每个车辆看作是一个自主体, 那么这个多车系统就是一个多自主体系统.

需要指出的是, 此处考虑的是 $x_i, v_i \in \mathbb{R}$ 的情况. 以下讨论对更一般的 $x_i, v_i \in \mathbb{R}^n$ 的情况亦有效.

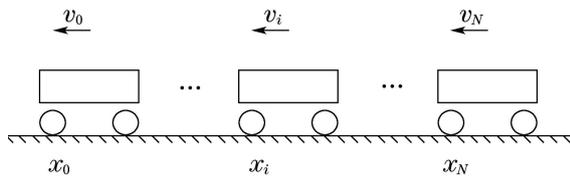


图 1 一个多车系统

Fig. 1 A multi-vehicle system

在实际中, 相对于各个车辆的绝对位置, 车辆之间的相对位置更易获取. 笔者期望使用车辆之间的相对位置而不是各个车辆的绝对位置来实现编队控制. 为了更清晰地表示各个车辆所使用的相对位置信息, 引入信息交换图的概念. 信息交换图 \mathcal{G} 是一个有向图, 它具有 $N + 1$ 个节点(分别对应于 $N + 1$ 个车辆). 如果车辆 i 使用同车辆 j 之间的相对位置信息, 即 $(x_i - x_j)$, 那么在信息交换图中就有一个从节点 j 到节点 i 的有向连接并且车辆 j 就称为车辆 i 的邻居. 用 $\mathcal{N}_i \subseteq \{0, \dots, N\}$ 来表示车辆 i 的所有邻居的标号的集合. 在这个例子中, 考虑一个特殊情形: 除领队外, 每个车辆仅使用其跟紧邻的车辆的相对位置信息, 即对 $i = 1, \dots, N - 1$ 都有 $\mathcal{N}_i = \{i - 1, i + 1\}$ 并且 $\mathcal{N}_N = \{N - 1\}$.

定义 $\tilde{x}_i = x_i - x_0 - d_{i0}$, $\tilde{v}_i = v_i - v_0$. 对 \tilde{x}_i 求导可得

$$\dot{\tilde{x}}_i = \tilde{v}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (17)$$

由 \tilde{x}_i 的定义可知 $\tilde{x}_i - \tilde{x}_j = x_i - x_j - d_{ij}$. 于是, 若能实现 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{x}_i - \tilde{x}_0) = 0$, 则即可达到控制目的. 需要

指出的是, 如果车辆 i 可获取 $(x_i - x_j)$ 的信息, 则便可使用 $(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)$ 来控制 \tilde{x}_i -子系统. 通过以上坐标变换, 将编队控制问题转化成了一致性问题. 众所周知, 对于这样的一致性问题, 如果信息交换图 \mathcal{G} 具有一个以节点 0 为根的扩展树, 那么如下形式的分布式控制律便能够实现控制目标:

$$\tilde{v}_i = k_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\tilde{x}_j - \tilde{x}_i), \quad (18)$$

其中 k_i 是一个正的常数.

在此基础上, 如果还要求速度 v_i 是有界的, 那么可以采用更一般形式的控制律

$$\tilde{v}_i = \varphi_i \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\tilde{x}_j - \tilde{x}_i) \right), \quad (19)$$

这里: $\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow [v_i, \bar{v}_i]$ 是一个连续、严格递增的函数且满足 $\varphi_i(0) = 0$, 其中 $v_i < 0 < \bar{v}_i$. 显然, 控制律(19)能够保证 $v_i \in [v_0 + v_i, v_0 + \bar{v}_i]$.

在控制律(19)的作用下, 每个受控的 \tilde{x}_i -子系统都可以表示为

$$\dot{\tilde{x}}_i = \varphi_i \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \tilde{x}_j - N_i \tilde{x}_i \right) := f_i(\tilde{x}), \quad (20)$$

其中: N_i 是集合 \mathcal{N}_i 的元素数, $\tilde{x} = [\tilde{x}_0 \dots \tilde{x}_N]^T$. 定义 $V_i(\tilde{x}_i) = |\tilde{x}_i|$ 为 \tilde{x}_i -子系统的候选 ISS-李雅普诺夫函数. 可以验证, 对任意 $\delta > 0$ 都存在一个连续、正定的函数 $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 使得

$$V_i(\tilde{x}_i) \geq \frac{1}{(1 - \delta_i) N_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} V_j(\tilde{x}_j) \Rightarrow \nabla V_i(\tilde{x}_i) f_i(\tilde{x}) \leq -\alpha_i(V_i(\tilde{x}_i)) \quad \text{a.e.}, \quad (21)$$

其中: 为方便表示, $V_0(\tilde{x}_0) = 0$. 这说明每个 \tilde{x}_i -子系统都是 ISS 的, 整个闭环系统就是一个包含多个 ISS 子系统的关联系统. 如果能保证这个关联系统在原点处全局渐进稳定, 那么编队控制目标就实现了.

使用有向图 \mathcal{G}_f 来表示闭环系统各个 \tilde{x}_i -子系统之间的关联关系. \mathcal{G}_f 的节点对应于车辆 $1, \dots, N$, 并且对任意 $i, j = 1, \dots, N (i \neq j)$, 当且仅当 \tilde{x}_j 是 \tilde{x}_i -子系统的输入时, \mathcal{G}_f 中存在有向连接 (j, i) . 使用 $\bar{\mathcal{N}}_i$ 来表示 \mathcal{G}_f 中节点 i 的所有邻居的标号的集合. 显然, $\bar{\mathcal{N}}_i = \mathcal{N}_i \setminus \{0\}$. 注意到 $V_0(\tilde{x}_0) = 0$. 那么, 式(21)中的 \mathcal{N}_i 可直接替换为 $\bar{\mathcal{N}}_i$. 图2给出了图1中多车系统的闭环控制系统的内部关联图. 与图2相对应, 对任意 $i = 2, \dots, N - 1, \bar{\mathcal{N}}_i = \{i - 1, i + 1\}$, 并且 $\bar{\mathcal{N}}_1 = \{2\}, \bar{\mathcal{N}}_N = \{N - 1\}$.



图 2 一个闭环系统关联图的例子

Fig. 2 The interconnection digraph of the closed-loop system

注意到任意满足 $\sum_{i=1}^n 1/a_i \leq n$ 的正常数 a_1, \dots, a_n 都能使 $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n (1/a_i) a_i d_i \leq n \max_{i=1, \dots, n} \{a_i d_i\}$ 对所有 $d_1, \dots, d_n \geq 0$ 都成立. 于是, 由式(21)可得

$$\begin{aligned} V_i(\tilde{x}_i) &\geq \frac{\bar{N}_i}{(1-\delta_i)N_i} \max_{j \in \bar{N}_i} \{a_{ij} V_j(\tilde{x}_j)\} \Rightarrow \\ \nabla V_i(\tilde{x}_i) f_i(\tilde{x}_i) &\leq -\alpha_i (V_i(\tilde{x}_i)), \end{aligned} \quad (22)$$

其中: \bar{N}_i 是集合 \bar{N}_i 的元素数, a_{ij} 是满足 $\sum_{j \in \bar{N}_i} 1/a_{ij} \leq \bar{N}_i$ 的正常数. 可以验证, 若 $0 \in \mathcal{N}_i$, 则 $N_i = \bar{N}_i + 1$; 若 $0 \notin \mathcal{N}_i$, 则 $N_i = \bar{N}_i$.

以上所考虑的闭环系统是一个由ISS子系统构成的关联系统. 如果给定 $a_{ij} > 0$, 可以使用回路小增益定理来直接判定闭环系统的稳定性. 但现在的问题是, 给定各个子系统之间的连接图 \mathcal{G}_f , 在什么情况下可以找到合适的参数 a_{ij} 来满足小增益条件?

4 有向图中的回路小增益方法(Cyclic-small-gain method in directed graphs)

考虑包含 N 个节点的有向图 \mathcal{G}_f . 对 $i = 1, \dots, N$ 定义 \bar{N}_i 使得如果存在由节点 j 到节点 i 的有向连接 (j, i) , 那么 $j \in \bar{N}_i$. 对每个有向连接 (j, i) 赋一个正的变量 a_{ij} . 对 \mathcal{G}_f 中的任意一个简单环 \mathcal{O} , 用 $A_{\mathcal{O}}$ 表示环上的所有连接的变量的乘积. 对 $i = 1, \dots, N$, 用 $\mathcal{C}(i)$ 来表示所有经过节点 i 的简单环的集合.

引理 1 如果有向图 \mathcal{G}_f 具有一个以节点 i_1^*, \dots, i_q^* 为根的扩展树 \mathcal{T}_f , 那么对任意 $\epsilon > 0$ 都存在 $a_{ij} > 0 (i = 1, \dots, N, j \in \bar{N}_i)$ 使得

$$\sum_{j \in \bar{N}_i} \frac{1}{a_{ij}} \leq \bar{N}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (23)$$

$$A_{\mathcal{O}} < 1 + \epsilon, \quad \mathcal{O} \in \mathcal{C}(i_1^*) \cup \dots \cup \mathcal{C}(i_q^*), \quad (24)$$

$$A_{\mathcal{O}} < 1, \quad \mathcal{O} \in \bigcup_{i=1, \dots, N} \mathcal{C}(i) \setminus (\mathcal{C}(i_1^*) \cup \dots \cup \mathcal{C}(i_q^*)), \quad (25)$$

其中, \bar{N}_i 是集合 \bar{N}_i 的元素数.

引理1的证明请见文献[65].

引理1给出了有向图 \mathcal{G}_f 的结构特性同性质式(23)和(24)之间的关系. 继续通过第3节中多车系统的例子来说明引理1在分布式控制设计中的应用.

定义 $\mathcal{L} = \{i \in \{1, \dots, N\} : 0 \in \mathcal{N}_i\}$. 注意到 N_i 同 \bar{N}_i 和 $\bar{N}_i \leq N$ 之间的关系, 以及多车系统各个子系统均满足(22). 利用小增益定理, 闭环系统在原点处是全局渐进稳定的, 如果

$$A_{\mathcal{O}} < \frac{(1-\bar{\delta})^N (N+1)}{N}, \quad \mathcal{O} \in \bigcup_{i \in \mathcal{L}} \mathcal{C}(i), \quad (26)$$

$$A_{\mathcal{O}} < (1-\bar{\delta})^N, \quad \mathcal{O} \in \bigcup_{i \in \{1, \dots, N\}} \mathcal{C}(i) \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{L}} \mathcal{C}(i), \quad (27)$$

其中 $\bar{\delta} = \max_{i=1, \dots, N} \{\delta_i\}$.

根据引理1, 如果有向图 \mathcal{G}_f 具有一个以 \mathcal{L} 中的元素为根的扩展树, 那么就能找到常数 $\bar{\delta} > 0$ 和满足 $\sum_{j \in \bar{N}_i} 1/a_{ij} \leq \bar{N}_i$ 的常数 $a_{ij} > 0$ 使得(26)和(27)成立. 图2所示的有向图满足如上条件.

5 分布式非线性控制设计(A distributed nonlinear control design)

本节针对一个具体的高阶系统来探讨分布式非线性控制设计的难点以及小增益设计方法的运用.

考虑一个多自主体系统, 其包括 N 个自主体, 且每个自主体的动力学均具有如下输出反馈形式^[66]:

$$\dot{x}_{ij} = x_{i(j+1)} + \Delta_{ij}(y_i, w_i), \quad 1 \leq j \leq n_i - 1, \quad (28)$$

$$\dot{x}_{in_i} = u_i + \Delta_{in_i}(y_i, w_i), \quad (29)$$

$$y_i = x_{i1}, \quad (30)$$

其中: $[x_{i1} \dots x_{in_i}]^T := x_i \in \mathbb{R}^{n_i} (x_{ij} \in \mathbb{R} (1 \leq j \leq n_i))$ 是状态, $u_i \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $y_i \in \mathbb{R}$ 是输出, $[x_{i2} \dots x_{in_i}]^T$ 是状态中不可测量的部分, $w_i \in \mathbb{R}^{n_{w_i}}$ 代表外部干扰, $\Delta_{ij} (1 \leq j \leq n_i)$ 都是未知的、局部李普希茨的函数.

本文的目标是控制各个自主体的输出 y_i 使之最终收敛到一个期望值 y_0 . 笔者称这个问题为输出一致性问题. 如果每个自主体都可获取 y_0 的值, 那么就可以为各个自主体分别设计控制器. 但是由于通讯约束的存在, 并非每个子系统都能获取 y_0 的值. 笔者期望通过分布式控制来实现各个自主体之间的协同从而实现输出一致的目的. 这里, 各个自主体内部的不确定非线性动力学也为控制设计带来了挑战.

使用有向图 \mathcal{G}^c 来表示各个自主体之间的信息交换拓扑. 有向图 \mathcal{G}^c 包含 N 个节点, 其分别对应于 N 个自主体. 如果自主体 i 的控制器能够获取 $y_i - y_k$ 的信息, 那么有向图 \mathcal{G}^c 中就有一个从节点 k 到节点 i 的有向连接, 并且自主体 k 就称为自主体 i 的一个邻居; 不然, 从节点 k 到节点 i 就没有有向连接. 用集合 $\mathcal{N}_i \subseteq \{1, \dots, N\}$ 来表示自主体 i 的所有邻居的标号的集合. 在如下讨论中, 任何一个自主体都不被看作是其本身的邻居, 故 $i \notin \mathcal{N}_i$. 用 $\mathcal{L} \subseteq \{1, \dots, N\}$ 来表示所有的能够获取 y_0 信息的自主体.

关于系统(28)–(30)的动力学和期望值 y_0 做如下假设.

假设 1 存在非空集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ 使得

1) $y_0 \in \Omega$;

2) 对每个 $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq n_i$,

$$|\Delta_{ij}(y_i, w_i) - \Delta_{ij}(z_i, 0)| \leq \psi_{\Delta_{ij}}(\|y_i - z_i \quad w_i^T\|^T).$$

(31)

对所有 $[y_i \ w_i^T]^T \in \mathbb{R}^{1+n_{w_i}}$ 、所有 $z_i \in \Omega$ 都成立, 其中 $\psi_{\Delta_{ij}} \in \mathcal{K}_\infty$ 在所有紧集上是李普希茨的.

在实际系统中, y_0 的界常常是事先知道的. 如果对每个 z_i 都存在一个 $\psi_{\Delta_{ij}}^{z_i} \in \mathcal{K}_\infty$ 其在所有紧集上李普希茨且

$$\begin{aligned} &|\Delta_{ij}(y_i, w_i) - \Delta_{ij}(z_i, 0)| = \\ &|\Delta_{ij}((y_i - z_i) + z_i, w_i) - \Delta_{ij}(z_i, 0)| \leq \\ &\psi_{\Delta_{ij}}^{z_i}(\|[y_i - z_i \ w_i^T]^T\|), \end{aligned} \quad (32)$$

那么, 就能保证假设 1 中的条件 2. 在这种情况下, 可将 $\psi_{\Delta_{ij}}$ 定义为 $\psi_{\Delta_{ij}}(s) = \sup_{z_i \in \Omega} \psi_{\Delta_{ij}}^{z_i}(s)$. 事实上, 如果 Δ_{ij} 是局部李普希茨的, 那么总存在一个在所有紧集上李普希茨的 $\psi_{\Delta_{ij}}^{z_i} \in \mathcal{K}_\infty$ 满足条件 (32).

另外, 假设外部干扰有界.

假设 2 对每个 $i = 1, \dots, N$ 都存在一个常数 $\bar{w}_i \geq 0$ 使得

$$|w_i(t)| \leq \bar{w}_i \quad (33)$$

对所有 $t \geq 0$ 都成立.

在满足以上假设的前提下, 本文的思路是设计基于观测器的分布式控制器将每个受控的自主体转化为 IOS 的子系统, 亦即将整个闭环系统转化为由 IOS 子系统构成的关联系统. 然后, 利用有向图中的回路小增益方法来校正控制参数使闭环系统 IOS. 如果外部干扰为零, 那么可以保证精确收敛.

为将分布式控制问题转化为镇定问题, 首先引入动态补偿器

$$\dot{u}_i = v_i, \quad (34)$$

并定义 $x'_{i1} = y_i - y_0$, $x'_{i(j+1)} = x_{i(j+1)} + \Delta_{ij}(y_0, 0)$ ($1 \leq j \leq n_i$). 那么, 每个自主体 (28)–(30) 就可转化为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}'_{ij} &= x'_{i(j+1)} + \Delta_{ij}(y_i, w_i) - \Delta_{ij}(y_0, 0), \\ 1 &\leq j \leq n_i + 1, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\dot{x}'_{in_i} = v_i + \Delta_{in_i}(y_i, w_i) - \Delta_{in_i}(y_0, 0), \quad (36)$$

$$y'_i = x'_{i1}, \quad (37)$$

其中: 输出跟踪误差 $y'_i = y_i - y_0$ 视作新的输出, v_i 为新的控制输入.

显然, 如果不存在干扰, 引入动态补偿器 (34) 并做变换之后原点便是系统 (35)–(37) 的一个平衡点. 这样, 如果能够在原点镇定变换后的各个自主体子系统, 就能够实现分布式控制目标.

5.1 分布式输出反馈控制器 (Distributed output-feedback controller)

定义

$$\begin{aligned} y_i^m &= \frac{1}{N_i + 1} \left(\sum_{k \in \mathcal{N}_i} (y_i - y_k) + (y_i - y_0) \right), \\ i &\in \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$y_i^m = \frac{1}{N_i} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} (y_i - y_k), \quad i \in \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{L}, \quad (39)$$

其中 N_i 是集合 \mathcal{N}_i 的元素数.

为方便讨论, 用 y'_i 表示 y_i^m :

$$y_i^m = y'_i - \mu_i, \quad (40)$$

其中:

$$\mu_i = \frac{1}{N_i + 1} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} y'_k, \quad i \in \mathcal{L}, \quad (41)$$

$$\mu_i = \frac{1}{N_i} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} y'_k, \quad i \in \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{L}. \quad (42)$$

显然, 对于自主体 i , y_i^m 只用到了可以获取的信息. 在以下控制设计中, 直接将 y_i^m 作为自主体 i 的反馈信号来进行控制器设计. 这里 μ_i 就代表了其他自主体的控制误差对自主体 i 的影响. 如果 $\mu_i = 0$, 那么就可以使用非常成熟的非线性输出反馈控制设计方法来处理.

考虑到系统 (35)–(37) 的输出反馈结构, 设计如下形式的观测器:

$$\dot{\xi}_{i1} = \xi_{i2} + L_{i2}\xi_{i1} + \rho_{i1}(\xi_{i1} - y_i^m), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{ij} &= \xi_{i(j+1)} + L_{i(j+1)}\xi_{i1} - L_{ij}(\xi_{i2} + L_{i2}\xi_{i1}), \\ 2 &\leq j \leq n_i, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\dot{\xi}_{i(n_i+1)} = v_i - L_{i(n_i+1)}(\xi_{i2} + L_{i2}\xi_{i1}), \quad (45)$$

其中: $\rho_{i1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个严格下降的奇函数, L_{i2}, \dots, L_{in_i} 都是正的常数. 在这个观测器中, ξ_{i1} 是 y'_i 的估计值, ξ_{ij} ($2 \leq j \leq n_i + 1$) 是 $x'_{ij} - L_{ij}y'_i$ 的估计值.

这里, 式 (43) 用 y_i^m 来估计 y'_i . 注意到 y_i^m 受到 y'_k ($k \in \mathcal{N}_i$) 也就是其他自主体的控制误差的影响 (请见式 (40)). 这就导致了各个自主体之间的关联. 如下所示, 式 (43) 中的非线性函数 ρ_{i1} 用来为观测误差系统配置一个合理的 (可能是非线性的) 增益并使整个闭环系统满足回路小增益条件. 为每个受控的自主体配置合理的增益是小增益控制设计的关键所在. 观测器中的式 (44)–(45) 是基于同文献 [67] 中观测器设计相似的思想. 稍稍不同的是, 这里使用 ξ_{i1} 而不是不可获取的 y'_i .

基于观测估计, 设计控制律

$$e_{i1} = \xi_{i1}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \xi_{ij} - \kappa_{i(j-1)}(e_{i(j-1)}), \\ 2 &\leq j \leq n_i + 1, \end{aligned} \quad (47)$$

$$v_i = \kappa_{i(n_i+1)}(e_{i(n_i+1)}), \quad (48)$$

其中 $\kappa_{i1}, \dots, \kappa_{i(n_i+1)}$ 都是连续可导、严格下降、径向无界的奇函数.

通过以上控制设计, 每个受控自主体系统包括变换后的自主体系统 (35)–(37) 和基于观测器的分布式控制器 (43)–(48). 图 3 所示是每个受控自主体的框图.

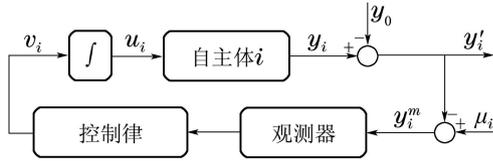


图3 受控自主体*i*的框图

Fig. 3 The block diagram of each controlled agent *i*

将 $Z_i = [x'_{i1} \cdots x'_{i(n_i+1)} \xi_{i1} \cdots \xi_{i(n_i+1)}]^T$ 看作是每个受控自主体的状态. 引理2给出了各个受控自主体的UO和IOS特性.

引理 2 由式(35)–(37)和(43)–(48)描述的每个受控自主体, 以 μ_i 为输入、 y'_i 为输出, 具有如下UO和IOS性质: 对任意初始状态 $Z_i(0) = Z_{i0}$ 和任意 μ_i, w_i ,

$$|Z_i(t)| \leq \alpha_i^{UO} (|Z_{i0}| + \|\mu_i\|_{[0,t]}), \quad (49)$$

$$|y'_i(t)| \leq \max\{\beta_i(|Z_{i0}|, t), \chi_i(\|\mu_i\|_{[0,t]}), \gamma_i(\|w_i\|_{[0,t]})\} \quad (50)$$

对所有 $t \geq 0$ 都成立, 其中: $\beta_i \in \mathcal{KL}, \chi_i, \gamma_i, \alpha_i \in \mathcal{K}_\infty$. 不仅如此, 通过控制设计, γ_i 可任意小, 并且给定任意常数 $b_i > 1, \chi_i(s) \leq b_i s$ 对所有 $s \geq 0$ 都成立.

5.2 回路小增益设计(Cyclic-small-gain synthesis)

以上分布式输出反馈设计将闭环多自主体系统转化为由IOS子系统构成的关联系统. 本小节给出基于有向图中回路小增益设计的主要结果.

定理 3 考虑多自主体系统(28)–(30)满足假设1–2. 如果 $\mathcal{L} \neq \emptyset$ 并且有向图 \mathcal{G}^c 具有一个以 \mathcal{L} 的元素为根的扩展树, 那么就可设计分布式观测器(43)–(45)、分布式控制律(34), 式(46)–(48)使得闭环多自主体系统中所有的信号均有界, 并且每个自主体的输出 y_i 均收敛到期望值 y_0 的任意小邻域内. 不仅如此, 若 $w_i = 0 (i = 1, \dots, N)$, 则所有 y_i 均渐进收敛到 y_0 .

证 注意到对任意满足 $\sum_{i=1}^n (1/a_i) \leq n$ 的常数 $a_1, \dots, a_n > 0$,

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} a_i d_i \leq n \max_{1 \leq i \leq n} \{a_i d_i\} \quad (51)$$

对所有 $d_1, \dots, d_n \geq 0$ 都成立.

由 μ_i 的定义(见式(41)–(42))可得

$$|\mu_i| \leq \delta_i \max_{k \in \mathcal{N}_i} \{a_{ik} |y'_k|\}, \quad (52)$$

其中

$$\delta_i = \begin{cases} \frac{N_i}{N_i + 1}, & i \in \mathcal{L}, \\ 1, & i \notin \mathcal{L}, \end{cases} \quad (53)$$

a_{ik} 是满足如下条件的正常数:

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{a_{ik}} \leq N_i. \quad (54)$$

由式(50)可得对任意初始状态 Z_{i0} 、任意 w_i ,

$$|y'_i(t)| \leq \max\{\beta_i(|Z_{i0}|, t), \gamma_i(\|w_i\|_{[0,t]}), b_i \delta_i \max_{k \in \mathcal{N}_i} \{a_{ik} \|y'_k\|_{[0,t]}\}\} \quad (55)$$

对所有 $t \geq 0$ 都成立.

对 $i \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{N}_i$, 分别为有向图 \mathcal{G}^c 中的有向连接 (k, i) 赋值 a_{ik} . 定义 \mathcal{C} 为 \mathcal{G}^c 中所有简单环的集合, 定义 $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ 为所有的经过 \mathcal{L} 所包括的节点的简单环, 定义 $A_{\mathcal{O}}$ 为简单环 $\mathcal{O} \in \mathcal{C}$ 上所有有向连接的值的乘积.

注意到 b_i 可设计的任意接近一. 根据回路小增益定理, 闭环多自主体系统(以 w_i 为输入、 y'_i 为输出)是UO且IOS的, 如果

$$A_{\mathcal{O}} \frac{N}{N+1} < 1, \quad \mathcal{O} \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \quad (56)$$

$$A_{\mathcal{O}} < 1, \quad \mathcal{O} \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \quad (57)$$

而条件(56)–(57)可由引理1保证.

由假设2可知, 外部干扰 w_i 有界. 由闭环系统的UO和IOS特性可知, 闭环系统中的信号有界. 根据引理2, 增益 γ_i 可设计得任意小, 从而可使 w_i 的影响任意小. 这样就能实现 y'_i 最终收敛到原点的任意小邻域. 等价地, y_i 可被控制到 y_0 的任意小邻域. 若 $w_i = 0 (i = 1, \dots, N)$, 所有输出 y_i 均渐进收敛到 y_0 .

5.3 对时滞的鲁棒性(Robustness with respect to time-delays)

如果各自主体之间的信息交换存在时滞, 那么就需要将式(38)–(39)定义的 y_i^m 修正为

$$y_i^m(t) = \frac{1}{N_i + 1} \left(\sum_{k \in \mathcal{N}_i} (y_i(t) - y_k(t - \tau_{ik}(t))) + (y_i(t) - y_0) \right), \quad i \in \mathcal{L}, \quad (58)$$

$$y_i^m(t) = \frac{1}{N_i} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} (y_i(t) - y_k(t - \tau_{ik}(t))), \quad i \in \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{L}, \quad (59)$$

其中 $\tau_{ik} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 表示信息交换中的非恒定时滞.

在这种情况下, $y_i^m(t)$ 仍然可写作 $y_i^m(t) = y'_i(t) - \mu_i(t)$ 的形式, 其中

$$\mu_i(t) = \frac{1}{N_i + 1} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} y'_k(t - \tau_{ik}(t)), \quad i \in \mathcal{L}, \quad (60)$$

$$\mu_i(t) = \frac{1}{N_i} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} y'_k(t - \tau_{ik}(t)), \quad i \in \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{L}. \quad (61)$$

假设存在一个 $\bar{\tau} \geq 0$ 使得对 $i = 1, \dots, N, k \in \mathcal{N}_i$ 都有 $0 \leq \tau_{ik}(t) \leq \bar{\tau}$. 将 μ_i 和 w_i 看做外部输入, 每个受控的自主体(包括式(35)–(37)(43)–(48))仍然是UO的. 此时, 式(55)应更改为

$$|y'_i(t)| \leq \max\{\beta_i(|Z_{i0}|, t), \gamma_i(\|w_i\|_{[0,\infty)}), b_i \delta_i \max_{k \in \mathcal{N}_i} \{a_{ik} \|y'_k\|_{[-\bar{\tau}, \infty)}\}\}. \quad (62)$$

通过以上讨论, 闭环多自主体系统被转化为由多个IOS子系统构成的包含时滞的关联系统. 对于这类系统, 回路小增益定理仍然有效. 在满足定理3的条件下, 利用有向图中的小增益结果仍然可以保证闭环多自主体系统的UO和IOS.

6 其他相关结果(Other related results)

在第5节, 笔者为一类输出反馈形式的非线性不确定系统设计了分布式输出反馈控制器, 有效解决了信息交换约束与复杂非线性动力学并存所导致的问题. 在此基础上, 本节介绍近期的相关结果.

6.1 状态反馈的情况(The case of state-feedback)

同样基于回路小增益设计, 通过推广第5节的输出反馈控制结果, 也可以处理具有更一般形式的非线性系统的分布式状态反馈问题. 文献[68]考虑了如下具有严格反馈形式的系统:

$$\dot{x}_{ij} = x_{i(j+1)} + \Delta_{ij}(\bar{x}_{ij}, w_i), \quad 1 \leq j \leq n_i, \quad (63)$$

$$x_{i(n_i+1)} \triangleq u_i, \quad (64)$$

$$y_i = x_{i1}, \quad (65)$$

其中: $[x_{i1} \cdots x_{in_i}]^T := x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ($x_{ij} \in \mathbb{R}$ ($1 \leq j \leq n_i$)) 是每个自主体的状态, $u_i \in \mathbb{R}$ 是其控制输入, $y_i \in \mathbb{R}$ 是其输出, $\bar{x}_{ij} = [x_{i1} \cdots x_{ij}]^T$, $w_i \in \mathbb{R}^{n_{w_i}}$ 是外部干扰, Δ_{ij} ($1 \leq j \leq n_i$) 是未知的、局部李普希茨的函数.

对于这样的系统, 文献[68]开发了一种用于迭代设计的工具. 这个工具考虑如下形式的一阶非线性系统的测量反馈控制:

$$\dot{\xi} = \nu + \phi(\xi, \omega), \quad (66)$$

其中: $\xi \in \mathbb{R}$ 是状态, $\nu \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $\omega \in \mathbb{R}^m$ 是外部输入, $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 是未知的、局部李普希茨的函数.

假设系统(66)状态 ξ 的测量值为 $\xi + \delta$ (δ 为测量误差). 笔者期望使用 $\xi + \delta$ 为系统(66)设计测量反馈控制器使闭环系统以 δ 和 ω 为输入是ISS的. 文献[68]给出了如下形式的动态控制器:

$$\dot{\eta} = \rho(\eta, \xi + \delta), \quad (67)$$

$$\nu = \varphi(\eta), \quad (68)$$

其中: ρ, φ 是合理选择的函数, η 是控制器的内部状态.

进一步地, 还可以证明闭环系统(以 ξ 为输出)是UO且IOS的. 定义 Z 为闭环系统的内部状态. 那么, 存在 $\alpha^{UO}, \gamma, \chi \in \mathcal{K}, \beta \in \mathcal{KL}$ 使得对任意初始状态 $Z(0) = Z_0$ 、任意 δ, ω 都有

$$|Z(t)| \leq \alpha^{UO}(|Z_0| + \|\delta\|_{[0,t]} + \|\omega\|_{[0,t]}), \quad (69)$$

$$|\xi(t)| \leq \max\{\beta(|Z_0|, t), \gamma(\|\delta\|_{[0,t]}), \chi(\|\omega\|_{[0,t]})\} \quad (70)$$

对所有 $t \geq 0$ 都成立. 并且, 增益 γ 可以设计得任意接

近Id, 增益 χ 可以设计得任意小.

需要指出的是, 这一工具是受文献[69]中迭代控制设计的启发. 不同之处在于, 此时将测量误差考虑进来. 在对每个自主体的控制设计中, 测量误差是由其他自主体的控制误差所导致的. 这一点, 在第5节已经阐述. 将图3中的观测器部分去除便是分布式状态反馈系统中各个受控自主体的框图. 需要注意的是, 本文采用的是动态状态反馈. 另外, 这一设计仍然对时滞鲁棒. 具体讨论请见文献[68].

6.2 编队控制(Formation control)

文献[42]使用小增益定理有效解决了在没有绝对位置信息的情况下多机器人的编队控制问题.

考虑 $N + 1$ 个移动机器人的编队控制问题. 对 $i = 0, 1, \dots, N$, 机器人 i 满足独轮车(unicycle)模型

$$\dot{x}_i = v_i \cos \theta_i, \quad (71)$$

$$\dot{y}_i = v_i \sin \theta_i, \quad (72)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i, \quad (73)$$

其中: $(x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2$ 表示机器人 i 质心的笛卡尔坐标, $v_i \in \mathbb{R}$ 是其线速度, $\theta_i \in \mathbb{R}$ 是其方向角, $\omega_i \in \mathbb{R}$ 是角速度.

标号为0的机器人是领队机器人, 其他机器人都是跟随机器人. 考虑 v_i 和 ω_i 为机器人 i 的控制输入. 控制目标是控制所有的跟随机器人使得 $(x_i(t), y_i(t))$ 收敛到 $(x_0(t) + d_{x_i}, y_0(t) + d_{y_i})$ 并且 $\theta_i(t)$ 收敛到 $\theta_0(t) + 2k\pi$. 此处 d_{x_i}, d_{y_i} 都是常数, $k \in \mathbb{Z}$. 如果 $N = 1$, 那么此处考虑的问题就可以通过已有的机器人跟踪控制的方法解决. 请见文献[70–71]及其参考文献.

在编队控制设计中, 假设领队机器人的线速度及其变化率的有界性.

假设 3 领队机器人的线速度 v_0 可导且导数有界, 即在 $[0, \infty)$ 上 $\dot{v}_0(t)$ 存在且有界, 并且存在常数 $\bar{v}_0, \underline{v}_0 > 0$ 使得 $\underline{v}_0 \leq v_0(t) \leq \bar{v}_0$ 对所有 $t \geq 0$ 都成立.

首先利用动态反馈线性化技术^[72]处理独轮车模型的非完整(nonholonomic)约束. 这样可以将具有非线性动力学的机器人编队控制问题转化为线性系统的输出一致性问题. 但需要注意的是, 动态反馈线性化的一个基本条件是线速度不能为零. 因此, 基于线性系统设计的控制器需能保证线速度严格为正. 而通常的线性控制器是不能做到这一点的. 通过基于小增益定理的非线性控制设计来解决这个问题.

首先, 为机器人 i 引入新的控制输入 $r_i \in \mathbb{R}$ 使得

$$\dot{v}_i = r_i. \quad (74)$$

定义 $v_{x_i} = v_i \cos \theta_i, v_{y_i} = v_i \sin \theta_i$. 那么, $\dot{x}_i = v_{x_i}, \dot{y}_i = v_{y_i}$. 对 v_{x_i}, v_{y_i} 求导可得

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{xi} \\ \dot{v}_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -v_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & v_i \cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ \omega_i \end{pmatrix}. \quad (75)$$

如果 $v_i \neq 0$, 通过设计

$$\begin{pmatrix} r_i \\ \omega_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\frac{\sin \theta_i}{v_i} & \frac{\cos \theta_i}{v_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \end{pmatrix}, \quad (76)$$

即可将系统(71)–(73)转化为以 u_{xi} 和 u_{yi} 为新的控制输入的二阶积分器:

$$\dot{x}_i = v_{xi}, \quad \dot{v}_{xi} = u_{xi}, \quad (77)$$

$$\dot{y}_i = v_{yi}, \quad \dot{v}_{yi} = u_{yi}. \quad (78)$$

定义 $\tilde{x}_i = x_i - x_0 - d_{xi}$, $\tilde{y}_i = y_i - y_0 - d_{yi}$, $\tilde{v}_{xi} = v_{xi} - v_{x0}$, $\tilde{v}_{yi} = v_{yi} - v_{y0}$, $\tilde{u}_{xi} = u_{xi} - u_{x0}$, $\tilde{u}_{yi} = u_{yi} - u_{y0}$, 那么

$$\dot{\tilde{x}}_i = \tilde{v}_{xi}, \quad \dot{\tilde{v}}_{xi} = \tilde{u}_{xi}, \quad (79)$$

$$\dot{\tilde{y}}_i = \tilde{v}_{yi}, \quad \dot{\tilde{v}}_{yi} = \tilde{u}_{yi}. \quad (80)$$

于是, 编队控制问题就转化为对系统(79)–(80)设计控制器在保证 $v_i \neq 0$ 的同时当 $t \rightarrow \infty$ 时实现 $\tilde{x}_i(t) \rightarrow 0$, $\tilde{y}_i(t) \rightarrow 0$.

文献[42]给出了的控制分两步工作: 第1步将各个跟随机器人的线速度和角速度分别控制到领队机器人的线速度和角速度的较小的邻域内; 第2步通过调节跟随机器人的线速度和角速度实现编队控制. 其中, 第2步的控制器是基于动态反馈线性化模型的, 而其通过保证跟随机器人的线速度严格为正来保证动态反馈线性化模型的有效性. 这里给出第2步的控制器:

$$\tilde{u}_{xi} = -k_{xi}(\tilde{v}_{xi} - \phi_{xi}(z_{xi})), \quad (81)$$

$$\tilde{u}_{yi} = -k_{yi}(\tilde{v}_{yi} - \phi_{yi}(z_{yi})), \quad (82)$$

其中: $\phi_{xi}, \phi_{yi}: \mathbb{R} \rightarrow [-\lambda, \lambda]$ 是单调递减且连续可导的奇函数, k_{xi}, k_{yi} 是正常数且对所有 $r \in \mathbb{R}$ 满足

$$-k_{xi}/4 < \frac{d\phi_{xi}(r)}{dr} < 0, \quad (83)$$

$$-k_{yi}/4 < \frac{d\phi_{yi}(r)}{dr} < 0. \quad (84)$$

变量 z_{xi}, z_{yi} 定义为

$$z_{xi} = \frac{1}{N_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_i - x_j - (d_{xi} - d_{xj})), \quad (85)$$

$$z_{yi} = \frac{1}{N_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (y_i - y_j - (d_{yi} - d_{yj})), \quad (86)$$

其中集合 \mathcal{N}_i 表示机器人 i 所测量的位置信息. 如果机器人 i 的控制器用到 $(x_i - x_j, y_i - y_j)$, 那么 $j \in \mathcal{N}_i$.

通过以上设计, 可以将闭环系统最终转化为由 IOS 子系统构成的关联系统, 并可通过小增益定理来校正控制器从而实现编队控制目标.

7 结论与展望(Conclusions and future challenges)

在简要介绍分布式控制的发展现状以及小增益定理的基本思想的基础上, 本文着重讨论了小增益方法在分布式非线性控制中的应用. 小增益定理在处理分布式控制问题当中的优势在于它能够很好地处理非线性不确定动力学并且能够同分布式控制设计中常用的图的表示紧密结合. 于是, 怎样将分布式控制问题转化为小增益定理较易处理的镇定问题便成为解决问题的关键, 这也是本文的重点. 本文第3节通过一个简单的例子讨论了使用小增益方法进行分布式控制设计的可行性, 并阐述了有向图中的小增益定理的必要性. 第4节给出了有向图中的小增益结果. 在此基础上, 第5节介绍了针对一类非线性不确定系统的分布式控制设计. 通过基于观测器的分布式输出反馈控制设计, 可以将闭环多自主体系统最终转化为由 IOS 子系统构成的关联系统, 其可使用有向图中的小增益方法顺利解决. 另外, 本文还简要地回顾了基于小增益定理的分布式状态反馈控制和分布式编队控制的相关结果.

基于小增益定理的分布式控制设计虽尚处起步阶段, 但已展现出较强的优势. 在现有工作的基础上, 如下研究方向对分布式控制理论与应用的未来发展应该是有意义的.

1) 考虑更一般的被控对象. 小增益设计特别擅长于处理包含不确定性的非线性控制问题. 虽然本文所讨论的系统中就已包含不确定动力学, 但是复杂系统中所普遍存在的动态不确定性尚未考虑进来. 把已有的处理动态不确定性的工作(如文献[69]的结果)同近期的分布式非线性控制的结果相结合, 不仅能进一步拓宽小增益定理的应用, 更能将现阶段分布式控制理论向前推进, 使之更加实用化.

2) 同网络化控制相结合. 分布式控制往往更强调系统拓扑结构引起的信息交换约束对控制的影响, 而网络化控制则相对更着重于处理信号传输中的复杂因素(如采样、量化、时滞、丢包等). 实际上, 分布式控制无可避免地受信号传输因素的影响而不能实现准确及时的信息交换. 近来, 基于小增益定理的非线性网络化控制已经取得了较大进展^[73–75]. 在使用小增益定理处理这两类问题的时候, 都要很好的处理测量误差引起的问题. 正如本文所述, 分布式控制中某一自主体受其他自主体的影响可以看作是测量误差. 而网络化控制中信号传输因素所导致的测量误差则更加直接. 怎样通过这一共通之处将分布式控制同网络化控制相结合是非常值得解决的问题.

参考文献(References):

- [1] BORKAR V, VARAIYA P. Asymptotic agreement in distributed estimation [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, 27(3): 650 – 655.
- [2] TSITSIKLIS J N, BERTSEKAS D P, ATHANS M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(9): 803 – 812.
- [3] BERTSEKAS D P, TSITSIKLIS J. *Parallel and Distributed Computation* [M]. NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [4] OGREN P, FIORELLI E, LEONARD N. Cooperative control of mobile sensor networks: adaptive gradient climbing in a distributed network [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(8): 1292 – 1302.
- [5] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [6] FAX J A, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formation [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465 – 1476.
- [7] CORTES J, MARTINEZ S, BULLO F. Robust rendezvous for mobile autonomous agents via proximity graphs in arbitrary dimensions [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(8): 1289 – 1298.
- [8] CAO M, MORSE A S, ANDERSON B D O. Reaching a consensus in a dynamically changing environment: convergence rates, measurement delays, and asynchronous events [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2008, 47(2): 601 – 623.
- [9] QU Z, WANG J, HULL R A. Cooperative control of dynamical systems with application to autonomous vehicles [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(4): 894 – 911.
- [10] ARCAK M. Passivity as a design tool for group coordination [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1380 – 1390, 2007.
- [11] STAN G B, SEPULCHRE R. Dissipativity and global analysis of oscillators [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(2): 256 – 270.
- [12] GAZI V, PASSINO K M. Stability analysis of swarms [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(4): 692 – 697.
- [13] MOREAU L. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(2): 169 – 182.
- [14] HONG Y, GAO L, CHENG D, et al. Lyapunov-based approach to multi-agent systems with switching jointly connected interconnection [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5): 943 – 948.
- [15] LIN Z, FRANCIS B, MAGGIORE M. State agreement for continuous-time coupled nonlinear systems [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, 46(1): 288 – 307.
- [16] SHI G, HONG Y. Global target aggregation and state agreement of nonlinear multi-agent systems with switching topologies [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1165 – 1175.
- [17] SCARDOVI L, SEPULCHRE R. Synchronization in networks of identical linear systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2557 – 2562.
- [18] NERSESOV S G, GHORBANIAN P, AGHDAM A G. Stabilization of sets with application to multi-vehicle coordinated motion [J]. *Automatica*, 2010, 46(9): 1419 – 1427.
- [19] CAO Y, REN W. Distributed coordinated tracking with reduced interaction via a variable structure approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 33 – 48.
- [20] LI T, XIE L. Distributed coordination of multi-agent systems with quantized-observer based encoding-decoding [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(12): 3023 – 3037.
- [21] LI Z, LIU X, REN W, et al. Distributed tracking control for linear multi-agent systems with a leader of bounded unknown input [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(2): 518 – 523.
- [22] WANG X, HONG Y, HUANG J, et al. A distributed control approach to a robust output regulation problem for multi-agent systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(12): 2891 – 2895.
- [23] WIELAND P, SEPULCHRE R, ALLGOWER F. An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization [J]. *Automatica*, 2011, 47(5): 1068 – 1074.
- [24] SU Y, HUANG J. Output regulation of a class of switched linear multi-agent systems: a distributed observer approach [C] // *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*. Milan: IFAC, 2011: 4495 – 4500.
- [25] KURAMOTO Y. *Chemical Oscillators, Waves, and Turbulence* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [26] ERMENTROUT G B, KOPELL N. Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillator [J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1984, 15(2): 215 – 237.
- [27] SEPULCHRE R, PALEY D, LEONARD N. Collective motion and oscillator synchronization [C] // *Proceedings of Block Island Workshop Cooperative Control*. Berlin: Springer, 2003: 243 – 248.
- [28] PAPACHRISTODOULOU A, JADBABAIE A. Synchronization in oscillating networks: Switching topologies and non-homogeneous delays [C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Seville, Spain: IEEE, 2005: 5692 – 5697.
- [29] PRECIADO V M, VERGHESE G C. Synchronization in generalized Erdos-Renye networks of nonlinear oscillators [C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Seville, Spain: IEEE, 2005: 4628 – 4633.
- [30] CORTES J, MARTINEZ S, KARATAS T, et al. Coverage control for mobile sensing networks [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2004, 20(2): 243 – 255.
- [31] MESBAHI M. On state-dependent dynamic graphs and their controllability properties [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(3): 387 – 392.
- [32] DESAI J P, OSTROWSKI J P, KUMAR V. Modeling and control of formations of nonholonomic mobile robots [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2001, 17(6): 905 – 908.
- [33] TANNER H G, PAPPAS G J, KUMMAR V. Leader-to-formation stability [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2004, 20(3): 443 – 455.
- [34] OGREN P, EGERSTEDT M, HU X. A control Lyapunov function approach to multi-agent coordination [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2002, 18(5): 847 – 851.
- [35] DO K D. Formation tracking control of unicycle-type mobile robots with limited sensing ranges [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2008, 16(3): 527 – 538.
- [36] DONG W, FARRELL J A. Decentralized cooperative control of multiple nonholonomic dynamic systems with uncertainty [J]. *Automatica*, 2009, 45(3): 706 – 710.
- [37] LI Q, JIANG Z P. Flocking control of multi-agent systems with application to nonholonomic multi-robots [J]. *Kybernetika*, 2009, 45(1): 84 – 100.
- [38] AGUIAR A P, PASCOAL A M. Coordinated path-following control for nonlinear systems with logic-based communication [C] // *Proceedings of the 46th Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA: IEEE, 2007: 1473 – 1479.
- [39] IHLE I A F, ARCAK M, FOSSEN T I. Passivity-based designs for synchronized path-following [J]. *Automatica*, 2007, 43(9): 1508 – 1518.
- [40] LAN Y, YAN G, LIN Z. Synthesis of distributed control of coordinated path following [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(5): 1170 – 1175.

- [41] LIN Z, FRANCIS B, MAGGIORE M. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 121 – 127.
- [42] LIU T, JIANG Z P. Distributed formation control of nonholonomic mobile robots without global position measurements [J]. *Automatica*, 2013, 49(2): 592 – 600.
- [43] XIAO L, BOYD S. Fast linear iterations for distributed averaging [J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 52(1): 65 – 78.
- [44] ANDO H, OASA Y, SUZUKI I, et al. Distributed memoryless point convergence algorithm for mobile robots with limited visibility [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 15(5): 818 – 828.
- [45] LIN J, MORSE A S, ANDERSON B D O. The multi-agent rendezvous problem [C] // *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles, California: IEEE, 2003: 1508 – 1513.
- [46] CORTES J, MARTINEZ S, BULLO F. Robust rendezvous for mobile autonomous agents via proximity graphs in arbitrary dimensions [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 51(8): 1289 – 1298.
- [47] SPANOS D, OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Dynamic consensus on mobile networks [C] // *The 16th IFAC World Congress*. Prague, Czech Republic: IFAC, 2005.
- [48] XIAO L, BOYD S, LALL S. A scheme for asynchronous distributed sensor fusion based on average consensus [C] // *Proceedings of the 4th International Symposium on Information Processing in Sensor Networks*. Los Angeles, California: IEEE, 2005: 63 – 70.
- [49] DESOER C A, VIDYASAGAR M. *Feedback Systems: Input-output Properties* [M]. New York: Academic Press, 1975.
- [50] WILLEMS J C. Dissipative dynamical systems, part i: general theory; part ii: linear systems with quadratic supply rates [J]. *Archive for Rational Mechanics Analysis*, 1972, 45(8): 321 – 393.
- [51] HILL D J. A generalization of the small-gain theorem for nonlinear feedback systems [J]. *Automatica*, 1991, 27(6): 1043 – 1045.
- [52] MAREELS I M Y, HILL D J. Monotone stability of nonlinear feedback systems [J]. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 1992, 2(2): 275 – 291.
- [53] SONTAG E D. Smooth stabilization implies coprime factorization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34(4): 435 – 443.
- [54] SONTAG E D, WANG Y. On characterizations of the input-to-state stability property [J]. *Systems & Control Letters*, 1995, 24(5): 351 – 359.
- [55] SONTAG E D. Further facts about input to state stabilization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(4): 473 – 476.
- [56] JIANG Z P, TEEL A R, PRALY L. Small-gain theorem for ISS systems and applications [J]. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1994, 7(2): 95 – 120.
- [57] JIANG Z P, MAREELS I M Y, WANG Y. A Lyapunov formulation of the nonlinear small-gain theorem for interconnected systems [J]. *Automatica*, 1996, 32(8): 1211 – 1214.
- [58] KARAFYLLIS I, JIANG Z P. A vector small-gain theorem for general nonlinear control systems [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2011, 28(3): 309 – 344.
- [59] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. Third edition. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.
- [60] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems II* [M]. London: Springer-Verlag, 1999.
- [61] JIANG Z P, WANG Y. A generalization of the nonlinear small-gain theorem for large-scale complex systems [C] // *Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Chongqing, China: IEEE, 2008: 1188 – 1193.
- [62] LIU T, HILL D J, JIANG Z P. Lyapunov formulation of ISS cyclic-small-gain in continuous-time dynamical networks [J]. *Automatica*, 2011, 47(9): 2088 – 2093.
- [63] KARAFYLLIS I, JIANG Z P. *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems* [M]. London: Springer, 2011.
- [64] TIWARI S, WANG Y, JIANG Z P. Nonlinear small-gain theorems for large-scale time-delay systems [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 2012, 19(3): 27 – 63.
- [65] LIU T, JIANG Z P. Distributed output-feedback control of nonlinear multi-agent systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(11): 2912 – 2917.
- [66] KRSTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- [67] JIANG Z P, REPPERGER D W, HILL D J. Decentralized nonlinear output-feedback stabilization with disturbance attenuation [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(10): 1623 – 1629.
- [68] LIU T, JIANG Z P. Distributed control of nonlinear uncertain systems: A cyclic-small-gain approach [J]. *Acta Automatica Sinica*, in press, 2014.
- [69] JIANG Z P, MAREELS I M Y. A small-gain control method for nonlinear cascade systems with dynamic uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(3): 292 – 308.
- [70] JIANG Z P, NIJMEIJER H. Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping [J]. *Automatica*, 1997, 33(7): 1393 – 1399.
- [71] DIXON W E, DAWSON D M, ZERGEROGLU E, et al. *Nonlinear Control of Wheeled Mobile Robots* [M]. London: Springer, 2001.
- [72] FLIESS M, LEVINE J L, MARTIN P, et al. Flatness and defect of non-linear systems: Introductory theory and examples [J]. *International Journal of Control*, 1995, 61(6): 1327 – 1361.
- [73] LIU T, JIANG Z P, HILL D J. Quantized stabilization of strict-feedback nonlinear systems based on ISS cyclic-small-gain theorem [J]. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2012, 24(1/2): 75 – 110.
- [74] LIU T, JIANG Z P, HILL D J. A sector bound approach to feedback control of nonlinear systems with state quantization [J]. *Automatica*, 2012, 48(1): 145 – 152.
- [75] LIU T, JIANG Z P, HILL D J. Small-gain based output-feedback controller design for a class of nonlinear systems with actuator dynamic quantization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(5): 1326 – 1332.
- [76] SONTAG E D, WANG Y. Notions of input to output stability [J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 38(4/5): 351 – 359.
- [77] LIU T, JIANG Z P, HILL D J. *Nonlinear Control of Dynamic Networks* [M]. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2014.

作者简介:

刘腾飞 (1985–), 男, 第17届(2011年)《关肇章奖》获奖论文作者, 2005年获华南理工大学自动化专业学士学位, 2007年获华南理工大学控制理论与控制工程专业硕士学位, 2011年获澳大利亚国立大学系统与控制方向博士, 其后在美国纽约大学理工学院从事研究工作, 现任东北大学青年特聘教授, 目前研究方向包括非线性系统稳定性、鲁棒非线性控制及其在化工过程、机电系统和交通系统中的应用, E-mail: neuralliu@gmail.com;

姜钟平 (1966–), 男, 1988年获武汉大学数学系学士学位, 1989年获巴黎南大统计学硕士学位, 1993年获法国高等矿业大学自动控制与数学博士, 其后在法国、澳大利亚和美国多所高校和研究所从事研究工作, 现任美国纽约大学教授, 主要研究方向为稳定性理论、鲁棒自适应非线性控制及其在通讯网络、欠驱动力学系统、多智能体和生物中的应用, E-mail: zjiang@nyu.edu.