

一类非仿射非线性不确定系统自适应鲁棒控制

陈龙胜[†], 王琦

(南昌航空大学 飞行器工程学院, 江西 南昌 330063)

摘要: 针对一类结构和参数均未知且控制方向未知的不确定非仿射非线性系统, 提出了一种鲁棒自适应控制算法. 基于中值定理将非仿射系统转化为具有线性结构的时变系统, 在此基础上, 利用参数投影估计算法对有界时变参数进行辨识, 参数辨识误差和外界干扰采用非线性阻尼项进行补偿. 同时将动态面控制(DSC)和反推法相结合, 消除了反推法的计算膨胀问题, 并采用Nussbaum型函数处理系统中方向未知的不确定控制增益函数, 避免了可能存在的控制器奇异值问题. 最后, 采用解耦反推, 基于李雅普诺夫稳定性定理证明了闭环系统的半全局一致最终有界. 仿真结果验证了所设计控制方案的可行性与有效性.

关键词: 非仿射非线性系统; 动态面控制; Nussbaum函数; 自适应控制

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Adaptive robust control for a class of uncertain non-affine nonlinear system

CHEN Long-sheng[†], WANG Qi

(College of Aircraft Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi 330063, China)

Abstract: An adaptive robust control law is proposed for a class of uncertain non-affine nonlinear system with unknown structure, parameters and control direction. The non-affine system is first transformed into a time-varying system with a linear structure by using the mean value theory; and then, the bounded time-varying parameters are estimated by adaptive algorithms with projection. The estimation error and external disturbance are compensated by employing nonlinear damping terms. By combining dynamic surface control (DSC) with backstepping technique, and employing Nussbaum gain approach, the designed algorithm eliminates not only the "complexity explosion" problem inherent to the backstepping method, but also the possible "controller singularity" problem causing by unknown control direction. Finally, based on Lyapunov stability theorem and decoupled backstepping method, the semi-global stability of the close-loop system is proved. The simulation results demonstrate the feasibility and validity of the proposed control schemes.

Key words: non-affine nonlinear system; dynamic surface control (DSC); Nussbaum function; adaptive control

1 引言(Introduction)

近年来, 复杂非线性系统控制问题已成为国内外学者的一个研究热点, 并相继提出了许多控制方法, 如反馈线性化、自适应反演、神经网络理论及模糊逻辑控制等^[1-5]. 可多数研究成果都是针对仿射系统, 而非仿射系统的研究成果较少.

非仿射系统, 即控制输入不以线性比例方式通过控制增益进入并影响系统的动态特性, 而是以非线性隐含的方式对系统产生作用. 非仿射系统没有仿射系统中的“控制增益”和“控制方向”的概念^[6]. 非仿射系统具有高度的非线性、不确定性和复杂性. 实际

上, 大多数实际工程系统本质上都是非仿射的, 研究专门的非仿射系统控制问题具有重要的理论和实际意义.

目前, 非仿射系统的系统跟踪控制研究主要分为两大类: 模型未知和模型已知. 文献[7]针对一类模型已知的非仿射非线性系统的跟踪控制问题, 提出一种鲁棒Backstepping控制策略. 但是实际中很多系统由于结构和参数的不确定性而很难获取其唯一数学模型, 如飞行控制系统等; Labiod S等^[8]提出了一种基于隐函数理论的自适应控制方案, 但即使已知非仿射非线性系统的逆存在, 利用隐函数定理求解该显式逆仍

收稿日期: 2014-02-17; 录用日期: 2014-10-09.

[†]通信作者. E-mail: lschen2008@163.com.

航天科技创新基金项目(CAST2014CH01), 江西省教育厅科技项目(DB201206238)资助.

Supported by Aerospace Science and Technology Innovation Fund (CAST2014CH01) and Foundation of JiangXi Educational Committee (DB2012 06238).

然非常困难的; J.H.Park等^[9]结合反馈线性化技术, 得出控制律和自适应律, 该方案假设非线性函数 $f_i(\cdot)$ 关于 $u(t)$ 光滑的, 采用泰勒级数展开或中值定理, 将 $u(t)$ 分离出转换为仿射系统, Labiod S和J.H.Park的方法均假设控制方向已知($\frac{\partial f}{\partial u} > 0$); Liu等^[10]和周卫东等^[11]等利用中值定理将非仿射系统转换为仿射系统, 并在设计中引入Nussbaum型函数, 解决了控制方向未知的难题. 上述方案的共同点是利用模糊/神经网络无限逼近系统的未知非线性函数和不确定项, 或非线性函数 $f_i(\cdot)$ 已知^[7], 采用模糊/逼近系统中的不确定项; 模糊/神经网络具有很强的学习能力, 能够逼近和处理各种不确定系统的动态特性, 是一种非常具有潜力的进行不确定非线性鲁棒自适应控制的设计工具, 然而, 对于复杂的非线性系统, 采用模糊/神经网络控制如何保证系统的实时性是一个难题.

基于上述研究基础, 本文针对控制方向未知的一类结构和参数未知且具有未建模动态和外界扰动的非仿射不确定系统提出了一种鲁棒自适应控制方案. 具体为: 1) 利用中值定理将非仿射系统转化为具有线性结构的时变系统, 控制器设计中仅需非线性函数 $f_i(\cdot)$ 关于各变量的偏导数有界, 且位于已知界内, $f_i(\cdot)$ 及其偏导数的具体形式与设计无关; 2) 基于参数投影估计算法和反推设计方法设计鲁棒自适应控制器. 由于反推设计存在计算膨胀的问题, 故将动态面控制与反推法相结合, 同时在设计过程中引入低通滤波器, 避免设计中虚拟控制信号的求导而引起的计算膨胀问题; 引入Nussbaum型函数处理方向未知的不确定虚拟控制增益函数, 无需采用模糊/神经网络对系统中未知非线性函数和不确定项进行无限逼近, 控制器结构简单; 3) 采用解耦反推(decoupled backstepping)方法对闭环系统的进行稳定性分析.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下单输入单输出(SISO)非仿射非线性不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}_{i+1}) + \Delta_i(\mathbf{x}_i, t), & 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{x}_n = f_n(\mathbf{x}, u) + \Delta_n(\mathbf{x}, t), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量; $\mathbf{x}_i = (x_1, x_2, \dots, x_i)^T$; u 为控制输入向量; y 为系统输出; $f_i(\cdot)$ 为结构和参数均未知的非线性函数; $\Delta_i(\mathbf{x}, t)$ ($1 \leq i \leq n$) 为包含未建模动态和外界干扰的不确定项. 控制系统的目标是设计一种鲁棒自适应控制律, 使闭环系统所有信号一致最终有界, 为此, 对上述系统和期望信号做出以下假设.

假设 1 非线性函数 $f_i(\cdot)$ 关于 \mathbf{x} 和 u 连续可导, 且偏导数有界, 位于如下已知界内:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in [\alpha_{ij \min}, \alpha_{ij \max}], \\ & i = 1, \dots, n-1, j \leq i+1, \\ \alpha_{nj} &= \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \in [\alpha_{nj \min}, \alpha_{nj \max}], j \leq n, \\ \beta &= \frac{\partial f_n}{\partial u} \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]. \end{aligned}$$

假设 2 $f_i(\cdot)$ 在 原点处 $f_i(0, 0, \dots, 0)$ 有意义, 且位于已知界内: $|f_i(0, 0, \dots, 0)| \leq d_0$.

假设 3 不确定项 $\Delta_i(\mathbf{x}_i, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 满足: $\|\Delta_i(\mathbf{x}_i, t)\| \leq \rho_i(\mathbf{x}_i) f_{di}(t)$, 式中: $\rho_i(\mathbf{x}_i)$ 为已知的光滑函数, $f_{di}(t)$ 为未知但有界时变函数, 且满足 $|f_{di}(t)| \leq d_i$, d_i 为已知的正常数.

假设 4 参考信号 $y_r(t)$ 光滑有界, 且具有二阶连续有界导数, 即存在一个正常数 C_0 , 使得集合: $\Pi_0 = \{(y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r) : \|y_r\|^2 + \|\dot{y}_r\|^2 + \|\ddot{y}_r\|^2 \leq C_0\}$ 成立.

由于系统(1)中 $f_i(\cdot)$ 为结构和参数均未知的非线性函数, 但其偏导数均有界, 所以本文首先利用中值定理现将非仿射形式转化为具有线性结构的时变系统, 有

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}^T x_{i+1} + f_i(\mathbf{0}) + \Delta_i(\mathbf{x}_i, t), & 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{x}_n = A_{nn}^T \mathbf{x} + \beta u + f_n(\mathbf{0}) + \Delta(\mathbf{x}, t), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2)$$

式中: $A_{ii} = [\alpha_{i1} \ \dots \ \alpha_{i(i+1)}]^T$, $A_{nn} = [\alpha_{n1} \ \alpha_{n2} \ \dots \ \alpha_{nn}]^T$, $f_i(\mathbf{0})$ 为 $f_i(0, 0, \dots, 0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 的简写(下同), 其中:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{(0, \dots, \lambda_j, \dots, x_i, x_{i+1})}, \\ \alpha_{nj} &= \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_j} \right) \Big|_{(0, \dots, \lambda_j, \dots, x_{n-1}, x_n)}, \\ \beta &= \left(\frac{\partial f_n}{\partial u} \right) \Big|_{(0, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n)}. \end{aligned}$$

λ_j 为介于 0 与 x_j 之间的某个值, λ_n 为介于 0 与 u 之间的某个值, 时变系数 A_{ij} , A_{nn} 和 β 均有界, 且满足假设1.

注 1 1) 系统的能量是有限的, 所以系统转化为具有线性结构的时变系统, 时变参数亦是有界的, 即系统的非线性函数关于各变量的变化率有界, 但具体时刻的变化方向未知; 2) 实际中大多数系统在初始条件下的值是有界的; 3) 系统的动态特性及环境变化引起的扰动往往依赖于时间且不确定, 从而系统的扰动是时变有界的. 因此假设1~4是合理的且符合实际的.

Nussbaum R.D.提出Nussbaum函数, 解决了系统控制方向未知时控制器设计问题, 本文将利用Nussbaum函数克服由系统控制方向未知带来的问题, 满足如下性质的函数称为Nussbaum型函数:

$$\begin{cases} \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\tau) d\tau = +\infty, \\ \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\tau) d\tau = +\infty. \end{cases}$$

本文取Nussbaum函数为 $N(\tau) = e^{\tau^2} \cos((\pi/2)\tau)$, τ 为Nussbaum函数变量^[12].

引理 1 设 $V(\cdot)$ 和 $\tau(\cdot)$ 是定义在 $[0, t_f]$ 上的光滑函数, 满足 $\forall t \in [0, t_f], V(t) \geq 0; N(\tau)$ 为一个光滑的Nussbaum型函数, 若 $\forall t \in [0, t_f)$, 不等式(3)成立, 则 $V(t), \tau(t)$ 和 $\int_0^t a(x(\kappa))N(\tau)\dot{\tau}d\tau$ 在区间 $[0, t_f]$ 必定有界:

$$0 \leq V(t) \leq b_0 + e^{-b_1 t} \int_0^t (a(x(\kappa))N(\tau) + 1)\dot{\tau}e^{b_1 \tau} d\kappa, \quad (3)$$

式中: b_1 为正常数, b_0 为适当的常数, $a(x(\kappa))$ 为时变参数, 在闭区间 $\mathfrak{R} := [I^-, I^+]$ 且 $0 \notin \mathfrak{R}$ 内取值^[13].

引理 2 对于任意给定的正常数 $t_f > 0$, 若闭环系统的解在区间 $[0, t_f]$ 上有界, 则 $t_f = \infty$ ^[14].

3 鲁棒自适应控制器设计(Design of adaptive robust controller)

Step 1 考虑第1个子系统, 定义第一个误差面:

$$S_1 = x_1 - y_r. \quad (4)$$

两边求导则有

$$\dot{S}_1 = \dot{x}_1 - \dot{y}_r = A_{11}^T x_2 + f_1(\mathbf{0}) - \dot{y}_r. \quad (5)$$

根据上述关于具有线性结构时变系统的叙述, 则有

$$\dot{S}_1 = \alpha_{12} x_2 + \Psi_1^T \Upsilon_1 + \Delta_1, \quad (6)$$

式中: $\Psi_1 = [\alpha_{11} \ f_1(\mathbf{0}) \ 1]^T, \Upsilon_1 = [x_1 \ 1 \ -\dot{y}_r]^T, \Delta_1$ 为 $\Delta_1(x_1, t)$ 的简写, 此时将 x_2 视为系统(6)的虚拟控制量, 针对系统(6)中符号未知的不确定虚拟控制增益, 本文采用Nussbaum增益技术来处理; 取虚拟控制律及自适应律如下:

$$\begin{cases} x_{2r} = N(\tau_1)(k_1 S_1 + \hat{\Psi}_1^T \Upsilon_1 + \vartheta_1), \\ N(\tau_1) = e^{\tau_1^2} \cos((\pi/2)\tau_1), \\ \vartheta_1 = (\zeta_1^2/4c_1 + \rho_1^2(x_1)/4c_{1d}) \cdot S_1, \\ \dot{\tau}_1 = (k_1 S_1 + \hat{\Psi}_1^T \Upsilon_1 + \vartheta_1) \cdot S_1, \\ \dot{\hat{\Psi}}_1 = \text{Proj}_{\hat{\Psi}_1}(\Lambda_1 \Upsilon_1 S_1), \hat{\Psi}_1(0) \in \Omega_{\Psi_1}, \end{cases} \quad (7)$$

式中:

$$\begin{aligned} \zeta_i &\geq \|\tilde{\Psi}_{i \max}\| \|\Upsilon_i\|, \tilde{\Psi}_{i \max} = \Psi_{i \max} - \Psi_{i \min}, \\ \Psi_{i \max} &= [\alpha_{i1 \max} \ \cdots \ \alpha_{ii \max} \ d_0 \ 1]^T, \\ \Psi_{i \min} &= [\alpha_{i1 \min} \ \cdots \ \alpha_{ii \min} \ -d_0 \ 1]^T, \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

其中: $\hat{\Psi}_1^T \Upsilon_1$ 表示参数估计 $\hat{\Psi}_1$ 得到的常规模型补偿控制量, $\hat{\Psi}_1$ 表示 Ψ_1 的估计值, $\tilde{\Psi}_1 = \Psi_1 - \hat{\Psi}_1$ 表示参数估计误差, 自适应律 $\hat{\Psi}_1$ 采用参数投影估计算法 $\text{Proj}(\cdot)$,

其具体形式如下($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\text{Proj}_{\hat{\Psi}_i}(\cdot k_i) = \begin{cases} \cdot k_i, & \hat{\Psi}_i \in (\hat{\Psi}_{i \min}, \hat{\Psi}_{i \max}) \text{ 或} \\ & \hat{\Psi}_i > \hat{\Psi}_{i \max}, \cdot k_i < 0 \text{ 或} \\ & \hat{\Psi}_i < \hat{\Psi}_{i \min}, \cdot k_i > 0, \\ 0, & \hat{\Psi}_i \geq \hat{\Psi}_{i \max}, \cdot k_i > 0, \\ 0, & \hat{\Psi}_i \leq \hat{\Psi}_{i \min}, \cdot k_i < 0, \end{cases}$$

式中: $\Omega_{\Psi_i} \in [\hat{\Psi}_{i \min}, \hat{\Psi}_{i \max}]$, $\hat{\Psi}_i(0) \in \Omega_{\Psi_i}$, Λ_i 表示参数辨识速率的对角矩阵, 对于上述参数辨识算法, 具有如下特性: $\forall t: \hat{\Psi}_i(t) \in \Omega_{\Psi_i}$, 即参数估计有界, 且位于已知界内, 其具体证明过程见文献[15]; ϑ_1 为克服系统参数不确定以及外界干扰等所引起的系统不确定性, k_1, c_1 和 c_{1d} 为设计的大于零的正常数. 由于在反推设计过程中将会使用到 x_{2r} 的微分信号 \dot{x}_{2r} , 为了避免对 x_{2r} 的解析运算, 可通过时间常数为 μ_2 的一阶低通滤波器获取 x_{2r} 的估计值 z_2 , 即

$$\mu_2 \dot{z}_2 + z_2 = x_{2r}, \quad z_2(0) = x_{2r}(0). \quad (8)$$

这样, 在下一步设计中无需对 x_{2r} 中的非线性项进行求导, 从而避免了反推法的计算膨胀问题, 简化控制律. 为简便设计, Step $i(i = 2, \dots, n)$ 中相应的参数类似设计.

Step $i(i = 2, \dots, n-1)$ 定义第 i 个误差面:

$$S_i = x_i - z_i. \quad (9)$$

类似地, 有

$$\dot{S}_i = \alpha_{i(i+1)} x_{i+1} + \Psi_i^T \Upsilon_i + \Delta_i, \quad (10)$$

式中: $\Psi_i = [\alpha_{i1} \ \cdots \ \alpha_{ii} \ f_i(\mathbf{0}) \ 1]^T, \Upsilon_i = [x_1 \ \cdots \ x_i \ 1 \ -\dot{x}_{ir}]^T$, 类似地, 取如下控制律和自适应律:

$$\begin{cases} x_{(i+1)r} = N(\tau_i)(k_i S_i + \hat{\Psi}_i^T \Upsilon_i + \vartheta_i), \\ N(\tau_i) = e^{\tau_i^2} \cos((\pi/2)\tau_i), \\ \vartheta_i = (\zeta_i^2/4c_i + \rho_i^2(x_i)/4c_{id}) \cdot S_i, \\ \dot{\tau}_i = (k_i S_i + \hat{\Psi}_i^T \Upsilon_i + \vartheta_i) \cdot S_i, \\ \dot{\hat{\Psi}}_i = \text{Proj}_{\hat{\Psi}_i}(\Lambda_i \Upsilon_i S_i), \hat{\Psi}_i(0) \in \Omega_{\Psi_i}, \end{cases} \quad (11)$$

式中: $\zeta_i \geq \|\tilde{\Psi}_{i \max}\| \|\Upsilon_i\|$, $\tilde{\Psi}_{i \max} = \Psi_{i \max} - \Psi_{i \min}$, 同样, 可通过时间常数为 μ_i 的一阶低通滤波器获取 $x_{(i+1)r}$ 的估计值 $z_{(i+1)}$:

$$\begin{aligned} \mu_i \dot{z}_{(i+1)} + z_{(i+1)} &= x_{(i+1)r}, \\ z_{(i+1)}(0) &= x_{(i+1)r}(0). \end{aligned}$$

Step n 实际控制 u 的出现, 定义第 n 个误差面:

$$S_n = x_n - z_n. \quad (12)$$

类似地, 有

$$\dot{S}_n = \beta u + \Psi_n^T \Upsilon_n + \Delta_n, \quad (13)$$

其中: $\Psi_n = [\alpha_{n1} \ \cdots \ \alpha_{nn} \ f_n(\mathbf{0}) \ 1]^T, \Upsilon_n = [x_1 \ \cdots \ x_n \ 1 \ -\dot{x}_{nr}]^T$, 类似地, 取如下控制律和自适应律:

$$\begin{cases} u = N(\tau_n)(k_n S_n + \hat{\Psi}_n^T \Upsilon_n + \vartheta_n), \\ N(\tau_n) = e^{\tau_n} \cos((\pi/2)\tau_n), \\ \vartheta_n = (c_n^2/4c_n + \rho_n^2(\mathbf{x})/4c_{nd}) \cdot S_n, \\ \dot{\tau}_n = (k_n S_n + \hat{\Psi}_n^T \Upsilon_n + \vartheta_n) \cdot S_n, \\ \dot{\hat{\Psi}}_n = \text{Proj}_{\hat{\Psi}_n}(A_n \Upsilon_n S_n), \hat{\Psi}_n(0) \in \Omega_{\hat{\Psi}_n}, \end{cases} \quad (14)$$

式中:

$$\begin{aligned} \zeta_n &\geq \|\tilde{\Psi}_n\|_{\max} \|\Upsilon_n\|, \tilde{\Psi}_n\|_{\max} = \Psi_n\|_{\max} - \Psi_n\|_{\min}, \\ \Psi_n\|_{\max} &= [\alpha_{n1\max} \cdots \alpha_{nn\max} \ d_0]^T, \\ \Psi_n\|_{\min} &= [\alpha_{n1\min} \cdots \alpha_{nn\min} \ -d_0]. \end{aligned}$$

上述控制器的设计不依赖于系统的具体模型, 与系统中非线性函数 $f_i(\cdot)$ 无关, 故仅需采用参数投影算法对有界时变参数进行辨识, 辨识误差和外界干扰利用非线性阻尼项进行补偿; 无需采用模糊/神经网络对非线性函数进行逼近, 控制器结构简单, 计算量小, 提高了系统的实时性.

4 闭环系统稳定性及跟踪性能分析(Stability and tracking performance analysis of the closed-loop system)

定义系统的边界层误差

$$y_{i+1} = z_{i+1} - x_{(i+1)r}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (15)$$

易知 $x_2 = S_2 + x_{2r} + y_2$, 代入式(6)可得

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= \alpha_{12}(S_2 + y_2) - k_1 S_1 + \tilde{\Psi}_1^T \Upsilon_1 - \\ &\vartheta_1 + \Delta_1 + (\alpha_{12}N(\tau_1) + 1)\dot{\tau}_1/S_1. \end{aligned} \quad (16)$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} \dot{S}_i &= \alpha_{i(i+1)}(S_{i+1} + y_{i+1}) - k_i S_i + \tilde{\Psi}_i^T \Upsilon_i - \\ &\vartheta_i + \Delta_i + (\alpha_{i(i+1)}N(\tau_i) + 1)\dot{\tau}_i/S_i, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_n &= \beta(N(\tau_n) + 1)\dot{\tau}_n/S_n - \\ &k_n S_n + \tilde{\Psi}_n^T \Upsilon_n - \vartheta_n + \Delta_n. \end{aligned} \quad (18)$$

根据式(8)可得 $\dot{z}_2 = (x_{2r} - z_2)/\mu_2 = -y_2/\mu_2$, 则有 $\dot{y}_2 = \dot{z}_2 - \dot{x}_{2r} = -y_2/\mu_2 - C_2(S_1, S_2, y_2, \hat{\Psi}_1, y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r)$, 类似地, 有

$$\begin{aligned} \dot{y}_{i+1} &= -y_{(i+1)}/\mu_{(i+1)} - C_{i+1}(S_1, \dots, S_{i+1}, \\ &y_2, \dots, y_{i+1}, \hat{\Psi}_1, \dots, \hat{\Psi}_i, y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r), \end{aligned}$$

其中 $C_i(\cdot)$ ($i = 1, \dots, n-1$) 是一个连续函数, 其具体表达式如下:

$$\begin{aligned} C_i(\cdot) &= \\ &-\left(\frac{\partial N(\tau_i)}{\partial \tau_i}\right) \cdot \tau_i^2/S_i - N(\tau_i)(\hat{\Psi}_i^T \Upsilon_i + \\ &(k_i + \rho_i^2(\mathbf{x}_i)/4c_{id})\dot{S}_i + S_i(\frac{\partial \rho_i(\mathbf{x}_i)}{2c_{id}})(\frac{\partial \rho_i(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i^T}) + \\ &\hat{\Psi}_i^T((\frac{\partial \Upsilon_i}{\partial (x_1, \dots, x_i, \dot{x}_{ir}})) \cdot [x_1 \cdots x_i \ \dot{x}_{ir}]^T). \end{aligned}$$

现在分析由系统(2)、虚拟控制律(7)(11)及控制律(14)组成的闭环系统稳定性, 首先提出如下定理:

定理 1 上述闭环系统, 对于给定的任意正数 p_i ,

初始条件满足 $\Pi_i = \{\sum_{l=1}^i S_l^2 + \sum_{l=1}^{i-1} y_{l+1}^2 \leq 2p_i\}$, 在满足假设1-4的条件下, 采用形如式(14)控制律, 若 $V_i(0) < p_i$, 则存在设计参数 $k_i, c_i, c_{id}, \mu_{i+1}$ 和 Δ_i , 使得闭环系统的解一致最终有界; 同时, 可以通过调整控制器参数使得跟踪误差充分小.

证 由于各步骤的设计方法基本类似, 因此首先考虑 Step i ($i = 1, \dots, n-1$) 的情况. 定义李雅普诺夫能量函数:

$$V_i = S_i^2/2 + y_{i+1}^2/2. \quad (19)$$

对 V_i 求导, 并将式(11)(16)代入, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -k_i S_i^2 + (a_{i(i+1)}N(\tau_i) + 1)\dot{\tau}_i + a_{i(i+1)} \cdot \\ &S_i(S_{i+1} + y_{i+1}) + y_{i+1}(-y_{i+1}/\mu_{i+1} + \\ &C_{i+1}) - ((\zeta_i^2/4c_i + \rho_i^2(\mathbf{x}_i)/4c_{id})S_i^2 - \\ &\Psi_i^T \Upsilon_i S_i - \Delta_i S_i). \end{aligned} \quad (20)$$

进一步可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -k_i S_i^2 - (\|\tilde{\Psi}_i\|_{\max} \|\Upsilon_i\| \|S_i\|/2\sqrt{c_i} - \\ &\sqrt{c_i})^2 + c_i - (S_i \rho_i(\mathbf{x}_i)/2\sqrt{c_{id}} - \sqrt{c_{id}} d_i)^2 + \\ &c_{id} d_i^2 + y_{i+1} \dot{y}_{i+1} + (a_{i(i+1)}N(\tau_i) + 1)\dot{\tau}_i + \\ &a_{i(i+1)} S_i(S_{i+1} + y_{i+1}). \end{aligned} \quad (21)$$

根据不等式 $ab \leq (1/4)a^2 + b^2$, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -(k_i - 2)S_i^2 + (a_{i(i+1)}N(\tau_i) + 1)\dot{\tau}_i + \\ &c_i + c_{id} d_i^2 + (q_i^2/4)S_{i+1}^2 + (y_{i+1} \dot{y}_{i+1} + \\ &(q_i^2/4)y_{i+1}^2), \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $q_i = \max(|\alpha_{i(i+1)\max}|)$, 由于 $\Pi_0 \in \mathbb{R}^3$ 和 $\Pi_i \in \mathbb{R}^{(2i-1)}$ 都是紧的, 因此 $\Pi_0 \times \Pi_i \in \mathbb{R}^{2i+2}$ 也是紧的, 因而 $|C_{i+1}|$ 在 $\Pi_0 \times \Pi_i$ 具有一个最大值 M_{i+1} , 据此易知

$$y_{i+1} \dot{y}_{i+1} \leq -y_{i+1}^2/u_{i+1} + (y_{i+1}^2 + M_{i+1}^2)/2. \quad (23)$$

根据式(23)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -(k_i - 2)S_i^2 + (a_{i(i+1)}N(\tau_i) + 1)\dot{\tau}_i + \\ &\delta_i^* + (q_i^2/4)S_{i+1}^2 - \lambda_i y_{i+1}^2, \end{aligned} \quad (24)$$

式中: $\lambda_i = 1/\mu_{i+1} - 1/2 - q_i^2/4$, 且 λ_i 为正常数, $\delta_i^* = c_i + c_{id} d_i^2 + M_{i+1}^2/2$, 令 $k_i = \lambda_i + 2$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -2\lambda_i V_i + (a_{i(i+1)}N(\tau_i) + 1)\dot{\tau}_i + \\ &\delta_i^* + (q_i^2/4)S_{i+1}^2. \end{aligned} \quad (25)$$

令 $\delta_i = V_i(0) + \delta_i^*/2\lambda_i$, 两边同时乘以 $e^{2\lambda_i t}$, 并在 $[0, t]$ 内积分可得

$$\begin{aligned} V_i(t) &\leq \delta_i + e^{-2\lambda_i t} \int_0^t (a_{i(i+1)}N(\tau_i) + \\ &1)\dot{\tau}_i e^{2\lambda_i t} dt + Z_i, \end{aligned} \quad (26)$$

式中 $Z_i = e^{-2\lambda_i t} \int_0^t (q_i^2/4)S_{i+1}^2 e^{2\lambda_i t} dt$, 如果没有 Z_i 项, 根据引理1可以得到: 在有限时间 $[0, t_f]$ 内, $V_i(t)$

和 τ_i , 以至于 S_i 和 y_{i+1} 都是有界的, 并由引理2可知 $t_f = \infty$, 因此该有界是一致最终有界, 但由于 Z_i 项的存在, 引理1不能直接运用, 但如果在下一步中 S_{i+1} 能得到镇定, 且在有限时间 $[0, t_f]$ 内有界, 则 Z_i 项:

$$Z_i \leq e^{-2\lambda_i t} \sup_{\iota \in [0, t]} S_{i+1}^2 \frac{q_i^2}{4} \int_0^t e^{2\lambda_i \iota} d\iota \leq \frac{q_i^2}{8} \sup_{\iota \in [0, t]} S_{i+1}^2, \quad (27)$$

显然有界, 式(27)可转换为

$$V_i(t) \leq b_i + e^{-2\lambda_i t} \int_0^t (a_{i(i+1)}N(\tau_i) + 1)\dot{\tau}_i e^{2\lambda_i \iota} d\iota, \quad (28)$$

式中 $b_i = V_i(0) + \delta_i/2\lambda_i + Z_i$, 故根据引理1, S_i 的有界性亦可得到保证. 现在考虑Step n 的情况, 定义李雅普诺夫能量函数

$$V_n = (1/2)S_n^2. \quad (29)$$

对其求导, 可得

$$\dot{V}_n = S_n \dot{S}_n \leq -k_n S_n^2 + (\beta N(\tau_n) + 1)\dot{\tau}_n + \delta^*, \quad (30)$$

式中 $\delta^* = c_n + c_{nd}d_n^2$, 令 $\lambda_n = k_n$, 进一步可得

$$\dot{V}_n \leq -2\lambda_n V_n + (\beta N(\tau_n) + 1)\dot{\tau}_n + \delta_n. \quad (31)$$

类似地, 可以得到

$$V_n(t) \leq \delta_n + e^{-2\lambda_n t} \int_0^t (\beta N(\tau_n) + 1)\dot{\tau}_n e^{2\lambda_n \iota} d\iota, \quad (32)$$

式中 $\delta_n = V_n(0) + \delta_n^*/2\lambda_n$, 根据引理1, 易知 V_n 和 S_n 的子系统的闭环解都是一致最终有界的. 由于 S_n 有界, 所以Step $n-1$ 中的 Z_{n-1} 的有界性得到保证, 可知 $n-1$ 子系统闭环解也是有界的, 如此, 向后递推 $n-1$ 步可得到如下结论:

通过选取适当的设计参数 $k_i, c_i, c_{id}, \Lambda_i$ 和 μ_i , 可使得整个闭环系统所有的解以及系统的状态 $x(t)$ 在所定义的紧集内都是半全局一致最终有界的.

根据 V_i 的定义及式(26)和式(32), 易得到

$$|S_1| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_i^* \lambda_0^{-1} + \nu_1 + 2 \sum_{i=1}^n V_i(0) e^{-2\lambda_0 t}}, \quad (33)$$

式中:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \\ \nu_1 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sup_{\iota \in [0, t]} \left\{ \int_0^t (a_{i(i+1)}N(\tau_i) + 1)\dot{\tau}_i e^{2\lambda_i(t-\iota)} d\iota + \int_0^t (q_i^2/4)S_{i+1}^2 e^{2\lambda_i(t-\iota)} d\iota \right\} + \sup_{\iota \in [0, t]} \left\{ \int_0^t (\beta N(\tau_n) + 1)\dot{\tau}_n e^{2\lambda_n(t-\iota)} d\iota \right\}. \end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |S_1| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_i^* \lambda_0^{-1} + \nu_1}. \quad (34)$$

式(34)对于给定的 $\varepsilon \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_i^* \lambda_0^{-1} + \nu_1}$, 存在时间 $T(\lambda_0) \geq 0$, 使得跟踪误差 S_1 满足

$$|S_1| = |y - y_r| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq T(\lambda_0), \quad (35)$$

即可通过调整控制器参数使得跟踪误差 $S_1 = y - y_r$ 尽可能的小, 以达到所期望跟踪精度.

5 仿真结果与分析(Simulation result and analysis)

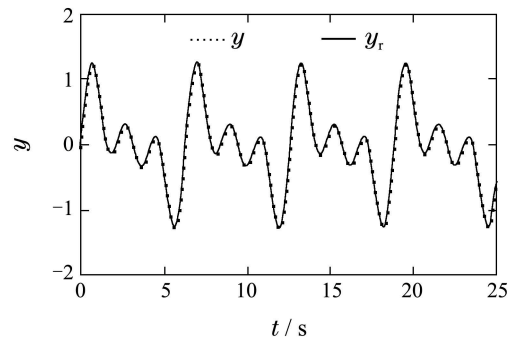
仿真研究取非仿射非线性不确定模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + \Delta_1, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) + \Delta_2, \\ y = x_1, \end{cases}$$

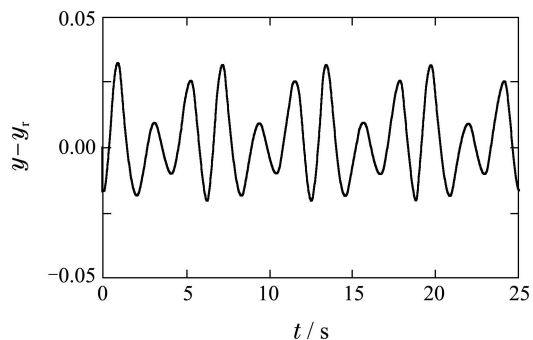
其中: $f_i(\cdot)$ 未知, 不确定项 $\Delta_i = 0.05 \sin t$; 已知: $\alpha_{11} \in [-0.5, 0.5], \alpha_{12} \in [0.5, 1.5], \alpha_{21} \in [-1, 1.5], \alpha_{22} \in [-2, 2], \beta \in [0.5, 1.5], |f(\mathbf{0})| \leq 0.1$, 实际非线性函数为

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0.5x_1 \sin(2t) + x_2, \\ f_2(x_1, x_2, u) &= \frac{1 - e^{-x_1}}{1 + e^{-x_1}} + 2x_2 \sin t + x_1 \sin(3t) + u. \end{aligned}$$

期望信号 $y_r = \sin(0.5t) + 0.5 \sin(1.5t)$, 系统初始条件 $x(0) = [0.01 \ 0]^T$; 选取的设计参数为 $c_1 = c_{1d} = 5, c_2 = c_{2d} = 2.5, k_1 = 20, k_2 = 5, \Lambda_1 = \text{diag}\{3.5\}, \Lambda_2 = \text{diag}\{0.125\}$, 滤波器时间常数 μ_i 均为0.05, 仿真时取采样周期 $T = 0.001$ s, 仿真结果如图1-2所示.



(a) 系统输出 y 与参考信号 y_r



(b) 跟踪误差曲线

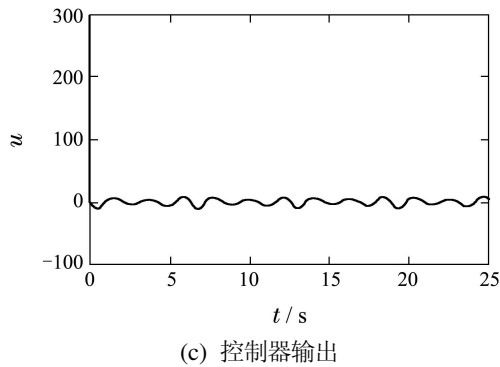


图1 系统输出与控制器历时曲线

Fig. 1 Curves of system output and controller

图1表示系统输出 y 对参考信号 y_r 的自适应跟踪及控制器的历时曲线, 显见实际的输出快速达到并保持期望的输出; 图2则表示Nussbaum增益函数 $N(\tau_1)$ 和 $N(\tau_2)$ 及其参数 τ_1 和 τ_2 的自适应曲线. 上述仿真结果表明本文所设计的控制器具有良好的跟踪性能和稳定性.

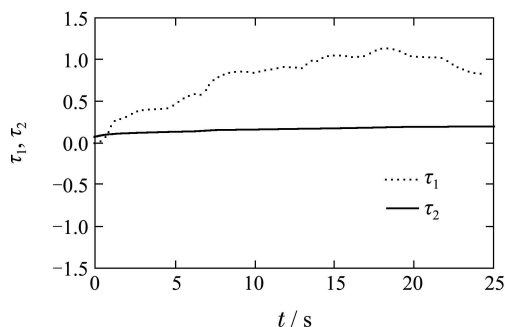
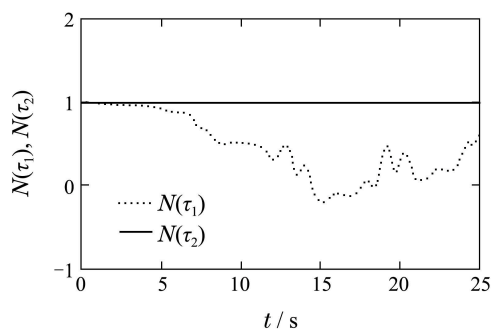
(a) Nussbaum参数 τ_1 和 τ_2 的自适应曲线(b) Nussbaum函数 $N(\tau_1)$ 和 $N(\tau_2)$

图2 Nussbaum函数及其参数仿真曲线

Fig. 2 Curves of Nussbaum function and its parameter

6 结论(Conclusion)

非仿射非线性不确定系统控制一直是控制理论研究的热点和难点. 本文针对一类结构和参数均未知, 且具有为建模动态和外界扰动的非仿射系统, 将其利用中值定理转化具有线性结构的时变系统, 在此基础上, 基于参数投影估计算法和反推设计方法设计鲁棒自适应控制器, 设计中引入低通滤波器解决了计算膨胀问题, 利用Nussbaum增益技术克服了可能存在的控制器奇异值问题. 本文所设计的控制器适应范围广, 结构简单且光滑无抖动, 易于工程实现, 在工程实践中具有潜在的应用和推广价值.

参考文献(References):

- [1] SONG M C, LIN Y. Robust adaptive output-feedback dynamic surface control of a class of nonlinear system with unmodeled dynamics [J]. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(5): 1377 – 1345.
- [2] 贾涛, 刘军, 钱富才. 一类非线性时滞系统的自适应模糊动态面控制 [J]. *自动化学报*, 2011, 37(1): 83 – 91.
(JIA Tao, LIU Jun, QIAN Fucui. Adaptive fuzzy dynamic surface control for a class of nonlinear systems with unknown time-delays [J]. *Acta Automatic Sinica*, 2011, 37(1): 83 – 91.)
- [3] SWAROOP D, HEDRICK J K, YIP P P. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(10): 1893 – 1899.
- [4] 李铁山, 邹早建, 罗伟林. 基于DSC后推法的非线性系统的鲁棒自适应NN控制 [J]. *自动化学报*, 2008, 34(11): 1424 – 1430.
(LI Tieshan, ZOU Zaojian, LUO Weilin. DSC-backstepping based robust adaptive NN control for nonlinear systems [J]. *Acta Automatic Sinica*, 2008, 34(11): 1424 – 1430.)
- [5] CHEN M, GE S S, REN B B. Adaptive tracking control of uncertain MIMO nonlinear systems with input constraints [J]. *Automatica*, 2011, 47(3): 452 – 465.
- [6] 宋永端, 宋琦. 非仿射系统的控制器设计方法综述 [C] //第30届中国控制会议. 烟台: IEEE, 2011: 785 – 790.
(SONG Yongduan, SONG Qi. Survey of the latest developments in control of non-affine systems [C] // *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*. Yantai: IEEE, 2011: 785 – 790.)
- [7] 张强, 吴庆宪, 姜长生, 等. 基于Backstepping的非仿射非线性系统鲁棒控制 [J]. *控制与决策*, 2014, 29(1): 19 – 26.
(ZHANG Qiang, WU Qingxian, JIANG Changsheng, et al. Robust control for nonaffine nonlinear systems based on backstepping [J]. *Control and Decision*, 2014, 29(1): 19 – 26.)
- [8] LABIOD S, GUERRA T M. Adaptive fuzzy control of a class of SISO non-affine nonlinear systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158(10): 1126 – 1137.
- [9] PARK J H, HUH S H, KIM S H. Direct adaptive controller for non-affine nonlinear systems using self-structuring neural networks [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2005, 16(2): 414 – 422.
- [10] LIU Y J, WANG Z F. Adaptive fuzzy controller design of nonlinear systems with unknown gain sign [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 58(4): 687 – 695.
- [11] 周卫东, 廖成毅. 控制方向未知的SISO非仿射系统间接自适应模糊输出反馈控制 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(9): 1131 – 1137.
(ZHOU Weidong, LIAO Chengyi. Indirect adaptive fuzzy output-feedback controller for a SISO nonaffine system with unknown control direction [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1131 – 1137.)
- [12] 杜佳璐, 郭晨. 控制增益未知的船舶航向非线性自适应跟踪控制 [J]. *控制理论与应用*, 2005, 22(2): 315 – 320.
(DU Jialu, GUO Chen. Nonlinear adaptive design for course-tracking control of ship without priori knowledge of control gain [J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(2): 315 – 320.)
- [13] YE X D, JIANG J P. Adaptive nonlinear design without a priori knowledge of control directions [J]. *IEEE Transactions on Automatic Controls*, 1998, 43(11): 1617 – 1621.
- [14] RYAN E P. A universal adaptive stabilizer for a class of nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1991, 16(3): 209 – 218.
- [15] BOSKVOIC J D, CHEN L J, MEHRA R K. Adaptive control design for nonaffine models arising in flight control [J]. *Control and Dynamics*, 2004, 27(2): 209 – 217.

作者简介:

陈龙胜 (1983–), 男, 硕士, 讲师, 目前研究方向为非线性系统控制及应用研究, E-mail: lschen2008@163.com;

王琦 (1963–), 男, 博士, 教授, 硕士生导师, 目前研究方向为控制理论、飞行器多学科优化设计, E-mail: wangqi439@126.com.