第 31 卷第 7 期
2014 年 7 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 31 No. 7
Jul. 2014

DOI: 10.7641/CTA.2014.40162

连续时间多线性动态系统的性能分析

孙振东†

(中国科学院 数学与系统科学研究院 系统控制重点实验室, 北京 100190)

摘要: 多线性动态系统是具有多个线性过程的复杂动态系统, 包括切换线性系统、线性微分包含、线性参数变化系统等多类在系统控制理论中受到广泛关注的系统框架. 本文以连续时间多线性动态系统的性能分析为目标, 以笔者近几年的相关工作为基础, 简要综述一类建立在实矩阵组之上的谱分析方法, 包括矩阵组谱坐标定义, 等价矩阵测度刻画, 基于分段二次诱导测度的估计理论和逼近算法. 作为一个应用例子, 考虑单输入鲁里叶系统的绝对稳定性, 给出基于谱分析方法的判据.

关键词: 多线性动态系统; 性能分析; 谱坐标; 矩阵组公共测度;绝对稳定性

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Performance analysis for continuous-time multilinear dynamic systems

SUN Zhen-dong†

(Key Lab of Systems & Control, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: Multilinear dynamical systems are complex dynamical systems with multiple linear processes, which include switched linear systems, linear differential inclusions and linear parameter-varying systems that have been well-studied in the systems and control societies. This survey article presents a timely integration of spectral analysis for performance estimate of continuous-time multilinear dynamical systems, including the introduction of spectral abscissas for real matrix set, equivalence characteristic via least common matrix measure, and estimate theory and approximation procedures based on piecewise quadratic induced measures. As an implication, we discuss the absolute stability of Lure systems, and present a matrix-measure-based criterion.

Key words: multilinear dynamical systems; performance analysis; matrix set measures; piecewise quadratic induced measures; absolute stability

1 引言(Introduction)

对连续时间线性系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

一个重要的性能估计不等式是

$$\|x(t)\| \leqslant M(t^\kappa + 1)\mathrm{e}^{\gamma t}\|x(0)\|,\ \forall\, t \geqslant 0, \tag{2}$$

其中: γ为系统矩阵A的最大的特征根实部(系统谱坐标), $\kappa + 1$为A的若当标准形中对应于具有最大实部的特征根的(最大)若当块维数, M为常实数, $\|\cdot\|$为任一向量范数. 该估计式对于深入理解系统的渐近和过渡过程性能及系统稳定性等有重要价值. 值得一提的是, 该估计式是几乎处处紧的, 即

$$\limsup_{t\to\infty, x(0)=x_0} \frac{\|x(t)\|}{(t^\kappa + 1)\mathrm{e}^{\gamma t}} > 0,\ \text{对几乎所有}x_0 \neq 0. \tag{3}$$

对离散时间线性系统, 类似的性能估计式仍成立.

对离散时间微分包含系统

$$x(t+1) \in \{A_1x(t), \cdots, A_mx(t)\},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

已经证明存在性能估计式

$$\|x(t)\| \leqslant M(t^\kappa + 1)\rho^t\|x(0)\|,\ \forall\, t = 0, 1, \cdots, \tag{5}$$

其中: ρ为系统矩阵集$\{A_1, \cdots, A_m\}$的谱半径, κ为小于系统维数的非负整数, M为常实数[1–2]. 特别地, 矩阵集$\{A_1, \cdots, A_m\}$的谱半径满足

$$\rho = \limsup_{k\to\infty} \hat{\rho}_k^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} \bar{\rho}_k^{1/k} = \inf_{\|\cdot\|\in\varUpsilon} \max_{i=1}^{m}\{\|A_1\|, \cdots, \|A_m\|\}, \tag{6}$$

其中: $\varUpsilon$为定义在$\mathbb{R}^n$上的向量范数集,

$$\hat{\rho}_k = \max_{i_1,\cdots,i_k=1}^{m} \|\prod_{j=1}^{k} A_{ij}\|,$$

收稿日期: 2014−03−04; 录用日期: 2014−04−19.

†通信作者. E-mail: zhendong.sun@amss.ac.cn; Tel.: +86 10-82541823.

基金项目: 国家重点基础研究“973”计划资助项目(2014CB845302); 国家自然科学基金资助项目(61273121, 60925013).

$$\bar{\rho}_k = \max_{i_1,\cdots,i_k=1}^{m} \rho(\prod_{j=1}^{k} A_{ij}),$$

这里$\rho(B)$为矩阵B的谱半径. 这表明矩阵集的谱半径在离散时间线性微分包含系统性能刻画上具有重要作用. 矩阵集谱半径分析和逼近是近年来的研究热点, 并已取得良好进展, 参见文献[3–4]等.

本文针对连续时间多线性动态系统, 概要综述和集成近来在性能估计领域取得的重要进展, 包括性能不等式和系统块三角分解, 系统谱坐标定义及矩阵集极小公共测度刻画, 基于分段二次型诱导测度的谱坐标逼近算法, 与系统稳定性和绝对稳定性的关系等, 旨在初步建立多线性动态系统的谱方法, 为多线性动态系统的性能估计提供较清晰的框架性图景.

2　预备知识(Preliminaries)

2.1　多线性动态系统(Multi-linear dynamical systems)

多线性动态系统是指具有多个线性过程的动态系统. 本文中, 考虑以下3类连续时间且不含输入的多线性动态系统.

切换线性系统　数学描述为

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \sigma \in \mathcal{M} = \{1,\cdots,m\}, \tag{7}$$

其中切换信号σ良定的, 即在有限时间区间的切换次数有限. 称函数$x:[0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$是系统的一个解, 如果其绝对连续, 且存在良定切换信号$\sigma:[0,\infty) \mapsto \mathcal{M}$使得系统等式(7)几乎处处成立. 记$\Gamma_{\rm s}$为系统的解集, 即系统所有解组成的集合.

线性微分包含系统　数学描述为

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\{A_1 x(t),\cdots,A_m x(t)\},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

其中$\mathrm{co}(B)$是指集B的闭凸包. 称函数$x:[0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$是系统的一个解, 如果其绝对连续, 且系统等式(8)几乎处处成立. 记$\Gamma_{\rm d}$为此微分包含系统的解集.

线性参数变化系统　数学描述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(w(t))x(t),\ x \in \mathbb{R}^n, \\ w \in \{(w_1,\cdots,w_m) \in \mathbb{R}_+^m : \sum\limits_{i=1}^{m} w_i = 1\}, \end{cases} \tag{9}$$

其中: $w(t)$是分段连续的, $A(w) = \sum\limits_{i=1}^{m} w_i A_i$. 称函数$x:[0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$是系统的一个解, 如果其绝对连续, 且存在分段连续的$w(t)$使得系统等式(9)几乎处处成立. 记Γ_p为系统的解集.

以上3类系统都是由矩阵集$\{A_1,\cdots,A_m\}$表征的多线性动态系统. 每个系统框架有各自的工程背景和应用领域, 在过去几十年拥有相对独立的研究群体. 代表性的文献包括文献[5–6](微分包含)、文献[7–8](参数变化系统)、文献[9–10](切换系统).

在以下的讨论中, 记$\mathcal{A} = \{A_1,\cdots,A_m\}$. 对任一实数$\epsilon$, 定义$\mathcal{A}_\epsilon = \{A_1+\epsilon I_n,\cdots,A_m+\epsilon I_n\}$, 这里$I_n$是单位矩阵. 为方便计, 记上述多线性动态系统为$\mathcal{A}$, Γ 为$\Gamma_{\rm s}, \Gamma_{\rm d}, \Gamma_p$的任意一个.

2.2　多线性谱坐标(Multilinear spectral abscissas)

对多线性系统$\mathcal{A}$, 定义非零向量$z \in \mathbb{R}^n$对应的谱坐标为

$$\varrho_z(\mathcal{A}) = \limsup_{t\to\infty, x(\cdot)\in\Gamma, x(0)=z} \frac{\ln\|x(t)\|}{t}. \tag{10}$$

定义系统$\mathcal{A}$的谱坐标集为

$$\Omega = \{\varrho_z(\mathcal{A}) : z \in \mathbb{R}^n,\ z \neq 0\}.$$

对应于每个谱坐标$\varrho \in \Omega$, 定义状态集

$$\Lambda_\varrho = \{z \in \mathbb{R}^n : \varrho_z(\mathcal{A}) \leqslant \varrho\} \cup \{0\}.$$

可以验证Λ_ϱ为$\mathbb{R}^n$的子空间. 这表明谱坐标集的元素数不超过系统维数. 为此, 记

$$\begin{aligned} &\Omega = \{\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_{\rm s}\}, \\ &V_i = \{z \in \mathbb{R}^n : \varrho_z(\mathcal{A}) \leqslant \varrho_i\} \cup \{0\}, \\ &d_i = \dim V_i - \dim V_{i-1},\ V_0 = \{0\}, \\ &\quad i = 1,\cdots,s. \end{aligned}$$

集Ω的最大元素$\varrho_{\rm s}$称为系统(及对应的矩阵集)的谱坐标. 在文献中, 系统谱坐标又称为系统最大Lyapunov指数, 最坏情形收敛率等, 参见文献[11–12]. 对(单一)线性系统, 其谱坐标集为系统矩阵谱对应的实部组成的集合. 因此, 上述谱坐标概念是线性系统谱概念的自然延伸.

2.3　矩阵集测度(Matrix set measure)

记Υ为定义在$\mathbb{R}^n$上的所有向量范数组成的集合. 对每一给定范数$\|\cdot\| \in \Psi$, 定义其诱导的矩阵测度为

$$\mu_{\|\cdot\|}(A) = \limsup_{\tau\to 0^+, \|x\|=1} \frac{\|x+\tau Ax\|-\|x\|}{\tau}. \tag{11}$$

矩阵测度具有以下性质(参见文献[13]): 良定性; 正齐次性; 满足矩阵指数不等式, 即

$$\|\mathrm{e}^{At}z\| \leqslant \mathrm{e}^{\mu_{\|\cdot\|}(A)t}\|z\|,\ \forall\, t \geqslant 0,\ z \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

上述矩阵测度定义可推广到矩阵集测度. 为此, 对矩阵集$\mathcal{A} = \{A_1,\cdots,A_m\}$及范数$\|\cdot\| \in \Psi$, 定义其诱导的矩阵集公共测度(common measure)为

$$\mu_{\|\cdot\|}(\mathcal{A}) = \max\left\{\mu_{\|\cdot\|}(A_1),\cdots,\mu_{\|\cdot\|}(A_m)\right\}. \tag{12}$$

可以验证, 矩阵集公共测度仍具有良定性和正齐次性, 且满足如下矩阵指数不等式:

$$\|x(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{\mu_{\|\cdot\|}(\mathcal{A})t}\|x(0)\|,\ \forall\, t \geqslant 0,\ x(\cdot) \in \Gamma. \tag{13}$$

进一步, 对矩阵集$\mathcal{A} = \{A_1,\cdots,A_m\}$, 定义其极小(公共)测度为

$$\nu(\mathcal{A}) = \inf_{\|\cdot\|\in\Upsilon} \mu_{\|\cdot\|}(\mathcal{A}). \tag{14}$$

若测度μ满足$\mu(\mathcal{A}) = \nu(\mathcal{A})$, 则称$\mu$为$\mathcal{A}$的极端测度(extreme measure).

2.4 多线性系统稳定性(Stability of multilinear systems)

称多线性动态系统$\mathcal{A}$为稳定的, 若存在正实数α及β, 使得

$$\|x(t)\| \leqslant \beta \mathrm{e}^{-\alpha t}\|x(0)\|,\ \forall\, x \in \varGamma,\ t \geqslant 0,$$

称系统是不稳定的. 若存在负实数ϵ, 使得系统$\mathcal{A}_\epsilon$不是稳定的. 其余的情形称为临界情形, 其中若存在正实数β使得

$$\|x(t)\| \leqslant \beta\|x(0)\|,\ \forall\, x \in \varGamma,\ t \geqslant 0,$$

则称系统是临界稳定的, 否则称系统为临界不稳定的.

注意这里稳定性的定义与经典线性系统一致, 与Lyapunov稳定性有区分.

3 性能刻画(Performance characteristics)

与线性系统性能估计式(2)相似, 多线性动态系统也满足几乎完全相同的估计式.

定理 1[14] 对任一多线性动态系统$\mathcal{A}$, 存在非负整数$\kappa_{\mathcal{A}} \leqslant d_{\mathrm{s}} - 1$, 正实数$M$使得估计式

$$\begin{cases} \|x(t)\| \leqslant M(t^{\kappa_{\mathcal{A}}} + 1)\mathrm{e}^{\varrho(\mathcal{A})t}\|x(0)\|, \\ \forall\, x(\cdot) \in \varGamma,\ t \geqslant 0 \end{cases} \tag{15}$$

成立且是几乎处处紧的, 即

$$\begin{cases} \limsup\limits_{t\to\infty, x(0)=x_0, x(\cdot)\in\varGamma} \dfrac{\|x(t)\|}{(t^{\kappa_{\mathcal{A}}}+1)\mathrm{e}^{\varrho(\mathcal{A})t}} > 0, \\ \text{对几乎所有}x_0 \neq 0. \end{cases} \tag{16}$$

该定理深刻揭示了多线性动态系统的性能特征, 其中$\varrho(\mathcal{A})$刻画了系统渐近发散或收敛的最坏速率, 而$\kappa_{\mathcal{A}}$表征临界化系统的多项式发散指数.

当系统谱集$\varOmega$包含多个元素时, 系统在等价坐标变换下具有以下块三角结构形式.

推论 1 存在非奇异矩阵$T \in \mathbb{R}^{n\times n}$使得

$$\bar{A}_i \stackrel{\text{def}}{=} T^{-1}A_iT = \begin{bmatrix} \bar{A}_i^{11} & \bar{A}_i^{12} & \cdots & \bar{A}_i^{1s} \\ 0 & \bar{A}_i^{22} & \cdots & \bar{A}_i^{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{A}_i^{ss} \end{bmatrix},\ i \in \mathcal{M},$$

这里$\bar{A}_i^{jj}$是d_j维方阵; 而且, 对角块对应的低阶多线性动态系统$\bar{\mathcal{A}}^j = \{\bar{A}_1^{jj}, \cdots, \bar{A}_m^{jj}\}$的谱半径为$\varrho_j$, $j = 1, \cdots, s$.

与单一矩阵的若当分解相比, 这里的结构分解是块三角结构而不是块对角结构. 矩阵集是否具有块对角分解, 仍是未解的开问题.

与线性情形类似, 多线性动态系统的稳定性可由其性能估计式完全决定.

推论 2 多线性动态系统$\mathcal{A}$稳定当且仅当$\varrho(\mathcal{A}) < 0$, 不稳定当且仅当$\varrho(\mathcal{A}) > 0$, 临界稳定当且仅当$\varrho(\mathcal{A}) = 0$且$\kappa_{\mathcal{A}} = 0$, 临界不稳定当且仅当$\varrho(\mathcal{A}) = 0$且$\kappa_{\mathcal{A}} \geqslant 1$.

一个有趣的情形是临界情形. 任一多线性动态系统$\mathcal{A}$对应的临界系统是$\mathcal{A}_{-\varrho(\mathcal{A})}$, 称为$\mathcal{A}$的临界化系统. 可以看出, 临界化系统的谱坐标是零, 且$\kappa_{\mathcal{A}_{-\varrho(\mathcal{A})}} = \kappa_{\mathcal{A}}$, 称为临界化指数. 系统临界稳定当且仅当临界化指数等于零. 估计式(15)表明对多线性动态系统而言, 在不稳定和临界不稳定之间存在发散速率的"间隙", 即不存在阶数超过系统维数的多项式发散形式. 这与线性系统情形是一致的.

定理 2[15] 临界不稳定多线性动态系统$\mathcal{A}$是可块三角化的, 即存在正整数$l \geqslant 2$和$k_j,\ j = 1, \cdots, l$, $\sum\limits_{j=1}^{l} k_j = n$, 以及非奇异矩阵$T \in \mathbb{R}^{n\times n}$使得

$$\hat{A}_i \stackrel{\text{def}}{=} T^{-1}A_iT = \begin{bmatrix} \hat{A}_i^{11} & \hat{A}_i^{12} & \cdots & \hat{A}_i^{1l} \\ 0 & \hat{A}_i^{22} & \cdots & \hat{A}_i^{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{A}_i^{ll} \end{bmatrix},\ i \in \mathcal{M}, \tag{17}$$

这里$\hat{A}_i^{jj}$是k_j维方阵, $j = 1, \cdots, l$; 而且, 对角块对应的低阶多线性动态系统$\hat{\mathcal{A}}^j = \{\hat{A}_1^{jj}, \cdots, \hat{A}_m^{jj}\}$, $j = 1, \cdots, l$均是临界稳定的.

该定理表明, 临界不稳定的系统是可简约的(reducible), 即存在非平凡子空间$\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$满足$A_i\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$, $i \in \mathcal{M}$. 注意到不变子空间和系统三角分解在临界化过程中保持不变. 因此, 可得以下推论.

推论 3 若多线性动态系统$\mathcal{A}$是不可简约的, 则有$\kappa_{\mathcal{A}} = 0$.

矩阵集的不可简约性质在文献中已有不少讨论, 参见文献[16–17].

作为刻画多线性动态系统性能的一个最重要指标, 谱坐标$\varrho(\mathcal{A})$以Lyapunov指数等概念受到广泛关注, 但对其进行估计和逼近是非常困难的[18]. 这主要是因为这一指数是定义在系统解的时间极限之上, 需要对系统的解集有显示表征, 而这通常是难以做到的. 为此, 需要寻求该指数的等价表征, 以便对该指数进行有效估计和逼近.

定理 3[19] 任一多线性动态系统$\mathcal{A}$满足

$$\varrho(\boldsymbol{A}) = \nu(\boldsymbol{A}). \tag{18}$$

该定理表明, 对每一个多线性动态系统, 其谱坐标等于对应矩阵集的极小测度. 这为系统谱坐标提供了

一个简洁的等价代数表征. 注意到极小测度定义中没有用到系统(动态)解, 是一个静态的代数极限, 对其估计和逼近不再需要系统解的性质. 该定理可视为线性情形[20]的推广.

推论 4 多线性动态系统$\mathcal{A}$稳定当且仅当$\mathcal{A}$的极小测度为负, 不稳定当且仅当$\mathcal{A}$的极小测度为正, 临界稳定当且仅当$\mathcal{A}$存在零值极端测度, 临界不稳定当且仅当$\mathcal{A}$的极小测度为零且不存在极端测度.

利用矩阵测度研究线性时变或切换线性系统稳定性的文献参见文献[13,21]. 特别地, 利用测度的矩阵指数不等式, 如果系统矩阵在某测度下恒为负, 则对应动态系统是渐近收敛的.

4 估计与逼近(Estimation and approximation)

如上节所述, 直接利用定义通常难以给出多线性系统谱坐标的有效计算. 为解决这一难题, 一个可能的思路是借助定理3, 通过求解系统矩阵集的极小测度对谱坐标进行精准刻画. 这一思路可以避开对系统求解, 但需要寻求对极小测度的有效逼近. 由于测度是由向量范数诱导获得, 可考虑从特定类型的向量范数出发, 求取对应的诱导测度, 再通过适当的优化搜索算法获得对极小测度的有效逼近.

4.1 分段二次型诱导测度(Piecewise quadratic induced measure)

在控制理论中, 二次型Lyapunov函数用于对线性系统进行稳定性分析, 而分段二次型Lyapunov函数则被广泛用于线性系统鲁棒性和多线性系统稳定性的分析和设计中[22–24]. 本小节考虑利用分段二次型函数的平方根作为基础范数:

$$\upsilon_{\mathcal{P}}=\sqrt{\max\{x^{\mathrm{T}}P_1x,\cdots,x^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{s}}x\}}=\max\left\{\sqrt{x^{\mathrm{T}}P_1x},\cdots,\sqrt{x^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{s}}x}\right\},\tag{19}$$

这里$P_1,\cdots,P_{\mathrm{s}}$为实正定矩阵, $\mathcal{P}=\{P_1,\cdots,P_{\mathrm{s}}\}$. 记$\mathcal{S}=\{1,\cdots,s\}$. 对系统矩阵集, 该范数诱导的公共测度为

$$\mu_{\upsilon_{\mathcal{P}}}(\mathcal{A})=\max_{i\in\mathcal{S},\ j\in\mathcal{M}}\left\{\sup_{x\in\Omega_i,x\neq0}\frac{x^TQ_{ij}x}{2x^{\mathrm{T}}P_ix}\right\},\tag{20}$$

这里:

$$Q_{ij}=A_j^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_j,\ i\in\mathcal{S},\ j\in\mathcal{M},$$
$$\Omega_i=\{x\in\mathbb{R}^n: x^{\mathrm{T}}P_ix\geqslant x^{\mathrm{T}}P_jx,\forall j\in\mathcal{S}\}.$$

定理 4[25] 对任意给定的多线性动态系统$\mathcal{A}$及正实数ϵ, 存在正整数s和实正定矩阵集$\mathcal{P}=\{P_1,\cdots,P_{\mathrm{s}}\}$满足

$$\mu_{\upsilon_{\mathcal{P}}}(\mathcal{A})<\nu(\boldsymbol{A})+\epsilon.$$

该定理表明分段二次型诱导测度具有逼近矩阵集极小测度的能力, 亦即可通过对分段二次型诱导测度的适当搜寻获得对多线性谱坐标任意精度的逼近.

给定正整数s. 以$\mathcal{P}$为待定参数, 在对应的分段二次型诱导测度中寻求最小测度:

$$\begin{aligned}&\gamma_{\inf}=\inf\gamma,\\&\text{s.t. } x^{\mathrm{T}}Q_{ij}x-2\gamma x^{\mathrm{T}}P_ix<0,\\&\quad\forall\, x\in\Omega_i,\ i\in\mathcal{S},\ j\in\mathcal{M}.\end{aligned}\tag{21}$$

注意到Ω_i通常是非凸的, 因此上述优化问题难以有效求解. 为此, 借助于S-Procedure, 可将上述问题转化为矩阵不等式[26]

$$\begin{aligned}&\inf\ \gamma,\\&\text{s.t. } Q_{i1}-\sum_{j=1,j\neq i}^{s}\beta_{i,j}^1(P_i-P_j)<2\gamma P_i,\\&\quad Q_{i2}-\sum_{j=1,j\neq i}^{s}\beta_{i,j}^2(P_i-P_j)<2\gamma P_i,\\&\quad\vdots\\&\quad Q_{im}-\sum_{j=1,j\neq i}^{s}\beta_{i,j}^m(P_i-P_j)<2\gamma P_i,\\&\quad\beta_{i,j}^k\geqslant0,\\&\quad i,j\in\mathcal{S},\ i\neq j,\ k\in\mathcal{M}.\end{aligned}\tag{22}$$

当$s=2$时, 问题(22)与问题(21)有相同的最优值. 当$s>2$时, 问题(22)的解值可能比问题(21)的解值大. 即S-Procedure的引入可带来保守性. 矩阵不等式(22)双线性的, 可利用已有的仿真软件进行求解.

4.2 其他方法(Other approaches)

平方和技术 平方和多项式一般定义为多项式平方的和. 平方和型的齐次多项式可用以逼近任意的向量范数, 且逼近的精度随着齐次多项式阶数的升高而提高[27]. 因此, 平方和型的齐次多项式可逼近系统在给定范数下的测度. 进而, 也可逼近系统在所有向量范数下的极小测度. 给定平方和阶数, $\mathbb{R}^n$上所有的齐次平方和型多项式集合是一个凸锥. 从而, 系统极小测度的逼近问题为一个凸优化问题. 具体而言, 平方和可通过关于多项式的二次型进行等价表征. 利用矩阵测度定义$\dfrac{\|x+\tau Ax\|-\|x\|}{\tau}$对$\tau$的单调性质, 对每个平方和可近似求取相对应的矩阵测度. 通过二次型基底矩阵的寻优, 可得到系统矩阵集在所有近似矩阵测度中的极小公共测度, 由此作为系统谱坐标的一个上界估计.

以上算法的精度不仅依赖于所搜索的平方和阶数大小, 还与子系统矩阵的特征值分布有密切关系, 特征值越集中, 离虚轴越远, 逼近精度越高[26].

代数变换法 求解极小测度需要在一类矩阵测度中寻优, 而目前对矩阵测度的理解还不够深入, 求解矩阵测度寻优问题通常缺乏有效的算法. 另一方面, 一些特定的矩阵测度, 如μ_1–测度(从ℓ_1范数诱导的测度)等则容易求取. 因此, 一个可能的思路是利用代数

变换后的μ_1–测度逼近极小测度, 如以下引理所述.

引理 1[28] 对任意给定的多线性动态系统$\mathcal{A}$及正实数ϵ, 存在正整数$r \geqslant n$, $n \times r$维行满秩实阵T及$r \times r$维实阵H_k, $k \in \mathcal{M}$满足

$$A_k T = T H_k,\ k \in \mathcal{M}, \tag{23}$$

$$\mu_1(\{H_1, \cdots, H_m\}) < \varrho(\mathbf{A}) + \epsilon. \tag{24}$$

由上述引理可以看出, 通过适当的代数变换可以把极小测度的求解化为变换后矩阵集的μ_1–测度寻优. 由于变换矩阵通常是非方的(列数大于行数), 代数变换不一定是等价的. 从几何上看, 可视为利用凸多面体逼近矩阵集测度的水平集(level set), 变换矩阵的列数越多, 对应的凸多面体的面数越多, 对水平集的逼近能力越强. 由于水平集是凸的, 通过适当的凸多面体可以对其实现任意精度的逼近. 从矩阵方程上看, 随着变换矩阵列数的增加, 变换后的矩阵集$\{H_1, \cdots, H_m\}$在满足变换方程(23)的前提下有更多的可选性, 从而可获得更小的公共μ_1测度.

当代数变换是等价变换时, 利用非奇异矩阵可表述为初等变换的乘积这一事实, 通过对各类初等变换下矩阵集μ_1测度的变化特征寻求使μ_1测度递降的递推变换. 这方面的初步工作见文献[28]. 利用非方代数变换寻求μ_1测度优化的文献还未见报道.

5 应用例子(Application examples)

5.1 绝对稳定性(Absolute stability)

鲁里叶系统是线性系统在扇区非线性输出反馈下的闭环系统, 是一类典型的非线性控制系统. 称鲁里叶系统(在给定扇区)是绝对稳定的, 如果系统在任一满足扇区约束条件的输出反馈下全局渐近稳定. 自20世纪40年代以来, 鲁里叶系统绝对稳定性问题吸引了众多出色学者的长期关注, 成为非线性控制系统最经典的公开问题, 为解决该问题所发展的理论方法(如波波夫判据和KY引理等)极大地推动了非线性控制理论的发展[29–30]. 该问题非常具有挑战性, 直到21世纪初才解决了二阶系统的判别问题[31], 三阶系统也已发展了有效的算法判据[26,32], 但四阶及以上还没有一般性的完全(充分必要)的可验证判据.

单输入单输出鲁里叶系统的数学描述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b\varphi(y),\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}, \\ y(t) = cx(t),\ 0 \leqslant y\varphi(y) < ky^2, \end{cases} \tag{25}$$

其中: A为Hurwitz阵, (A, b)可控, (c, A)可观. 绝对稳定性问题是寻求最大的$\bar{k}$, 使得对任意$k < \bar{k}$, 鲁里叶系统是$[0, k]$绝对稳定的. 如果对任意正整数k, 鲁里叶系统$[0, k]$绝对稳定, 则$\bar{k} = +\infty$.

记$B = A + kbc$. 若A和B存在公共Lyapunov函数, 则鲁里叶系统在$[0, k]$扇区绝对稳定, 反之亦然[22,33]. 这表明鲁里叶绝对稳定性问题可视作多线性动态系统稳定性的一个特例. 由此, 可得到以下判据.

推论 5 任意给定正数k. 若$\varrho(\{A, B\}) < 0$, 则系统在$[0, k]$扇区绝对稳定; 若$\varrho(\{A, B\}) = 0$, 则$\bar{k} = k$; 若$\varrho(\{A, B\}) > 0$, 则系统在$[0, k]$扇区不是绝对稳定的.

注意到矩阵B与A秩差为1, 这为极小测度的求解可能提供有效的求解算法. 特别地, 由定理2可以推出, 当$\varrho(\{A, B\}) = 0$时矩阵集$\{A, B\}$临界稳定. 这表明不会发生临界不稳定的情形.

5.2 其他应用(Other implications)

由于系统谱坐标是对切换线性系统在任意切换下最坏渐近性能的刻画, 显见其可以作为受约束切换线性系统的性能估计的上界, 即受约束切换线性系统的解仍满足估计式(15), 但该估计通常不是紧的. 作为一个推论, 若一矩阵集的极小测度为负, 那么对应的受约束切换线性系统必然稳定.

可纳入受约束切换线性系统框架表述的系统类型包括:

分段线性系统:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t),\ x(t) \in \Theta_i,\ i \in \mathcal{M},$$

其中: $\Theta_i \subset \mathbb{R}^n,\ i \in \mathcal{M}$.

跳变线性系统:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t),$$

其中$\sigma(t)$是取值于$\mathcal{M}$的随机过程.

模糊逻辑系统:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i(x) A_i x(t),$$

其中$\delta_i(x), i \in \mathcal{M}$是满足$\sum\limits_{i=1}^{m} \delta_i(x) = 1, \forall\, x$的模糊隶属函数.

6 结语(Conclusions)

本文简要回顾了多线性动态系统性能分析的主要进展, 重点介绍了作为最大发散率的矩阵集谱坐标的等价刻画和估计逼近. 这方面的研究在近几年逐步得以发展, 已形成初步的框架结构. 但相关的进展还很不完善, 许多基本问题有待进一步研究. 以下是几个尚待研究的开问题:

1) 矩阵集谱坐标集的刻画和谱坐标重数的确定;

2) 利用迭代算法求解矩阵集谱坐标/极小测度;

3) 具有特定性质(比如秩差为1)矩阵集的谱坐标刻画;

4) 逼近算法的估计精度及停止条件分析;

5) 临界情形的分析和分类[15,34].

参考文献(References):

[1] BELL J P. A gap result for the norms of semigroups of matrices [J]. *Linear Algebra and Applications*, 2005, 402(1/2/3): 101 – 110.

[2] LUR Y Y. A note on a gap result for norms of semigroups of matrices [J]. *Linear Algebra and Applications*, 2006, 419(2/3): 368 –

372.

[3] ELSNER L. The generalized spectral-radius theorem: an analytic-geometric proof [J]. *Linear Algebra and Applications*, 1995, 220: 151 – 158.

[4] BLONDEL V D, NESTEROV Y. Computationally efficient approximations of the joint spectral radius [J]. *SIAM Journal on Matrix Aanlysis & Applications,* 2005, 27(1): 256 – 272.

[5] AUBIN J P, CELLINA A. *Differential Inclusions* [M]. Berlin: Springer, 1984.

[6] SMIRNOV G V. *Introduction to the Theory of Differential Inclusions* [M]. Berlin: Springer, 2001.

[7] WU F. *Control of linear parameter varying systems* [D]. Berkeley: University of California at Berkeley, 1995.

[8] TÓTH R. *Modeling and Identification of Linear Parameter-Varying Systems* [M]. Berlin: Springer, 2010.

[9] LIBERZON D. *Switching in Systems and Control* [M]. Boston: Birkhauser, 2003.

[10] SUN Z, GE S S. *Switched Linear Systems: Control and Design* [M]. London: Springer, 2005.

[11] OSELEDEC V I. A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems [J]. *Transactions of Moscow Mathematics Society*, 1968, 19: 197 – 231.

[12] SUN Z, SHORTEN R N. On convergence rates of simultaneously triangularizable switched linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(8): 1224 – 1228.

[13] VIDYASAGAR M. On matrix measures and convex liapunov functions [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1978, 62(1): 90 – 103.

[14] SUN Z. A note on marginal stability of switched systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(2): 625 – 631.

[15] CHITOUR Y, MASON P, SIGALOTTI M. On the marginal instability of linear switched systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(6): 747 – 757.

[16] AL'PIN Y A, IKRAMOV K D. Reducibility theorems for pairs of matrices as rational criteria [J]. *Linear Algebra and Applications*, 2000, 313(1/2/3): 155 – 161.

[17] RADJAVI H, ROSENTHAL P. *Simultaneous Triangularization* [M]. New York: Springer, 2000.

[18] Arnold L, Wihstutz V. Lyapunov exponents: a survey[M] //ARNOLD L, WIHSTUTZ V. *Proceedings of a Workshop held in Bremen*. Berlin: Springer, 1986: 1 – 26.

[19] SUN Z. Matrix measure approach for stability of switched linear systems [C] //*Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*. Laxenburg: IFAC, 2007: 557 – 560.

[20] ZAHREDDINE Z. Matrix measure and application to stability of matrices and interval dynamical systems [J]. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003, 2: 75 – 85.

[21] LI Z, SOH Y, WEN C. Sufficient conditions for almost sure stability of jump linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(7): 1325 – 1329.

[22] MOLCHANOV A P, PYATNITSKIY Y S. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory [J]. *Systems & Control Letters*, 1989, 13(1): 59 – 64.

[23] XIE L, SHISHKIN S, FU M Y. Piecewise Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1997, 31(3): 165 – 171.

[24] HU T, LIN Z. Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(3): 440 – 450.

[25] XIONG J D, SUN Z D. A piecewise quadratic induced measure approach for approximating the largest divergence rate of switched linear systems [C] //*The 2014 Chinese Control Conference*. Nanjing: IEEE, 2014.

[26] XIONG J, SUN Z. Accurate estimation of the largest divergence rate for a class of the 3rd-order switched linear systems [J]. *Journal of Control & Applications*, 2013, 11(3): 513 – 516.

[27] CHESI G, GARULLI A, TESI A, et al. *Homogeneous Polynomial Forms for Robustness Analysis of Uncertain Systems* [M]. New York: Springer, 2009.

[28] LIN M L, SUN Z D. Calculation of the least L1 measure for switched-linear systems via similarity transformation [C] //*The 9th Asian Control Conference (ASCC)*. Istanbul, Turkey: IEEE, 2013: 1 – 6. DOI: 10.1109/ASCC.2013.6606119.

[29] LIBERZON M. Essays on the absolute stability theory [J]. *Automation & Remote Control*, 2006, 67(10): 1610 – 1644.

[30] 黄琳, 杨莹, 耿志勇, 等. 系统动态性能的多样性分析与控制——后绝对稳定性研究 [J]. 控制理论与应用, 2004, 21(6): 966 – 974.
(HUANG Lin, YANG Ying, GENG Zhiyong, et al. Analysis & control of diversity of system dynamic properties: on the post–absolute stability [J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(6): 966 – 974.)

[31] MARGALIOT M, LANGHOLZ G. Necessary and sufficient conditions for absolute stability: the case of second-order systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits & Systems I*, 2003, 50(2): 227 – 234.

[32] MARGALIOT M, YFOULIS C. Absolute stability of third-order systems: a numerical algorithm [J]. *Automatica*, 2006, 42(10): 1705 – 1711.

[33] MOLCHANOV A P, PYATNITSKIY Y S. Lyapunov functions defining the necessary and sufficient conditions for absolute stability of the nonlinear control systems, I, II, III [J]. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1986, 3: 63 – 73; 4: 5 – 15; 5: 38 – 49.

[34] GAYE M, CHITOUR Y, MASON P. Properties of Barabanov norms and extremal trajectories associated with continuous-time linear switched systems [C] //*IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2013: 716 – 721.

作者简介:

孙振东 (1968–), 男, 第6届(2000年)《关肇直奖》获奖论文作者, 研究员, 主要研究方向包括混合动态系统分析与控制、多机器人协调优化、微纳机电系统控制集成等, E-mail: zhendong.sun@amss.ac.cn.