

# 基于最小拍观测器的自抗扰控制器设计与性能分析

张 超<sup>1,2</sup>, 朱纪洪<sup>1†</sup>, 高亚奎<sup>2</sup>

(1. 清华大学 计算机技术与科学系; 智能技术与系统国家重点实验室; 清华信息科学与技术国家实验室, 北京 100084;

2. 中航工业第一飞机设计研究院 飞控与液压研究室, 陕西 西安 710089)

**摘要:** 自抗扰控制器设计中, 扩张状态观测器需要较高的观测带宽, 才能更快的观测出状态变量. 本文采用最小拍观测器, 使得其具有最快的观测速度. 以 2 阶系统为例, 得到了离散系统下, 基于最小拍观测器的自抗扰控制器的等价复合控制模型, 其开环补偿器等价为超前校正器. 仿真结果表明, 基于最小拍观测器的自抗扰控制器可以最快的观测出系统状态变量, 且控制器带宽的选取一般应小于采样周期的倒数. 由于不再需要设计观测器带宽, 从而简化了参数设计.

**关键词:** 自抗扰控制器; 最小拍观测器; 数字控制; 复合控制系统; 频域分析

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Active disturbance rejection controller based on deadbeat observer design and performance analysis

ZHANG Chao<sup>1,2</sup>, ZHU Ji-hong<sup>1†</sup>, GAO Ya-kui<sup>2</sup>

(1. State Key Laboratory on Intelligent Technology & Systems; Tsinghua National Laboratory for Information Science & Technology; Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Department of Flight Control and Hydraulic, First Aircraft Institute of AVIC, Xi'an Shaanxi 710089, China)

**Abstract:** In active disturbance rejection controller (ADRC) design, extended state observers (ESO) always require a higher bandwidth to observe state variables faster. This paper replaces original ESO by deadbeat observer and makes the fastest observation speed. Take second order plant as an example, the discrete ADRC based on deadbeat observer equivalent complex control model is given, and the open-loop compensator works like lead corrector. Simulation results verified the fastest observation speed and the controller bandwidth should be less than the reciprocal of sampling time. The ADRC control based on deadbeat observer process is easier as the ESO bandwidth design is no longer needed.

**Key words:** ADRC; deadbeat observer; digital control; composite control system; frequency analysis

### 1 引言(Introduction)

自抗扰控制器的基本原理如图 1 所示, 其利用扩张状态观测器, 观测出系统的未建模误差和未知扰动, 并通过控制器补偿, 将系统转化为串联积分器型. 由于自抗扰控制器不需要精确的物理模型, 且对外界干扰具有很好的抑制作用, 因而具有很好的工程应用前景<sup>[1-3]</sup>. 目前已广泛应用于电机控制、飞行控制等众多领域<sup>[4-6]</sup>.

线性自抗扰控制器由于简单的实现方式和优良的控制性能, 获得了众多研究学者的青睐. 文献[7-8]对线性自抗扰控制下闭环系统的输入输出稳定性进行了研究; 文献[9]在频域分析的基础上, 得到了当系统的输入估计与真实值的比值在一定范围内时, 只要观

测器带宽大于控制器增带宽时, 闭环系统即可以稳定的结论表明观测器带宽的重要性.

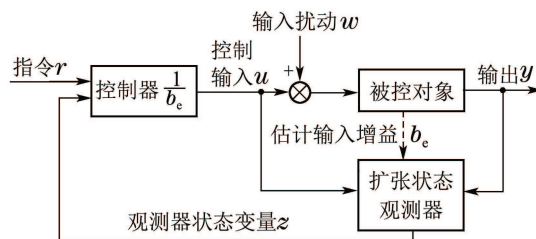


图 1 自抗扰控制器控制框图

Fig. 1 Active disturbance rejection controller block

但是在实际系统中, 当观测器带宽过大时, 或者采

收稿日期: 2014-03-10; 录用日期: 2014-05-15.

†通信作者. E-mail: jhzhu@tsinghua.edu.cn; Tel.: +86 10-62796706.

国家自然科学基金项目(61104082)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61104082).

样周期不合适时, 闭环系统往往会发散, 使得频域(或时域)下调节到的参数, 并不适用于离散域. 文献[10]给出了高增益观测器、滑模观测器和非线性扩张状态观测器, 并对系统的性能和特征进行了对比研究. 文献[11]将时域的自抗扰控制器进行了离散化, 并分别就不同离散方法下系统的跟踪性能进行了对比分析.

在离散系统中, 最小拍观测器可以使系统最快地观测到未知状态变量, 同时避免了观测器参数选取的问题. 因此, 本文提出了基于最小拍观测器的自抗扰控制器(下面简称最小拍-自抗扰控制器), 即将扩张状态观测器的极点均配置到离散域( $z$ 域)的原点. 并与常规方法进行了对比分析.

本文的安排如下: 在第2节中, 对自抗扰控制器进行了离散化设计; 在第3节中, 得到了离散自抗扰控制器的等效复合控制模型, 给出了典型2阶系统的具体表达式, 并进行了性能分析; 在第4节中, 以典型电机模型为例, 给出了采用基于最小拍的自抗扰控制器的效果分析; 最后给出了总结并提出了最小拍-自抗扰控制器的一般设计准则.

## 2 自抗扰控制离散化(Active disturbance rejection controller (ADRC) discretization)

### 2.1 系统时域表达(Plant time-domain expressions)

一般对于 $n$ 阶线性时不变系统, 其输入输出间传递函数表达式为

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}, \quad n \geq m. \quad (1)$$

记 $f = -a_1 y^{(n-1)} - \cdots - a_n y + b_0 u^{(m)} + \cdots + b_{m-1} \dot{u} + (b_m - b_e)u$ 为系统的扩张状态变量, 其中 $b_e$ 为输入系数 $b_m$ 的近似.

此时可将式(1)写成状态空间表达式, 有

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ef, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (2)$$

其中系统状态变量 $x$ 定义如下:

$$x = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})^T = (y^{(0)}, \cdots, y^{(n-1)}, f)^T, \\ A, B, C, E \text{ 为维数合适的矩阵, 元素分别为}$$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \begin{cases} 1, & i = j - 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ b_i &= \begin{cases} b_e, & i = n, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ c_i &= \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ e_i &= \begin{cases} 0, & \text{其他}, \\ 1, & i = n + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

### 2.2 离散ADRC设计(Discrete ADRC design)

根据式(2), 设计现时状态观测器

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L_p(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{y}(k) = H \hat{x}(k), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $L_p$ 为观测器增益, 为 $(n+1) \times 1$ 维向量, 设系统的采样周期为 $T$ (当 $T$ 为上标时, 表示矩阵的转置), 有

$$\Phi = e^{AT}, \quad \Gamma = \left( \int_0^T e^{At} dt \right) B, \quad H = C. \quad (4)$$

易知扩张状态观测器的特征多项式为

$$\lambda(z) = |zI - (\Phi - L_p H)|, \quad (5)$$

当 $\lambda(z) = z^{n+1}$ 时, 为最小拍观测器, 此时观测器具有最快的观测速度.

根据文献[11], 定义 $L_p = \Phi L_c$ , 并采用如下修正值作为 $x(k)$ 的状态估计值:

$$\bar{x}(k) \triangleq \hat{x}(k) + L_c(y(k) - \hat{y}(k)). \quad (6)$$

此时, 设计控制器为

$$\begin{cases} u = \frac{-\bar{x}_{n+1} + u_0}{b_e}, \\ u_0 = p_n(r - \bar{x}_1) + p_{n-1}(-\bar{x}_2) + \cdots + p_1(-\bar{x}_n), \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $p_1, \cdots, p_n$ 为控制器增益,  $r$ 为指令信号. 定义 $P = (p_n, p_{n-1}, \cdots, p_1, 1)$ , 则式(7)可以写成

$$u(k) = \frac{p_n r(k) - P \bar{x}(k)}{b_e}. \quad (8)$$

至此, 离散系统的ADRC设计完成.

## 3 闭环特性分析(Closed-loop properties analysis)

### 3.1 等效的复合控制(Equivalent complex control)

设式(1)的离散形式为

$$y(k) = G(z)u(k). \quad (9)$$

结合式(3)(6)(8)–(9), 此时系统的闭环传递函数为

$$\begin{aligned} \frac{y(k)}{r(k)} &= \frac{p_n G(z)}{p_n G(z) / (P[(I - L_c H)(zI - \Phi + L_p H)^{-1} \cdot \\ &\quad (\Gamma + L_p G(z)) + L_c G(z)] + b_e)}, \end{aligned} \quad (10)$$

对2阶系统而言, 根据式(2)和式(4), 有

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = b_e \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \ 0 \ 0]. \quad (11)$$

设系统的观测器增益为 $L_p = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ . 代入式(5), 得此时观测器的特征方程为

$$\begin{aligned} \lambda(z) = & z^3 + (\beta_1 - 3)z^2 + \\ & \left(\frac{T^2}{2}\beta_3 + \beta_2 T - 2\beta_1 + 3\right)z + \\ & (2^{-1}\beta_3 T^2 - \beta_2 T + \beta_1 - 1), \end{aligned} \quad (12)$$

将特征方程的根都配置到原点, 有

$$\beta_1 = 3, \beta_2 = \frac{5}{2T}, \beta_3 = \frac{1}{T^2}. \quad (13)$$

根据定义, 知此时

$$L_c = \Phi^{-1} L_p = (1, \frac{3}{2T}, \frac{1}{T^2})^T. \quad (14)$$

将式(11)(14)代入式(10), 可知2阶系统的基于最小拍观测器的ADRC控制器的等效形式为

$$\frac{y(k)}{r(k)} = C_1(z) \frac{C_2(z)G(z)}{1 + C_2(z)G(z)}, \quad (15)$$

其中:

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{2p_2 T^2 z^2}{(2p_2 T^2 + 3p_1 T + 2)z^2 - (4p_1 T + 4)z + (p_1 T + 2)}, \\ C_2 = & \frac{(2p_2 T^2 + 3p_1 T + 2)z^2 - (4p_1 T + 4)z + (p_1 T + 2)}{b_e T^2 (z - 1)(2z + 2^{-1}p_1 T + 1)}. \end{aligned}$$

可见, 此时系统可以等效为图2所示的复合控制系统, 其中:  $C_1$ 为前置滤波控制器,  $C_2$ 为开环补偿器. 系统的稳定性取决于等效开环系统的特性, 因此与 $C_2$ 的特性密切相关; 而 $C_1$ 则主要决定着系统的跟踪特性. 下面采用经典控制方法可以对其进行研究.

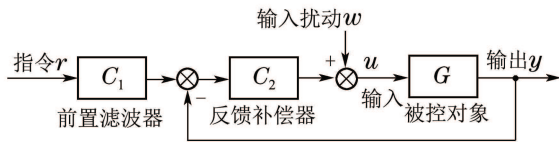


图 2 2阶最小拍-自抗扰控制等效控制框图

Fig. 2 Second order deadbeat-ADRC equivalent control block

### 3.2 控制器频域分析(Controller frequency-domain analysis)

为进一步研究最小拍-自抗扰控制器的动态特性, 将等效的前置滤波器 $C_1$ 和开环补偿器 $C_2$ 分别进行 $w$ 变换, 转到 $w$ 平面内, 有

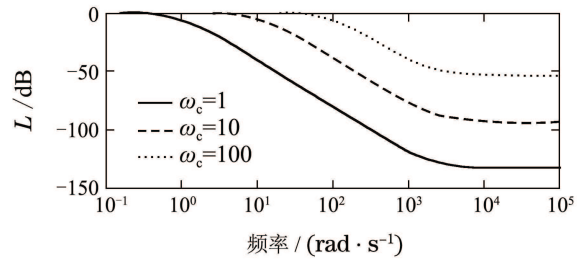
$$\begin{aligned} C_1(w) = C_1(z)|_{z=\frac{2/T+w}{2/T-w}} = & \frac{\alpha^2(wT + 2)^2}{(\alpha^2 + 8\alpha + 4)(wT)^2 + (4\alpha^2 + 8\alpha)(wT) + 4\alpha^2}, \\ C_2(w) = & \frac{(\alpha^2 + 8\alpha + 4)(wT)^2 + (4\alpha^2 + 8\alpha)(wT) + 4\alpha^2}{b_e T^2 (wT) [(1 - \alpha)(wT) + 2(\alpha + 3)]}, \end{aligned}$$

其中:

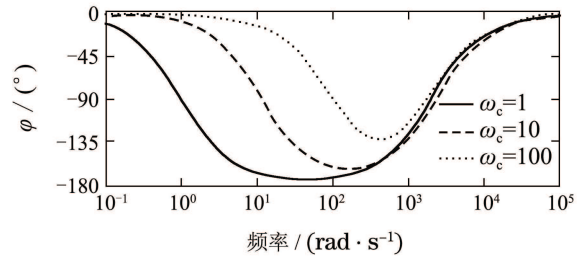
$$\alpha = \omega_c T, \quad p_2 = \omega_c^2, \quad p_1 = 2\omega_c,$$

$\omega_c$ 为控制器的带宽.

可见, 前置滤波器的稳态增益为1, 补偿器存在一阶积分环节, 可以有效的消除静态误差. 此外,  $\alpha$ 主要决定着补偿器的极点和零点分布, 从而影响系统的频域特性. 而 $b_e$ 则表现为补偿器的增益, 对系统的开环增益有着重要的作用. 不失一般性, 设 $b_e = 1$ , 并取采样周期 $T = 0.001$  s, 在不同的控制器带宽下, 前置滤波器和补偿器的伯德图如图3所示.

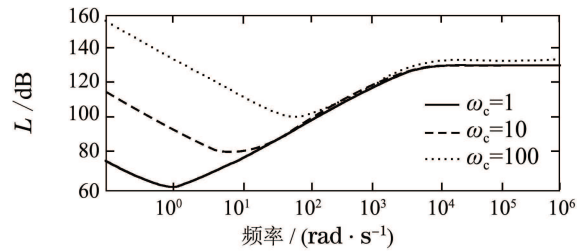


频率 / (rad · s<sup>-1</sup>)

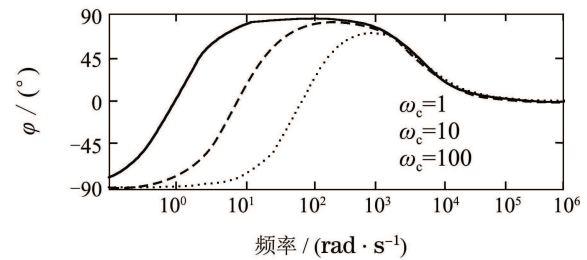


频率 / (rad · s<sup>-1</sup>)

(a)  $C_1(w)$



频率 / (rad · s<sup>-1</sup>)



频率 / (rad · s<sup>-1</sup>)

(b)  $C_2(w)$

图 3 2阶控制器的伯德图

Fig. 3 Second order controller bode diagram

从图3知, 前置滤波器 $C_1$ 的作用类似于一个滞后补偿器, 而开环补偿器 $C_2$ 的作用类似于一个超前补偿器. 且随着 $\omega_c$ 的增大,  $C_1$ 的高频增益减小,  $C_2$ 的低频增益减小, 且对应的相位滞后段/超前段变宽.

需要说明的是, 当 $\omega_c$ 过大, 以至于 $\alpha = \omega_c T > 1$ 时,

$C_2$ 不稳定, 具有非最小相位特性. 此时其相频特性将会有较大的变化, 上述结论将不再适用. 因此, 一般要求  $\omega_c \leq 1/T$ .

### 3.3 跟踪误差分析(Tracking error analysis)

由式(15), 此时系统的跟踪误差传递函数为

$$\frac{e(k)}{r(k)} = \frac{r(k) - y(k)}{r(k)} = \frac{1 + (C_2 - C_1 C_2)G}{1 + C_2 G}. \quad (16)$$

对于常值或者阶跃输入, 根据终值定理知, 系统的稳态误差为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{e(k)}{r(k)} \frac{z}{z - 1} = 0. \quad (17a)$$

同样的, 应用终值定理, 可知对于斜坡输入而言, 其稳态误差为

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= \\ \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{e(k)}{r(k)} \frac{Tz}{(z - 1)^2} &= \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{b_e T (3 + 2^{-1} p_1 T) + 2p_1 G(z)}{2p_2 G(z)} &\approx \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2p_1 G(z)}{2p_2 G(z)} &= \frac{2}{\omega_c}. \end{aligned} \quad (17b)$$

一般情况下, 由于系统的稳态增益不会太低, 当原系统存在积分器时更是趋向无穷大; 而采样周期的选取则一般较小, 因此上述近似是成立的.

由式(17)知, 采用基于最小拍观测器的ADRC控制器, 对常值或阶跃信号的跟踪误差为0, 对斜坡信号, 跟踪误差为常数, 且随着  $\omega_c$  的增大而显著减小. 因而系统具有良好的跟踪特性.

### 4 仿真分析(Simulation analysis)

以典型电机模型为例进行仿真分析:

$$G(s) = \frac{b}{s(s + a)} = \frac{23.2}{s(s + 1.41)}, \quad (18)$$

其中在  $t = 2$  s时刻, 输入有幅值为-1.16的阶跃扰动.

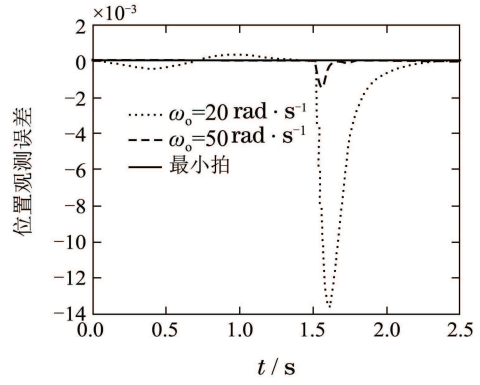
#### 4.1 不同观测器带宽对比(Comparison of observer bandwidth)

对于式(18)表征的电机模型, 选择控制参数

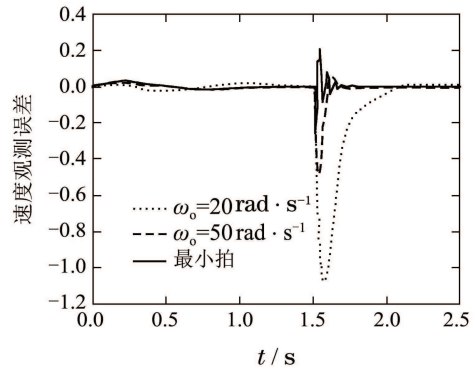
$$b_e = 23, \omega_c = 10 \text{ rad/s}, T = 0.01 \text{ s},$$

在不同的观测器带宽和本文所提出的基于最小拍观测器的ADRC控制器下, 进行仿真, 得到的结果见图4.

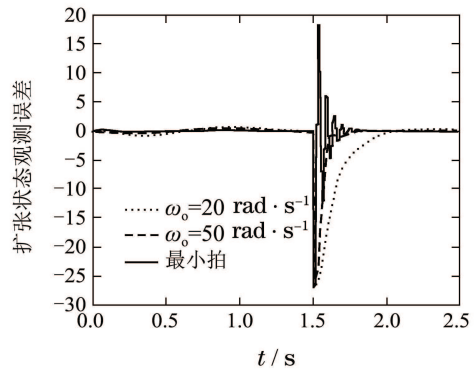
由图4知, 观测器带宽越大, 系统的跟踪误差越好, 也越快观测到各状态的值. 且此时对于输入而言, 其区别也不大.



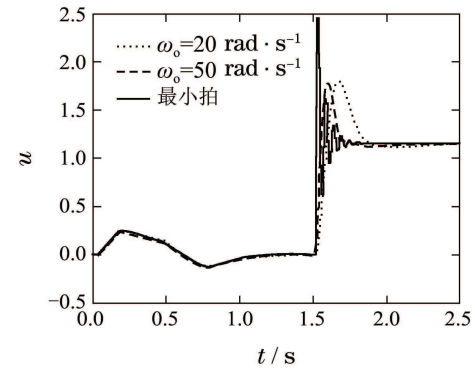
(a) 位置观测误差



(b) 速度观测误差



(c) 扩张状态观测误差



(d) 输入

图4 不同观测器带宽与最小拍-自抗扰控制结果对比  
Fig. 4 Results comparison of ADRC control among different observer bandwidths and the deadbeat-ADRC

需要说明的是, 观测器带宽越大, 系统的输出和输入对噪声越敏感. 因此一般情况下, 采用基于最小拍观测器的ADRC对系统进行控制时, 需在系统的输出端增加滤波器. 但对于常规ADRC而言, 由于带宽有限, 同时也起到了一定的滤波作用, 因此即使不增加额外的滤波器, 也可以得到很好的控制效果.

#### 4.2 不同控制器带宽对比(Comparison of controller bandwidth)

对式(18)所表征的系统, 均采用最小拍观测器, 设定采样周期 $T = 0.01$  s,  $b_e = 23$ , 此时分别设定控制器带宽 $\omega_c = 5, 10, 15$  rad/s, 得到结果如图5所示.

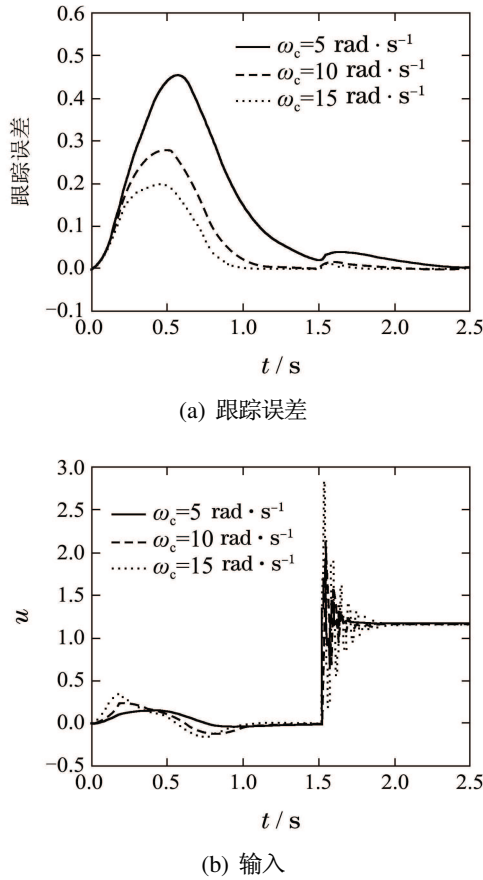


图5 最小拍-自抗扰控制在不同控制器带宽结果对比  
Fig. 5 Comparison of deadbeat-ADRC control results with different controller bandwidth

由图5可见, 当控制器增益 $\omega_c$ 越大时, 系统的跟踪误差越小, 同时输入扰动对输出的影响也越小, 甚至可以忽略. 同时, 由于扰动引起的输入变化也越大, 稳定时间也越长. 当控制器增益 $\omega_c$ 过大时, 系统会不稳定.

#### 4.3 不同采样周期对比(Comparison of sampling time)

同上, 采用最小拍观测器, 设定控制器带宽为 $\omega_c = 5$  rad/s, 分别设定采样周期 $T = 0.005, 0.01, 0.02$  s, 得到结果如图6所示.

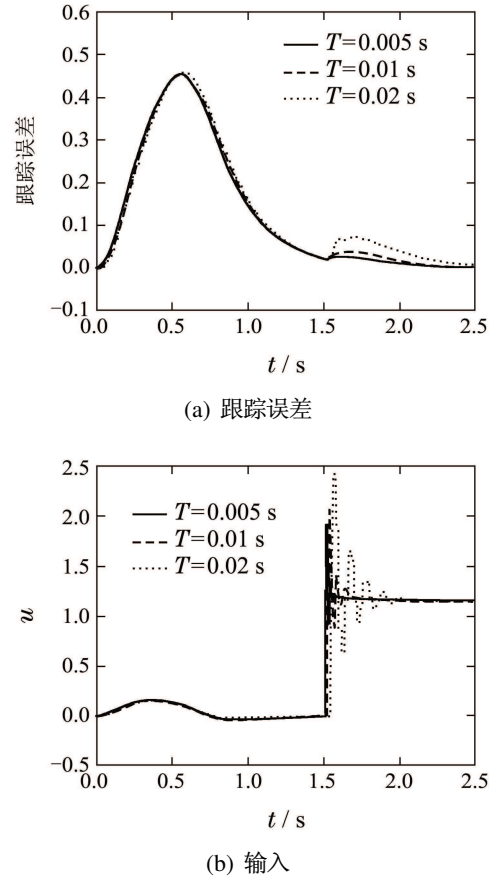


图6 最小拍-自抗扰控制在不同采样周期下的结果对比  
Fig. 6 Comparison of deadbeat-ADRC control results with different sampling time

由图6可见, 采样周期的不同, 对系统的跟踪误差几乎没有任何影响, 不过当采样周期越大时, 系统的抗干扰能力越弱, 当采样周期过大时, 系统将会发散.

#### 5 总结(Conclusions)

本文给出了自抗扰控制器的最小拍控制形式, 得到了其等效传递函数的一般表达形式, 并对2阶系统下的基于最小拍观测器的自抗扰控制器表达进行了深入分析. 结果表明, 基于最小拍观测器的最抗扰控制器可等效为一个复合控制系统, 其等效的反馈补偿器为超前校正器, 其相频和幅频特性受控制器带宽和采样周期的选择.

同时, 以常规电机模型为例进行仿真. 结果表明: 基于最小拍观测器的自抗扰控制器具有最快的观测系统状态的能力(包括扩张状态), 但对噪声的容忍能力也较小, 需要对测量到的系统输出值添加滤波器(在常规自抗扰控制器中, 当观测器增益较小时, 该滤波器可以忽略, 并不影响系统的输出). 此时观测器的增益完全由采样周期确定, 不需要重新进行调节(对2阶系统, 表达式见式(13)和式(14)).

此外, 通过对控制器带宽和采样周期的选择对结果进行分析, 表明 $\omega_c$ 和 $T$ 都应该进行合适的选择. 当

$T$ 较大时, 系统的抗扰能力下降, 但同时观测器的增益也较小; 当 $\omega_c$ 较大时, 系统的跟踪误差较小且对扰动的抗干扰能力也会减弱. 一般情况下, 综合考虑计算机的计算能力, 给出如下的基于最小拍观测器的自抗扰控制器设计准则:

- 1) 选择合适的采样周期, 使得系统的抗扰能力较强, 且此时观测器的增益也不至于特别大;
- 2) 根据式(5), 将观测器特征根配置到原点, 得到对应的观测器增益;
- 3) 根据 $\omega_c T \leq 1$ , 选择合适的 $\omega_c$ .

显然, 由于不再需要调节观测器带宽的参数, 相较于常规 ADRC 参数调节方法, 基于最小拍观测器的 ADRC 的设计更加简单方便.

## 参考文献(References):

- [1] 黄一, 张文革. 自抗扰控制器的发展 [J]. 控制理论与应用, 2002, 19(4): 485 – 492.  
(HUANG Yi, ZHANG Wenge. Development of active disturbance rejection controller [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(4): 485 – 492.)
- [2] 黄一, 薛文超, 赵春哲. 自抗扰控制纵横谈 [J]. 系统科学与数学, 2011, 31(9): 1111 – 1129.  
(HUANG Yi, XUE Wenchao, ZHAO Chunzhe. Active disturbance rejection control: methodology and theoretical analysis [J]. *System Science and Math Sciences*, 2011, 31(9): 1111 – 1129.)
- [3] 高志强. 自抗扰控制思想探究 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(12): 1497 – 1509.  
(GAO Zhiqiang. On the foundation of active disturbance rejection control [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(12): 1497 – 1509.)
- [4] GAO Z Q. Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning [C] // *American Control Conference*. Denver: IEEE, 2003: 4898 – 4996.
- [5] HUANG Y, XU K K, HAN J, et al. Flight control design using extended state observer and non-smooth feedback [C] // *40th IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2001: 223 – 228.
- [6] ZHENG Q, GAO Z Q. On practical applications of active disturbance rejection control [C] // *29th Chinese Control Conference*. Beijing: IEEE, 2010: 6095 – 6100.
- [7] 陈增强, 孙明玮, 杨瑞光. 线性自抗扰控制器的稳定性研究 [J]. 自动化学报, 2013, 39(5): 574-580.  
(CHEN Zengqiang, SUN Mingwei, YANG Ruiguang. On the stability of linear active disturbance rejection control [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(5): 574 – 580.)
- [8] ZHAO C Z, HUANG Y. ADRC based input disturbance rejection for minimum-phase plants with unknown orders and/or uncertain relative degrees [J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2012, 25(4): 625 – 640.
- [9] XUE W C, HUANG Y. On frequency-domain analysis of ADRC for uncertain system [C] // *American Control Conference*. Washington, DC, USA: IEEE, 2013: 6652 – 6657.
- [10] WANG W W, GAO Z Q. A comparison study of advanced state observer design techniques [C] // *2003 American Control Conference*. Denver: IEEE, 2003: 4754 – 4759.
- [11] MIKLOSOVIC R, RADKE A, GAO Z Q. Discrete implementation and generalization of the extended state observer [C] // *2006 American Control Conference*. Minneapolis, USA: IEEE, 2006: 2209 – 2214.

## 作者简介:

张超 (1987–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为 ADRC、非线性控制、飞行控制, E-mail: zhangchao.thucs@gmail.com;

朱纪洪 (1968–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为飞行控制、非线性控制、航空电子, E-mail: jhzhu@tsinghua.edu.cn;

高亚奎 (1959–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为飞行控制、系统仿真技术, E-mail: gaoyakui@126.com.