

## 保证瞬态性能的迭代学习控制

管海娃<sup>1,2</sup>, 孙明轩<sup>1†</sup>, 齐丽强<sup>1</sup>

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023; 2. 温州科技职业学院, 浙江 温州 325006)

**摘要:** 讨论一类不确定非线性系统的可保证瞬态性能的迭代学习控制问题. 引入限定跟踪误差瞬态特性的界函数, 通过误差转换方法, 定义一个转换误差变量, 将跟踪误差的保证瞬态特性问题转化为该误差变量的有界性问题. 采用Lyapunov方法, 设计迭代学习控制器处理系统中参数和非参数不确定性. 并且, 采用完全限幅学习机制, 保证转换误差变量的有界性和一致收敛性. 从而既能得出系统输出在整个作业区间的完全跟踪性能, 同时又能够保证跟踪误差在每次迭代的过程中具有保证的瞬态特性. 仿真结果验证了所提控制方法的有效性.

**关键词:** 收敛性; 迭代学习控制; 瞬态性能; 不确定非线性系统

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Iterative learning control with guaranteed transient performance

GUAN Hai-wa<sup>1,2</sup>, SUN Ming-xuan<sup>1†</sup>, QI Li-qiang<sup>1</sup>

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China;

2. Wenzhou Vocational College of Science and Technology, Wenzhou Zhejiang 325006, China)

**Abstract:** For a class of uncertain nonlinear time-varying systems, we present an iterative learning control scheme guaranteeing transient performance bounds. By introducing an error transformation, we convert the problem of guaranteeing transient performance of the tracking error to that of ensuring boundedness of the transformed error. Applying Lyapunov synthesis, we carry out the control design for handling both parametric and nonparametric uncertainties of system dynamics. It is shown that, with the use of fully-saturated learning mechanisms, the system output can completely track the desired trajectory over the entire pre-specified time interval as the number of iteration increases, and the tracking error is confined within the transient performance bounds for each iteration cycle, while the boundedness and the uniform convergence of the transformed error are guaranteed. Simulation results are presented to demonstrate the effectiveness of this learning control method.

**Key words:** convergence; iterative learning control; transient performance; uncertain nonlinear systems

### 1 引言(Introduction)

1984年Arimoto提出迭代学习控制, 至今已有30年<sup>[1]</sup>. 借助于现有的控制系统综合方法, 人们逐步形成了适于迭代学习控制系统的分析与设计方法. 近年来, 基于Lyapunov方法的迭代学习控制技术越来越受到人们的关注<sup>[2-5]</sup>. 已发表的相关文献主要集中于处理定常参数系统或时变参数系统的自适应迭代学习控制<sup>[6-8]</sup>, 涉及非一致轨迹跟踪问题<sup>[9-10]</sup>, 和任意初值下的完全跟踪问题<sup>[11-12]</sup>.

通常采用鲁棒方法处理系统中的非参数不确定性, 通常这种方法假设不确定特性的界函数已知. 文献[13]较早研究鲁棒迭代学习控制问题, 其中采用了变结构控制技术处理不确定特性. 文献[14]提出了一种不确定性机器人系统的自适应鲁棒迭代学习控制策略. 文献[15]提出的鲁棒学习控制方法能够解决控

制方向未知问题. 文献[16]给出了一种结构更为简单的鲁棒迭代学习控制算法. 文献[17]针对同时含有参数和非参数不确定特性的动态系统, 采用BLF(Barrier Lyapunov function)函数, 设计了具有输出约束能力的迭代学习控制器. 文献[18]构造了一种形式简单的BLF函数, 讨论非参数不确定系统的约束迭代学习控制问题.

目前, 控制系统的瞬态性能引起了人们的重视. 而现在针对一类多输入多输出(multi-input multi-output, MIMO)非线性系统, 文献[19]采用鲁棒自适应控制策略, 最终能够保证误差收敛于一个指定界内. 文献[20]讨论了模型参考自适应控制的跟踪误差的瞬态性能. 文献[21]中提出的自适应控制策略能够实现系统运行过程中具有可保证的瞬态特性以及稳态跟踪误差边界. 文献[22]研究了具有可保证瞬态特性的自适应执

行器故障补偿控制.

本文研究一类不确定非线性系统的可保证瞬态性能迭代学习控制问题. 引入限定误差瞬态特性的性能函数, 通过误差转换方法, 定义一个转换误差变量. 采用Lyapunov-like方法, 设计迭代学习控制器. 分析表明, 该控制器能够实现系统输出在整个作业区间上的完全跟踪性能, 同时又能保证跟踪误差在每次迭代的过程中具有可保证瞬态特性.

### 2 问题的描述(Problem description)

考虑下述高阶非线性不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_{j,k}(t) = x_{j+1,k}(t), & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_{n,k}(t) = f(\mathbf{x}_k, t) + g(\mathbf{x}_k, t)u_k(t), \\ y_k(t) = x_{1,k}(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $k = 1, 2, \dots$  表示迭代次数,  $\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k})^T$  是第  $k$  次迭代系统的状态向量;  $y_k(t)$  是系统输出;  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$  是迭代区间;  $f(\mathbf{x}_k, t)$  是未知不确定控制部分;  $g(\mathbf{x}_k, t)$  是未知不确定控制增益;  $u_k(t)$  是控制输入.

对系统(1)做如下假设:

**假设 1** 不确定  $f(\mathbf{x}_k, t)$  可以表示为

$$f(\mathbf{x}_k, t) = \boldsymbol{\theta}^T(t)\xi(\mathbf{x}_k, t) + \eta(\mathbf{x}_k, t), \quad (2)$$

其中:  $\boldsymbol{\theta}(t)$  是未知的时变向量,  $\xi(\mathbf{x}_k, t)$  是与  $\mathbf{x}_k$  和  $t$  有关的已知向量, 未知非参数化函数  $\eta(\mathbf{x}_k, t)$  满足

$$|\eta(\mathbf{x}_k, t) - \eta(\mathbf{x}_d, t)| \leq \beta_1(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d, t)\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_d\|, \quad (3)$$

其中  $\beta_1(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d, t)$  为已知的连续函数.

**假设 2** 存在已知的常数  $g_0$  满足

$$0 < g_0 \leq g(\mathbf{x}_k, t). \quad (4)$$

未知非参数化函数  $g(\mathbf{x}_k, t)$  满足

$$|g(\mathbf{x}_k, t) - g(\mathbf{x}_d, t)| \leq \beta_2(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d, t)\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_d\|, \quad (5)$$

其中  $\beta_2(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d, t)$  为已知的连续函数.

本文的控制任务是, 设计迭代学习控制器  $u_k$ , 使系统输出  $y_k(t)$  完全跟踪上给定的目标轨迹  $y_d(t)$ ; 每一次迭代的跟踪误差具有可保证的瞬态特性, 也即具有可以限定的超调量和收敛速率等瞬态特性.

给定在区间  $[0, T]$  上  $n$  阶连续可导的目标轨迹  $y_d(t)$ , 存在期望控制输入  $u_d(t)$ , 满足

$$\begin{cases} \dot{x}_{j,d}(t) = x_{j+1,d}(t), & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_{n,d}(t) = f(\mathbf{x}_d, t) + g(\mathbf{x}_d, t)u_d(t), \\ y_d(t) = x_{1,d}(t), \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $\mathbf{x}_d = (x_{1,d}, x_{2,d}, \dots, x_{n,d})^T$ ,  $f(\mathbf{x}_d, t) = \boldsymbol{\theta}^T(t) \times \xi(\mathbf{x}_d, t) + \eta(\mathbf{x}_d, t)$  假设  $u_d(t)$ ,  $\mathbf{x}_d$ ,  $f(\mathbf{x}_d, t)$  和  $g(\mathbf{x}_d, t)$  都是有界的.

**假设 3** 每次迭代的初始值满足

$$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0). \quad (7)$$

为表述简便, 记

$$\begin{aligned} g_k &= g(\mathbf{x}_k, t), & f_k &= f(\mathbf{x}_k, t), & g_d &= g(\mathbf{x}_d, t), \\ \eta_d &= \eta(\mathbf{x}_d, t), & f_d &= f(\mathbf{x}_d, t), \\ \eta_k &= \eta(\mathbf{x}_k, t), & \xi_k &= \xi(\mathbf{x}_k, t), & \xi_d &= \xi(\mathbf{x}_d, t), \\ \beta_{1,k} &= \beta_1(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d, t), & \beta_{2,k} &= \beta_2(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d, t). \end{aligned}$$

定义系统第  $k$  次的跟踪误差为  $e_{1,k} = x_{1,k} - x_{1,d}$ . 记  $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_d = (e_{1,k}, e_{2,k}, \dots, e_{n,k})^T$ .

### 3 性能函数和误差转换(Performance function and error transformation)

**定义 1** 首先定义一个关于时间  $t$  的光滑函数  $\rho: \mathbb{R}_+ + \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , 称其为性能函数, 在时间域上其是单调递减的, 且满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_\infty > 0^{[20]}$ .

为满足误差具有可保证的瞬态特性,  $e_{1,k}(t)$  应满足下面的条件:

$$-\delta_2\rho(t) < e_{1,k}(t) < \delta_1\rho(t), \quad (8)$$

其中  $0 \leq \delta_1, \delta_2 \leq 1$ , 对应的如图1所示.

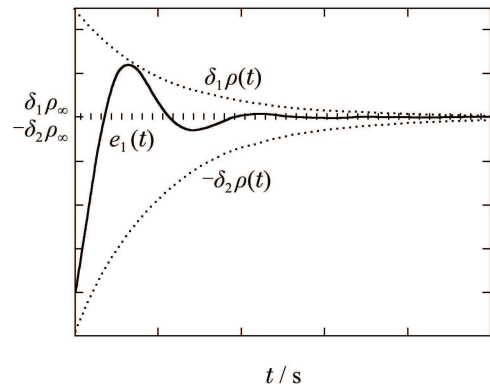


图1 跟踪误差的界函数

Fig. 1 The prescribed bounds on the tracking error

此时  $\rho(t)$  就可称作一个限定误差瞬态特性的性能函数, 也就是说当  $e_{1,k}(t)$  被限定在由  $\rho(t)$  界定的空间内,  $e_{1,k}(t)$  的瞬态特性也就能被限定住. 比如, 选取性能函数  $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-at} + \rho_\infty$ , 其中  $\rho_0 > \rho_\infty$ ,  $a > 0$ .  $\rho_\infty$  可以限定  $e_{1,k}(t)$  的最终收敛的最大值;  $\delta_1\rho_0$  可以限定  $e_{1,k}(t)$  在收敛过程中的最大超调量;  $\rho(t)$  本身可以限定  $e_{1,k}(t)$  的收敛速度.

要使  $e_{1,k}(t)$  运行在限定的空间内, 首先需要对误差函数  $e_{1,k}(t)$  进行转化, 也即

$$e_{1,k}(t) = \rho(t)S(v_k(t)), \quad (9)$$

其中:  $v_k(t)$  是误差的转化形式,  $S(\cdot)$  是一个光滑的、严格递增的以及可逆的函数, 其具有下面的性质:

$$1) \quad -\delta_2 < S(v_k(t)) < \delta_1.$$

$$2) \begin{cases} \lim_{v_k \rightarrow +\infty} S(v_k(t)) = \delta_1, \\ \lim_{v_k \rightarrow -\infty} S(v_k(t)) = -\delta_2. \end{cases}$$

$$3) S(0) = 0.$$

显然, 当  $v_k(t)$  为一有界量时, 就可以得到下面的性质:  $-\delta_2 < S(v_k(t)) < \delta_1$ . 又由于  $\rho(t) > 0$ , 所以又可得到  $-\delta_2\rho(t) < e_{1,k}(t) < \delta_1\rho(t)$ . 由上面的分析可知, 当  $v_k(t)$  为有界量时, 就能够保证误差  $e_{1,k}(t)$  具有限定的瞬态特性.

另外, 由于  $S(0) = 0$  可知, 当  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(t) = 0$  满足时, 可以得到  $\lim_{k \rightarrow \infty} e_{1,k}(t) = 0$ .

由于  $\rho(t) \geq \rho_\infty > 0$ , 将式(9) 转化为下面的形式:

$$S(v_k(t)) = \frac{e_{1,k}(t)}{\rho(t)}. \quad (10)$$

利用  $S(v_k(t))$  的性质, 对上式求逆可得

$$v_k(t) = S^{-1}\left(\frac{e_{1,k}(t)}{\rho(t)}\right). \quad (11)$$

对式(11) 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{v}_k(t) &= \frac{\partial S^{-1}}{\partial\left(\frac{e_{1,k}(t)}{\rho(t)}\right)} \left( \frac{\dot{e}_{1,k}(t)\rho(t) - e_{1,k}(t)\dot{\rho}(t)}{\rho^2(t)} \right) = \\ &= \frac{\partial S^{-1}}{\partial\left(\frac{e_{1,k}(t)}{\rho(t)}\right)\rho(t)} \left( \dot{e}_{1,k}(t) - \frac{e_{1,k}(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) = \\ &= \frac{\partial S^{-1}}{\partial\left(\frac{e_{1,k}(t)}{\rho(t)}\right)\rho(t)} \left( e_{2,k}(t) - \frac{e_{1,k}(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) = \\ &= \chi_k(t)(e_{2,k}(t) - \lambda_k(t)), \end{aligned} \quad (12)$$

其中:

$$\chi_k(t) = \frac{\partial S^{-1}}{\partial\left(\frac{e_{1,k}(t)}{\rho(t)}\right)\rho(t)}, \quad \lambda_k(t) = \frac{e_{1,k}(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}.$$

容易得  $\chi_k(t)$  和  $\lambda_k(t)$  都是已知的. 且由  $S(\cdot)$  是一个光滑的、严格递增的以及可逆的函数, 可得  $\chi_k(t) > 0$ .

为设计迭代学习控制器, 本文选取的性能函数  $\rho(t)$  和  $S^{-1}(\cdot)$  都具有  $n$  阶可导性.

#### 4 控制器设计(Controllor design)

本文应用backstepping方法, 设计控制器. 对  $e_{j,k}$  做变换, 定义另一变量  $z_{j,k}$ ,

$$\begin{cases} z_{1,k} = v_k, \\ z_{j,k} = e_{j,k} - \alpha_{j-1,k}(z_{1,k}, z_{2,k}, \dots, z_{j-1,k}, t), \quad j = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (13)$$

**步骤 1** 由式(13)可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,k} &= \dot{v}_k = \chi_k(e_{2,k} - \lambda_k) = \\ \chi_k(z_{2,k} + \alpha_{1,k}(z_{1,k}, t) - \lambda_k). \end{aligned} \quad (14)$$

设计  $\alpha_{1,k}$  为

$$\alpha_{1,k}(z_{1,k}, t) = -\frac{c_1 z_{1,k}}{\chi_k} + \lambda_k, \quad (15)$$

其中  $c_1$  为正的待设定参数. 式(14)可以写成

$$\dot{z}_{1,k} = \chi_k z_{2,k} - c_1 z_{1,k}. \quad (16)$$

**步骤 2** 由式(13)可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_{2,k} &= \dot{e}_{2,k} - \frac{\partial \alpha_{1,k}}{\partial z_{1,k}} \dot{z}_{1,k} - \frac{\partial \alpha_{1,k}}{\partial t} = \\ z_{3,k} + \alpha_{2,k} - \frac{\partial \alpha_{1,k}}{\partial z_{1,k}} \dot{z}_{1,k} - \frac{\partial \alpha_{1,k}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (17)$$

设计  $\alpha_{2,k}$  为

$$\begin{aligned} \alpha_{2,k}(z_{1,k}, z_{2,k}, t) &= \\ -c_2 z_{2,k} - \chi_k z_{1,k} + \frac{\partial \alpha_{1,k}}{\partial z_{1,k}} \dot{z}_{1,k} + \frac{\partial \alpha_{1,k}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $c_2$  为正的待设定参数. 式(17)可以写成

$$\dot{z}_{2,k} = z_{3,k} - c_2 z_{2,k} - \chi_k z_{1,k}. \quad (19)$$

**步骤  $j$  ( $3 \leq j \leq n-1$ )** 设计

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k}(z_{1,k}, z_{2,k}, \dots, z_{j,k}, t) &= \\ -c_j z_{j,k} - z_{j-1,k} + \sum_{i=1}^{j-1} \left( \frac{\partial \alpha_{j-1,k}}{\partial z_{i,k}} \dot{z}_{i,k} \right) + \frac{\partial \alpha_{j-1,k}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $c_j$  ( $j = 3, \dots, n-1$ ) 为正的待设定参数. 由式(13)(20), 可得

$$\dot{z}_{j,k} = -z_{j-1,k} - c_j z_{j,k} + z_{j+1,k}. \quad (21)$$

**步骤  $n$**  由式(1)(6)(13), 得到

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n,k} &= \dot{x}_{n,k} - \dot{x}_{n,d} - \dot{\alpha}_{n-1,k} = \\ f_k - f_d + g_k u_k - g_d u_d - \dot{\alpha}_{n-1,k}. \end{aligned} \quad (22)$$

将  $\alpha_{j,k}$  的表达式逐项写出

$$\begin{cases} \alpha_{1,k} = -\frac{c_1 z_{1,k}}{\chi_k} + \lambda_k, \\ \alpha_{2,k} = -c_2 z_{2,k} - \chi_k z_{1,k} - c_1 \left(\frac{z_{1,k}}{\chi_k}\right)' + \dot{\lambda}_k, \\ \alpha_{j,k} = -\sum_{i=2}^j c_i z_{i,k}^{(j-i)} - \sum_{i=2}^{j-1} z_{i,k}^{(j-1-i)} + \lambda_k^{(j-1)} - \\ (\chi_k z_{1,k})^{(j-2)} - c_1 \left(\frac{z_{1,k}}{\chi_k}\right)^{(j-1)}, \\ j = 3, \dots, n-1, \end{cases} \quad (23)$$

其中:

$$\begin{aligned} (\chi_k z_{1,k})^{(j-2)} &= \sum_{i=0}^{j-2} C_{j-2}^i \chi_k^{(i)} z_{1,k}^{(j-2-i)}, \\ \left(\frac{z_{1,k}}{\chi_k}\right)^{(j-1)} &= \sum a_{il} \frac{z_{1,k}^{(i)} \chi_k^{(l_1)} \chi_k^{(l_2)} \dots \chi_k^{(l_m)}}{\chi_k}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$0 \leq i \leq j-1, \quad i + l_1 + \dots + l_m = j-1,$$

$$0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_m \leq j-1,$$

$$\lambda_k^{(j-1)} = \sum b_{il} e_{i,k} \frac{\rho^{(l_1)}}{\rho} \frac{\rho^{(l_2)}}{\rho} \dots \frac{\rho^{(l_m)}}{\rho},$$

$$1 \leq i \leq j, i + l_1 + \dots + l_m = j + 1,$$

$$1 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_m \leq j,$$

其中 $a_{il}$ 和 $b_{il}$ 为相应的系数. 并规定 $z^{(0)} = z$ .

为设计控制器, 选取正定函数

$$V_k(t) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} z_{j,k}^2, \quad (25)$$

对 $V_k$ 求导,

$$\dot{V}_k = - \sum_{j=1}^{n-1} c_j z_{j,k}^2 + z_{n,k} z_{n-1,k} + z_{n,k} (\theta^T \xi_k - \theta^T \xi_d + \eta_k - \eta_d + g_k u_k - g_d u_d - \dot{\alpha}_{n-1,k}). \quad (26)$$

由假设1, 可得

$$z_{n,k} (\eta_k - \eta_d) \leq \beta_{1,k} \|e_k\| |z_{n,k}|. \quad (27)$$

由于 $g_k \hat{u}_k - g_d u_d = (g_k - g_d) \hat{u}_k + g_d (\hat{u}_k - u_d)$ , 由假设2, 可得

$$z_{n,k} (g_k - g_d) \hat{u}_k \leq \beta_{2,k} \|e_k\| |\hat{u}_k| |z_{n,k}|. \quad (28)$$

将式(27)–(28), 代入式(26), 得

$$\dot{V}_k \leq - \sum_{j=1}^{n-1} c_j z_{j,k}^2 + \beta_{1,k} \|e_k\| |z_{n,k}| + z_{n,k} \theta^T \delta \xi_k + z_{n,k} z_{n-1,k} - z_{n,k} \dot{\alpha}_{n-1,k} + z_{n,k} g_k (u_k - \hat{u}_k) + z_{n,k} g_d (\hat{u}_k - u_d) + |z_{n,k}| \beta_{2,k} \|e_k\| |\hat{u}_k|, \quad (29)$$

其中 $\delta \xi_k = \xi_k - \xi_d$ . 通过上面的推导, 本文可采取如下控制器:

$$u_k = \hat{u}_k - \frac{z_{n-1,k} \text{sgn}(z_{n-1,k} z_{n,k})}{g_0} - \frac{c_n z_{n,k}}{g_0} - \frac{\beta_{1,k} \|e_k\| \text{sgn}(z_{n,k})}{g_0} - \frac{\beta_{2,k} \|e_k\| |\hat{u}_k| \text{sgn}(z_{n,k})}{g_0} - \frac{\psi \text{sgn}(z_{n,k})}{g_0} - \frac{|\hat{\theta}_k^T \delta \xi_k| \text{sgn}(z_{n,k})}{g_0}, \quad (30)$$

其中:  $c_n > 0$ 为设计常数,  $\psi = |\dot{\alpha}_{n-1,k}|$ ,  $\hat{u}_k$ 和 $\hat{\theta}_k$ 分别为 $u_d$ 和 $\theta$ 的估计. 在完全限幅情形下, 各参数的估计分别由如下更新律给出:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_k = \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}_k^*), \\ \hat{\theta}_k^* = \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}^*) + \gamma_1 z_{n,k} \delta \xi_k, \\ \hat{u}_k = \text{sat}_{\bar{u}}(\hat{u}_k^*), \\ \hat{u}_k^* = \text{sat}_{\bar{u}}(\hat{u}_{k-1}^*) - \gamma_2 z_{n,k}, \end{cases} \quad (31)$$

其中:  $\gamma_1 > 0$ 和 $\gamma_2 > 0$ 为各参数更新增益; sat为饱和函数, 其定义及性质见文献 [7],  $\bar{\theta}$ 和 $\bar{u}$ 分别为各参数估计的限幅值. 这里, 假定各参数真值都处于限幅值之间, 且当 $k = 0$ 时,  $\hat{\theta}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\hat{u}_0 = 0$ .

### 5 性能分析(Performance analysis)

对于所设计的控制律及参数更新律, 本节对闭环系统的收敛性和稳定性进行分析.

考虑下述Lyapunov-like函数:

$$L_k(t) = V_k(t) + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k d\tau + \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t g_d (\hat{u}_k - u_d)^2 d\tau, \quad (32)$$

其中 $\tilde{\theta}_k = \theta - \hat{\theta}_k$ . 可将 $V_k$ 表达为

$$V_k = \int_0^t \dot{V}_k d\tau + V_k(0). \quad (33)$$

由假设3, 可得 $e_k(0) = 0$ . 由 $\lambda_k(t)$ 的定义可知,  $\lambda_k(0) = 0$ . 由 $S(\cdot)$ 的性质以及 $S(0) = 0$ 可推得,  $v_k(0) = 0$ , 也即 $z_{1,k}(0) = 0$ . 由式(23)–(24), 可推得 $\alpha_{j,k}$ 是由 $z_{1,k}, \dots, z_{j,k}, e_{1,k}, \dots, e_{j,k}$ 各项分别与某些有界项相乘后再相加构成, 记 $\alpha_{j,k} = \varphi(z_{1,k}, \dots, z_{j,k}, e_{1,k}, \dots, e_{j,k})$ . 由前面的分析可得 $z_{1,k}(0) = e_{1,k}(0) = 0$ , 由此可得 $\alpha_{1,k}(0) = \varphi(z_{1,k}(0), e_{1,k}(0)) = 0$ , 由于 $z_{2,k} = e_{2,k} - \alpha_{1,k}$ , 可得 $z_{2,k}(0) = 0$ , 按同样的思路, 分析可得 $z_{j,k}(0) = 0 (j = 1, 2, \dots, n)$ . 由式(25)可知

$$V_k(0) = 0. \quad (34)$$

$L_k(t)$ 在第 $k$ 次的迭代差分为

$$\Delta L_k(t) = \int_0^t \dot{V}_k d\tau - V_{k-1}(t) + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t (\tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\theta}_{k-1}) d\tau + \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t g_d \{(\hat{u}_k - u_d)^2 - (\hat{u}_{k-1} - u_d)^2\} d\tau. \quad (35)$$

利用等式

$$\begin{aligned} & \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} = \\ & -2\tilde{\theta}_k^T (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}) - (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1})^T (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}) = \\ & -2\tilde{\theta}_k^T (\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_{k-1}) + 2\tilde{\theta}_k^T (\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_k) - \\ & (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1})^T (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}). \end{aligned} \quad (36)$$

借助文献[7]中的引理1知

$$(\theta - \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}_k^*))^T (\hat{\theta}_k^* - \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}_k^*)) \leq 0. \quad (37)$$

由式(36)–(37), 可得

$$\tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} \leq -2\tilde{\theta}_k^T (\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_{k-1}). \quad (38)$$

类似地, 可得如下式子:

$$\begin{aligned} & (\hat{u}_k - u_d)^2 - (\hat{u}_{k-1} - u_d)^2 \leq \\ & -2(u_d - \hat{u}_k)(\hat{u}_k^* - \hat{u}_{k-1}). \end{aligned} \quad (39)$$

将式(38)–(39)代入式(35), 得

$$\Delta L_k(t) \leq \int_0^t \dot{V}_k d\tau - V_{k-1}(t) - \frac{1}{\gamma_1} \int_0^t \tilde{\theta}_k^T (\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_{k-1}) d\tau -$$

$$\frac{1}{\gamma_2} \int_0^t g_d(u_d - \hat{u}_k)(\hat{u}_k^* - \hat{u}_{k-1})d\tau. \quad (40)$$

应用控制律(30), 可将式(29)写成

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & - \sum_{j=1}^n c_j z_{j,k}^2 + z_{n,k} g_d(\hat{u}_k - u_d) + \\ & z_{n,k} \theta^T \delta \xi_k - |\hat{\theta}_k^T \delta \xi_k| |z_{n,k}|. \end{aligned} \quad (41)$$

将式(41)代入式(40), 可得

$$\begin{aligned} \Delta L_k(t) \leq & - \int_0^t \sum_{j=1}^n c_j z_{j,k}^2 d\tau - V_{k-1}(t) + \\ & \int_0^t z_{n,k} \theta^T \delta \xi_k d\tau - \int_0^t |\hat{\theta}_k^T \delta \xi_k| |z_{n,k}| d\tau + \\ & \int_0^t z_{n,k} g_d(\hat{u}_k - u_d) d\tau - \\ & \frac{1}{\gamma_1} \int_0^t \tilde{\theta}_k^T (\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_{k-1}) d\tau - \\ & \frac{1}{\gamma_2} \int_0^t g_d(u_d - \hat{u}_k)(\hat{u}_k^* - \hat{u}_{k-1}) d\tau. \end{aligned} \quad (42)$$

应用参数更新律(31), 可得

$$\Delta L_k(t) \leq - \int_0^t \sum_{j=1}^n c_j z_{j,k}^2 d\tau - V_{k-1}(t), \quad (43)$$

可得

$$\Delta L_k(t) \leq - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} z_{j,k-1}^2. \quad (44)$$

依据式(44), 容易证明下述定理:

**定理 1** 对于满足假设1-3的系统(1), 采用控制律(30)和完全限幅参数更新律(31), 闭环系统具有下述性质:

- 1) 闭环系统中的所有变量在 $[0, T]$ 上一致有界; 且当 $k \rightarrow \infty$ 时, 跟踪误差 $e_{1,k}$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于零.
- 2) 可以保证每一次迭代跟踪误差 $e_{1,k}$ 在 $[0, T]$ 上具有有限定的瞬态特性.

**证** 首先对 $L_1$ 求导,

$$\begin{aligned} \dot{L}_1(t) = & \sum_{j=1}^n z_{j,1} \dot{z}_{j,1} + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^T \tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2\gamma_2} g_d(\hat{u}_1 - u_d)^2 \leq \\ & - \sum_{j=1}^n c_j z_{j,1}^2 + z_{n,1} \theta^T \delta \xi_1 + \\ & z_{n,1} g_d(\hat{u}_1 - u_d) - |\hat{\theta}_1^T \delta \xi_1| |z_{n,1}| + \\ & \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^T \tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2\gamma_2} g_d(\hat{u}_1 - u_d)^2. \end{aligned} \quad (45)$$

由于 $\hat{\theta}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\hat{u}_0 = 0$ , 结合式(31),

$$\dot{L}_1(t) \leq \frac{1}{2\gamma_1} \theta^T \theta + \frac{1}{2\gamma_2} g_d u_d^2. \quad (46)$$

由 $g_d$ ,  $u_d$ 和 $\theta$ 的有界性可知,  $\dot{L}_1$ 在 $[0, T]$ 上是有界的, 因此,  $L_1$ 在 $[0, T]$ 上是有界的. 利用式(44)知,  $L_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致有界. 由 $L_k(t)$ 的定义可得 $z_{j,k}(t)(j = 1,$

$2, \dots, n)$ 在 $[0, T]$ 上的一致有界性.

由 $z_{1,k}(t)$ 的有界性可知,  $v_k(t)$ 同样是有界的, 所以能够保证跟踪误差 $e_{1,k}(t)$ 在 $[0, T]$ 上具有有限定的瞬态特性.

由于 $z_{1,k}(t)$ 的有界性以及 $S(\cdot)$ 的特性, 可知 $e_{1,k}$ 在 $[0, T]$ 上是有界的. 由此可得 $\alpha_{1,k} = \varphi(z_{1,k}, e_{1,k})$ 也具有有界性. 根据 $e_{2,k} = z_{2,k} + \alpha_{1,k}$ , 由 $z_{2,k}$ 和 $\alpha_{1,k}$ 的有界性, 可以保证 $e_{2,k}$ 也具有有界性. 以此方式递推可得 $\alpha_{j,k}(j = 1, 2, \dots, n-1)$ 和 $e_{j,k}(j = 1, 2, \dots, n)$ 在 $[0, T]$ 上同样是一致有界的.

由于这里采用了完全限幅的参数学习机制, 故 $\hat{\theta}_k$ 和 $\hat{u}_k$ 是一致有界的. 由 $\beta_{1,k}$ 和 $\beta_{2,k}$ 的连续性可知,  $\beta_{1,k}$ 和 $\beta_{2,k}$ 是一致有界的. 同理可得 $\delta \xi_k$ 也是一致有界的. 由控制律(30)可看出,  $u_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上是一致有界的.

为证明 $z_{j,k}(t)$ 的一致收敛性, 对式(44)进行累加,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^k \Delta L_i(t) = \\ L_k(t) - L_1(t) \leq - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n z_{j,i}^2. \end{aligned} \quad (47)$$

由于 $L_k(t)$ 是正的并且 $L_1(t)$ 是有界的, 可得当 $k \rightarrow \infty$ 时,  $z_{j,k}(j = 1, 2, \dots, n)$ 逐点收敛于0.

由式(16)(19)(21), 可得 $\dot{z}_{j,k}(j = 1, 2, \dots, n-1)$ 是一致有界的. 进一步, 由式(22)可知,  $u_k, f_k, f_d, g_k, \dot{\alpha}_{n-1,k}, u_d, g_d$ 的一致有界性可以保证 $\dot{z}_{n,k}$ 是一致有界的. 因此,  $\dot{z}_{j,k}(j = 1, 2, \dots, n)$ 是一致有界的, 进一步可推知 $z_{j,k}(j = 1, 2, \dots, n)$ 是等度连续. 结合上面的分析, 可推得, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,  $z_{j,k}(j = 1, 2, \dots, n)$ 在 $[0, T]$ 上是一致收敛于0.

当 $k \rightarrow \infty$ 时,  $v_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上是一致收敛于0. 由 $S(0) = 0$ 可推得, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,  $e_{1,k}(t)$ 在 $[0, T]$ 上同样一致收敛于0.

由上面的分析可知, 当 $k \rightarrow \infty$ ,  $z_{1,k}$ 和 $e_{1,k}$ 都一致收敛于0, 由此可得 $\alpha_{1,k}$ 也一致收敛于0. 根据 $e_{2,k} = z_{2,k} + \alpha_{1,k}$ , 可推得 $e_{2,k}$ 一致收敛于0. 以此方式递推可得 $\alpha_{j,k}(j = 1, 2, \dots, n-1)$ 和 $e_{j,k}(j = 1, 2, \dots, n)$ 在 $[0, T]$ 上都一致收敛于0.

综合上面的分析可知, 当 $k \rightarrow \infty$ ,  $z_{n-1,k}, z_{n,k}$ 和 $\dot{\alpha}_{n-1,k}$ 都将会趋于0. 当 $\mathbf{e}_k \rightarrow 0$ , 可得 $\delta \xi_k \rightarrow 0$ . 因此, 从控制律(30)中不难看出, 控制量中的震荡现象随着迭代次数的增加便会消除. 证毕.

为了与可保证瞬态性能限定的迭代学习方法对比, 给出无瞬态特性限定下的迭代学习方案: 控制器和参数更新律形式分别同式(30)和式(31), 其中:

$$\begin{cases} z_{1,k} = e_{1,k}, \\ z_{j,k} = e_{j,k} - \alpha_{j-1,k}, \quad j = 2, 3, \dots, n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{1,k} = -c_1 z_{1,k}, \\ \alpha_{j,k} = -c_j z_{j,k} - z_{j-1,k} + \sum_{i=1}^{j-1} \left( \frac{\partial \alpha_{j-1,k}}{\partial z_{i,k}} \dot{z}_{i,k} \right), \\ j = 2, 3, \dots, n-1. \end{cases}$$

**6 数值算例(Numerical simulation)**

考虑如下2阶系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \sin x_1 \cos(16\pi t) + \sin x_2 \sin(8\pi t) \\ \quad - 0.1x_2 - x_1^3 + (1 + 0.01x_1^2 + 0.005x_2^2)u, \end{cases} \quad (48)$$

其中:  $f(\mathbf{x}) = -0.1x_2 - x_1^3 + \sin x_1 \cos(16\pi t) + \sin x_2 \times \sin(8\pi t)$ ,  $g(\mathbf{x}) = 1 + 0.01x_1^2 + 0.005x_2^2$ . 给定目标轨迹

$$x_d = 6\left(\frac{t}{3}\right)^5 - 15\left(\frac{t}{3}\right)^4 + 10\left(\frac{t}{3}\right)^3.$$

取  $\beta_{1,k} = 0.1 + |x_{1,d}^2 + x_{1,k}^2 + x_{1,d}x_{1,k}|$ , 满足假设1. 取  $g_0 = 1$ ,  $\beta_{2,k} = 0.01|x_{1,d} + x_{1,k}| + 0.005|x_{2,d} + x_{2,k}|$ , 满足假设2.

为了满足误差最终收敛的最大值限定为0.05, 最大超调量限定为0.4, 每次迭代误差满足  $-\delta_2\rho(t) < e_{1,k}(t) < \delta_1\rho(t)$ . 选取限定误差瞬态的性能函数

$$\rho(t) = (0.4 - 0.05)e^{-t} + 0.05,$$

以及  $\delta_1 = 1$  和  $\delta_2 = 0.1$ . 选取

$$S(x) = \delta_1 - \frac{\delta_1\delta_2 + \delta_1^2}{\delta_2 e^{2x} + \delta_1}.$$

采用控制律(30)以及参数更新律(31)进行仿真. 其他参数取值为

$$c_1 = 1, c_2 = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = 3.$$

迭代50次后, 仿真结果如图2-4所示. 由图2可看出, 经过多次迭代, 系统输出  $y_k$  在整个作业区间上完全跟踪上期望轨迹  $x_{1,d}$ . 图4中的  $J_k = \max_{t \in [0, T]} |e_{1,k}(t)|$  表示在  $[0, T]$  上误差绝对值的最大值.

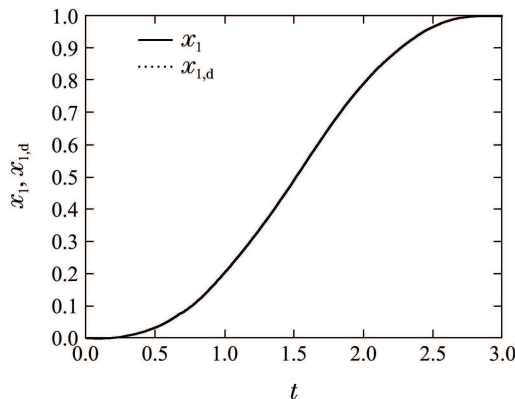


图2  $x_1$ 及其参考轨迹  $x_{1,d}$

Fig. 2  $x_1$  and the reference trajectory  $x_{1,d}$

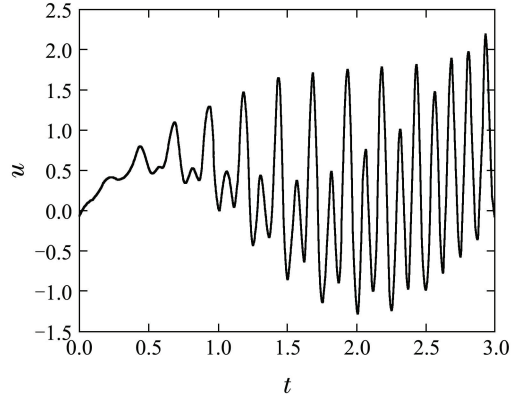


图3 控制输入

Fig. 3 Control input

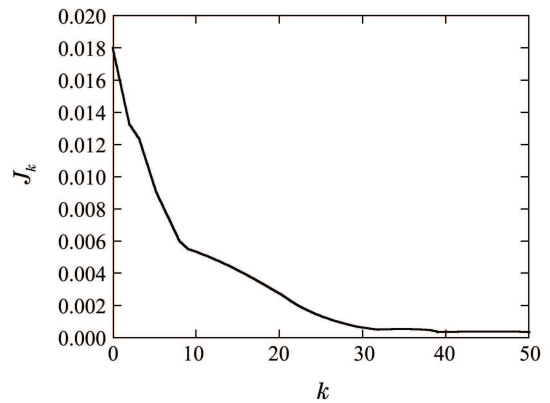


图4 指标  $J_k$

Fig. 4 The index  $J_k$

为了体现可保证瞬态性能迭代学习控制方法的优越性, 将两种学习机制下的第3次迭代跟踪误差图进行对比, 由图5知, 在可保证瞬态特性的迭代学习控制机制下跟踪误差限定在性能函数界内, 但由图6知, 在无瞬态特性限定的迭代学习控制器作用下的第3次迭代跟踪误差并没有限定在性能函数界内. 对比可见, 采用可保证瞬态特性的迭代学习控制达到了预期的、能够实现跟踪误差在每次迭代的过程中具有可保证的瞬态特性.

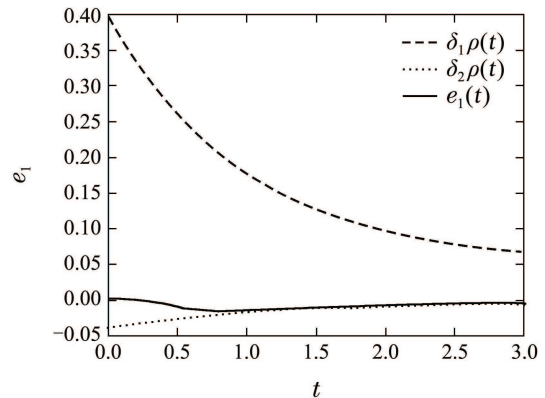


图5 保证瞬态性能限定时的第3次迭代跟踪误差  $e_1$

Fig. 5 The tracking error  $e_1$  of the 3th iteration with guaranteed transient performance

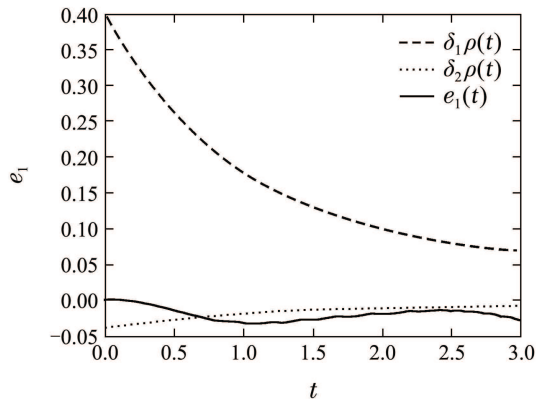


图 6 无瞬态特性限定时的第3次迭代跟踪误差  $e_1$

Fig. 6 The tracking error  $e_1$  of the 3th iteration without guaranteed transient performance

## 7 结论(Conclusion)

为了实现具有完全跟踪性能的同时, 又能够保证跟踪误差在每次迭代的过程中具有可保证的瞬态特性, 也即具有可以限定的超调量和收敛速率等瞬态特性. 本文针对一类不确定非线性系统, 在完全限幅学习机制下, 设计可保证瞬态特性的迭代学习控制器. 理论分析表明, 所设计的学习控制器能够实现系统的输出在整个作业区间上的完全跟踪性能, 同时又能够保证跟踪误差在每次迭代的过程中具有可保证的瞬态特性. 最后的仿真实验验证了这种学习控制方法的有效性.

## 参考文献(References):

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.
- [2] SADEGH N, HOROWITZ R, KAO W W, et al. A unified approach to the design of adaptive and repetitive controllers for robotic manipulators [J]. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1990, 112(4): 618 – 629.
- [3] KUC T, LEE J S. An adaptive learning control of uncertain robotic systems [C] // *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. Brighton, England: IEEE, 1991: 1206 – 1211.
- [4] FRENCH M, ROGERS E. Nonlinear iterative learning by an adaptive Lyapunov technique [J]. *International Journal of Control*, 2000, 73(10): 840 – 850.
- [5] QU Z H, XU J X. Asymptotic learning control for a class of cascaded nonlinear uncertain systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1369 – 1376.
- [6] CHOI J Y, LEE J S. Adaptive iterative learning control of uncertain robotic system [J]. *IEE Proceedings—Control Theory and Application*, 2000, 147(2): 217 – 223.
- [7] SUN M X, GE S S. Adaptive repetitive control for a class of nonlinearly parametrized systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(10): 1684 – 1688.
- [8] MARINO R, TOMEI P. An iterative learning control for a class of partially feedback linearizable systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(8): 1991 – 1996.

- [9] XU J X, XU J. On iterative learning from different tracking tasks in the presence of time-varying uncertainties [J]. *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, Part B*, 2004, 34(1): 589 – 597.
- [10] 李俊民, 孙云平, 刘赞. 非一致目标跟踪的混合自适应迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(1): 100 – 104.  
(LI Junmin, SUN Yunping, LIU Yun. Hybrid adaptive iterative learning control of non-uniform trajectory tracking [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(1): 100 – 104.)
- [11] CHIEN C J, HSU C T, YAO C Y. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state error [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, 12(5): 724 – 732.
- [12] XU J X, YAN R. On initial conditions in iterative learning control [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2005, 50(9): 1349 – 1354.
- [13] XU J X, QU Z. Robust iterative learning control for a class of nonlinear systems [J]. *Automatica*, 1998, 34(8): 983 – 988.
- [14] 杨胜跃, 罗安, 樊晓平. 不确定性机器人系统自适应鲁棒迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(5): 707 – 712.  
(YANG Shengyue, LUO An, FAN Xiaoping. Adaptive robust iterative learning control for uncertain robotic systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(5): 707 – 712.)
- [15] YANG Z Y, YAM S C P, LI L K. Universal repetitive learning control for nonparametric uncertainty and unknown state-dependent control direction matrix [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(7): 1710 – 1715.
- [16] 刘利, 孙明轩. 不确定时变系统的鲁棒学习控制算法 [J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(3): 323 – 328.  
(LIU Li, SUN Mingxuan. Robust learning control algorithms for uncertain time-varying systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(3): 323 – 328.)
- [17] XU J, XU J X. Iterative learning control for output-constrained systems with both parametric and nonparametric uncertainties [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2508 – 2516.
- [18] 孙明轩, 张伟博, 严求真. 非参数不确定系统约束迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(4): 479 – 484.  
(SUN Mingxuan, ZHANG Weibo, YAN Qiuzhen. Constrained iterative learning control of a class of non-parametric uncertain systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(1): 23 – 30.)
- [19] XU H J, IOANNOU P A. Robust adaptive control for a class of MIMO nonlinear systems with guaranteed error bounds [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(5): 728 – 742.
- [20] LIN Y, LIU H, SUN X X. A variable structure MRAC with expected transient and steady state performance [J]. *Automatica*, 2006, 42(5): 805 – 813.
- [21] BECHLIOLIS C P, ROVITHAKIS G A. Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(2): 532 – 538.
- [22] WANG W, WEN C Y. Adaptive actuator failure compensation control of uncertain nonlinear systems with guaranteed transient performance [J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2082 – 2091.

## 作者简介:

管海娃 (1983–), 女, 博士研究生, 讲师, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: guanhaiwa1026@163.com;

孙明轩 (1961–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn;

齐丽强 (1987–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: qiliqiang2011@sina.cn.