

# 双层预测控制中基于操作变量增量的多优先级稳态目标计算

李世卿, 丁宝苍<sup>†</sup>, 孙 耀

(西安交通大学 电子与信息工程学院 自动化系, 陕西 西安 710049)

**摘要:** 本文给出一种双层结构预测控制(MPC)中多优先级稳态目标计算(SSTC)的描述方法. 在可行性阶段, 被控变量(CV)和外部目标(ET)的软约束以及操作变量(MV)的硬约束被统一表述为关于MV增量的约束, 将软约束(包括ET的期望上下界、CV的操作上下界、以及ET的跟踪)进行放松, 保证放松以后MV增量约束集的相容性. 在经济优化阶段, 在MV增量约束集中寻找经济最优的MV增量值. 该算法在已有文献的基础上, 对ET/CV的等式/不等式约束统一处理. 仿真算例证实了该算法的有效性.

**关键词:** 预测控制; 多优先级策略; 稳态目标计算

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Multi-priority rank steady-state target calculation in double-layered model predictive control by optimizing increments of manipulated variables

LI Shi-qing, DING Bao-cang<sup>†</sup>, SUN Yao

(Department of Automation, School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China)

**Abstract:** We give a description of the multi-priority rank steady-state target calculation (SSTC) in the double-layered model predictive control (MPC). In the feasibility stage, the soft constraints of the controlled variables (CVs) and the external targets (ETs), and the hard constraints of manipulated variables (MVs), are represented uniformly as the constraints on the MV increments. Then, the soft constraints (including the desired bounds of ETs, the operating constraints of CVs, and tracking of ETs), are slackened in order to guarantee the compatibility of constraints on MV increments. In the economics stage, the economically optimal increments of MVs are searched in their constraint set. This algorithm unifies the treatment of equality/inequality constraints of CVs/ETs, based on the exiting literature. The numerical example validates the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** model predictive control (MPC); multi-priority rank strategy; steady-state target calculation (SSTC)

### 1 引言(Introduction)

模型预测控制(model predictive control, MPC)在过去三十余年中被成功地应用于过程控制领域<sup>[1-3]</sup>. 它可以处理各种约束, 并把各种要求以软约束和性能指标等形式结合到控制中加以考虑. 它通过提高过程控制的动态性能, 减少过程变量的波动幅度, 经常将生产过程推进至关键约束条件(质量或经济上的)边界上运行, 实现卡边控制.

在过程工业中, 简单的控制手段往往难以满足大型企业所提出的控制要求, 所以很多大型企业通常使用3层结构<sup>[4]</sup>. 上层即实时优化(real time optimization, RTO)层通过求解满足各种约束和产品要求的优化问题来获取理想工作点( $u_t, y_t$ ), 并将其传递到中间

层即双层结构预测控制层中. 双层结构预测控制层又包含稳态目标计算(steady-state target calculation, SSTC)和动态控制两层/模块. SSTC结合过程的稳态模型, 考虑过程的操作变量(manipulated variable, MV)和被控变量(controlled variable, CV)的约束条件, 并考虑外部目标(external target, ET)和其期望上下界, 适当地设定优化性能指标, 最终形成线性规划(linear programming, LP)或二次规划(quadratic programming, QP)问题; 通过求解这些LP或QP为动态控制模块提供MV, CV设定值及约束. ET包括一部分CV和MV的理想值, 它们除来自RTO外, 也可能直接来自工程师和操作员的操作指令. 底层为基础控制层, 通常是以PID单回路调节为主的.

收稿日期: 2014-03-15; 录用日期: 2014-09-02.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: baocangding@126.com.

国家高技术研究发展计划(863计划)项目(2014AA041802), 国家自然科学基金项目(61174095)资助.

Supported by National High-tech R&D Program of China (2014AA041802) and National Natural Science Foundation of China (61174095).

实际应用中,在保证安全和控制品质等基础上,各种ET和CV的约束具有不同的重要程度,根据重要程度的不同可以划分多个优先级.多优先级SSTC算法可以保证高优先级的目标被优先满足.一般来说,多优先级SSTC分为可行性(feasibility)阶段和经济优化(economics)阶段.在可行性阶段,通过优化相应的松弛量实现软约束的调整和部分ET的跟踪,同时确保调整后的约束集的可行性;在经济优化阶段,通过在可行范围内最小化优化性能指标来找到最优的稳态值.

上述思想在很多文献中都可以见到,如文献[5-9].为了编制工业MPC软件,本文根据这些思想线索,整理得到SSTC的详细方案并软件化,而本文是该方案的一个集中体现.注意文献[6]是所有文献中对SSTC的讨论比较多的,在其给出的详细方案中,CV和ET是单独处理的、不同于本文统一设置优先级.文献中对SSTC和多优先级稳态优化有很多方案,虽然本文的基本思想来自这些文献,但并没有与已有文献完全相同.笔者在软件化的过程中,发现所采用的方案非常适合编程,故将其发表与读者共飨.

第2部分介绍约束的处理方法.第3部分详细介绍多优先级SSTC算法的两个阶段.在可行性阶段,根据求解目标的不同,将软约束分为跟踪ET、放松ET的期望上下界和/或放松CV的软约束等两种类型进行放松.通过求解相应的LP或QP问题放松关于MV增量的软约束,以保证MV增量约束集的相容性.在经济优化阶段,采用LP或QP在前述MV增量约束集内求解经济最优的MV增量值.第4部分采用重油分馏塔的算例进行验证.第5部分小结全文.本文主要符号见表1.

表1 本文符号

Table 1 The notations in this paper

符号	含义
$\mathcal{R}^n$	$n$ 维欧式空间
$\mathbf{y}(\mathbf{u})$	CV(MV), $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n(\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m)$
$\mathbf{y}_s(\mathbf{u}_s)$	CV(MV)稳态值
$\Delta \mathbf{u}_s$	MV稳态增量
$\mathbf{y}_t(\mathbf{u}_t)$	CV(MV)作为外部目标的期望值
$\bar{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{u}})$	CV(MV)上界
$\underline{\mathbf{y}}(\underline{\mathbf{u}})$	CV(MV)下界
$G$	稳态增益矩阵
$\ \mathbf{x}\ _Q^2$	$\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$
$\mathbf{y}(i k)(\mathbf{u}(i k))$	$k$ 时刻对未来 $k+i$ 时刻的 CV(MV)的预测值
$\mathbf{x}^*$	$\mathbf{x}$ 的最优值

## 2 多优先级稳态目标计算中的约束处理 (Handling the constraints in multi-priority rank steady-state target calculation)

考虑线性时不变系统.其稳态系统模型为

$\mathbf{y}_s(k) = G\mathbf{u}_s(k)$ , 稳态CV和MV的约束为

$$\underline{\mathbf{y}} \leq \mathbf{y}_s(k) \leq \bar{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{u}} \leq \mathbf{u}_s(k) \leq \bar{\mathbf{u}}, k \geq 0.$$

这里为简便,不引入干扰.但引入干扰后可简单地扩充本文方法.

为后续介绍方便,此处明确硬约束和软约束的概念.硬约束针对MV而言,其通常取决于变量的物理限制,如阀门的开度等.通常稳态MV约束 $\underline{\mathbf{u}} \leq \mathbf{u}_s(k) \leq \bar{\mathbf{u}}$ 可看做硬约束.软约束则主要针对CV和ET而言,主要考虑的是经济性能和安全等因素,如稳态CV约束 $\underline{\mathbf{y}} \leq \mathbf{y}_s(k) \leq \bar{\mathbf{y}}$ 可看做软约束.一般来说,软约束可以允许在一定程度上放松.

记MV的当前时刻稳态值为 $\mathbf{u}_s(k)$ ,上一时刻的稳态值为 $\mathbf{u}_s(k-1)$ .记CV的当前时刻稳态值为 $\mathbf{y}_s(k)$ ,上一时刻的稳态值为 $\mathbf{y}_s(k-1)$ .SSTC接收RTO(或操作员、工程师)给出的ET.ET中包括部分CV和MV的理想值.记 $u_{t,i}(k)(y_{t,j}(k))$ 为 $u_{s,i}(k)(y_{s,j}(k))$ 的理想值.并非所有的 $u_{s,i}(k)(y_{s,j}(k))$ 都有理想值,故记有理想值的 $i(j)$ 的集合为 $\mathcal{I}_t(\mathcal{J}_t)$ .

### 2.1 将被控变量和外部目标的约束表达为关于操作变量增量的约束(Expressing the constraints of CVs and ETs as those on the increments of MVs)

由于 $\mathbf{u}_s(k) = \mathbf{u}_s(k-1) + \Delta \mathbf{u}_s(k)$ ,所谓 $\mathbf{u}_s(k)$ 满足上下界约束,即

$$\mathbf{u}_s(k-1) + \Delta \mathbf{u}_s(k) \leq \bar{\mathbf{u}}, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_s(k-1) + \Delta \mathbf{u}_s(k) \geq \underline{\mathbf{u}}. \quad (2)$$

式(1)-(2)定义了一个由MV约束界规定的操作变量增量 $\Delta \mathbf{u}_s(k)$ 的集合.在SSTC中, $\Delta \mathbf{u}_s(k)$ 的优化必须满足式(1)-(2).

由于 $\mathbf{y}_s(k) = \mathbf{y}_s(k-1) + \Delta \mathbf{y}_s(k)$ ,所谓检验 $\mathbf{y}_s(k)$ 是否满足上下界约束,即检验

$$\mathbf{y}_s(k-1) + \Delta \mathbf{y}_s(k) \leq \bar{\mathbf{y}}, \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_s(k-1) + \Delta \mathbf{y}_s(k) \geq \underline{\mathbf{y}}. \quad (4)$$

由于CV并非独立变量, $\Delta \mathbf{y}_s(k)$ 的任何值都需要通过 $\Delta \mathbf{u}_s(k)$ 来实现.记 $G_{ji}$ 为相应于第 $i$ 个MV和第 $j$ 个CV的稳态增益系数.记 $\mathcal{I}_j$ 为所有使得 $G_{ji} \neq 0$ 的 $i$ 的集合,则

$$\Delta \mathbf{y}_{s,j}(k) = \sum_{i \in \mathcal{I}_j} G_{ji} \Delta \mathbf{u}_{s,i}(k) = \sum_{i=1}^m G_{ji} \Delta \mathbf{u}_{s,i}(k). \quad (5)$$

如果考虑所有的 $\Delta \mathbf{u}_{s,i}$ 和所有的 $\Delta \mathbf{y}_{s,j}$ ,则得到

$$\Delta \mathbf{y}_s(k) = G \Delta \mathbf{u}_s(k). \quad (6)$$

根据式(3)-(4),检验 $\mathbf{y}_s(k)$ 是否满足上下界约束变为检验

$$\mathbf{y}_s(k-1) + G \Delta \mathbf{u}_s(k) \leq \bar{\mathbf{y}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{y}_s(k-1) + G\Delta\mathbf{u}_s(k) \geq \mathbf{y}. \quad (8)$$

式(7)–(8)定义了一个由CV约束界规定的操作变量增量 $\Delta\mathbf{u}_s(k)$ 的集合. 但是, SSTC并不要求式(7)–(8)必须满足.

对ET, 通常给定期望允许变化范围(即允许变化范围的期望值). 记对应于 $u_{t,i}(k)$ 的期望允许变化范围为 $u_{s,i,\text{range}}$ . 取

$$\bar{u}_{s,i}(k) = u_{t,i}(k) + \frac{1}{2}u_{s,i,\text{range}}, \quad i \in \mathcal{I}_t, \quad (9)$$

$$\underline{u}_{s,i}(k) = u_{t,i}(k) - \frac{1}{2}u_{s,i,\text{range}}, \quad i \in \mathcal{I}_t, \quad (10)$$

则对 $u_{s,i}(k)$ , 需要检验

$$u_{s,i}(k-1) + \Delta u_{s,i}(k) \leq \bar{u}_{s,i}(k), \quad i \in \mathcal{I}_t, \quad (11)$$

$$u_{s,i}(k-1) + \Delta u_{s,i}(k) \geq \underline{u}_{s,i}(k), \quad i \in \mathcal{I}_t. \quad (12)$$

式(11)–(12)定义了一个由操作变量的外部目标(ET of MV, ETMV)期望允许变化范围所规定的MV增量 $\Delta\mathbf{u}_s(k)$ 的集合. 但是, SSTC并不要求式(11)–(12)必须满足.

记对应于 $y_{t,j}(k)$ 的期望允许变化范围为 $y_{s,j,\text{range}}$ . 取

$$\bar{y}_{s,j}(k) = y_{t,j}(k) + \frac{1}{2}y_{s,j,\text{range}}, \quad j \in \mathcal{J}_t, \quad (13)$$

$$\underline{y}_{s,j}(k) = y_{t,j}(k) - \frac{1}{2}y_{s,j,\text{range}}, \quad j \in \mathcal{J}_t, \quad (14)$$

则对 $y_{s,j}(k)$ , 需要检验

$$y_{s,j}(k-1) + \sum_{i \in \mathcal{I}_j} G_{ji} \Delta u_{s,i}(k) \leq \bar{y}_{s,j}(k), \quad j \in \mathcal{J}_t, \quad (15)$$

$$y_{s,j}(k-1) + \sum_{i \in \mathcal{I}_j} G_{ji} \Delta u_{s,i}(k) \geq \underline{y}_{s,j}(k), \quad j \in \mathcal{J}_t. \quad (16)$$

式(15)–(16)定义了一个由被控变量的外部目标(ET of CV, ETCV)期望允许变化范围所规定的MV增量 $\Delta\mathbf{u}_s(k)$ 的集合. 但是, SSTC并不要求式(15)–(16)必须满足.

ET本身也可以表达成关于MV增量的约束. 对应于 $u_{t,i}(k)$ , 约束为

$$u_{s,i}(k-1) + \Delta u_{s,i}(k) = u_{t,i}(k), \quad i \in \mathcal{I}_t. \quad (17)$$

对应于 $y_{t,j}(k)$ , 约束为

$$y_{s,j}(k-1) + \sum_{i \in \mathcal{I}_j} G_{ji} \Delta u_{s,i}(k) = y_{t,j}(k), \quad j \in \mathcal{J}_t. \quad (18)$$

但是, SSTC并不要求式(17)–(18)必须满足.

由于SSTC并不要求约束{(7)–(8), (11)–(12), (15)–(16), (17)–(18)}必须满足, 所以它们是软约束.

## 2.2 软约束(含外部目标)的优先级排名(Priority ranking of soft constraints (including ETs))

一般来说, RTO(或操作员、工程师)给出的 $u_{t,i}$ 总

是满足 $\underline{u}_i \leq u_{t,i} \leq \bar{u}_i$ . 优先级中, 可能包括如下软约束(含ET):

- 1) MV的理想值, 即ETMV, 也即软约束(17);
- 2) MV目标值的期望上下界, 即ETMV的软约束(11)–(12);
- 3) CV的理想值, 即ETCV, 也即软约束(18);
- 4) CV目标值的期望上下界, 即ETCV的软约束(15)–(16);
- 5) CV的软约束(7)–(8).

根据实际情况可将上述软约束按照优先级从高分到低的顺序排列. 在每个优先级中, 或者只有{1, 3)}中的一部分, 或者只有{2, 4, 5)}中的一部分, 也就是说或者只有等式型软约束, 或者只有不等式型软约束. 处于高优先级的软约束优先满足.

## 3 稳态目标计算的两阶段法(The two-stage method for steady-state target calculation)

### 3.1 稳态目标计算的可行性阶段(The feasibility stage of steady-state target calculation)

在每个优先级的优化问题中, 将该优先级之前所有优先级的软约束(可能已经放松)作为硬约束, 而将该优先级的软约束放松, 最终使得优化后的约束集是相容的.

考虑优先级 $r$ . 记通过第 $r$ 个优先级的优化问题的求解, 得到的从第1级到第 $r$ 级可行约束集为

$$\begin{bmatrix} I \\ -I \\ C^{(r)} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_s(k) \leq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_s(k-1) \\ -\underline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_s(k-1) \\ \mathbf{c}^{(r)}(k) \end{bmatrix}, \quad (19a)$$

$$C_{\text{eq}}^{(r)} \Delta\mathbf{u}_s(k) = \mathbf{c}_{\text{eq}}^{(r)}(k). \quad (19b)$$

当 $r = 0$ 时(尽管没有设置第0个优先级), 式(19)变为

$$\begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_s(k) \leq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_s(k-1) \\ -\underline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_s(k-1) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

约束(19)相对于第 $r + 1$ 个优先级的优化而言, 是硬约束, 即在求解第 $r + 1$ 个优先级的优化问题时式(19)必须满足. 考虑如下两种情况:

D) 第 $r + 1$ 个优先级为ET的理想值, 则考虑的约束为

$$\begin{bmatrix} I \\ -I \\ C^{(r)} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_s(k) \leq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_s(k-1) \\ -\underline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_s(k-1) \\ \mathbf{c}^{(r)}(k) \end{bmatrix}, \quad (21a)$$

$$\begin{bmatrix} C_{\text{eq}}^{(r)} \\ \tilde{C}_{\text{eq}}^{(r+1)} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_s(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\text{eq}}^{(r)}(k) \\ \tilde{\mathbf{c}}_{\text{eq}}^{(r+1)}(k) + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}}^{(r+1)}(k) \end{bmatrix}, \quad (21b)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}}^{(r+1)}(k)$ 为松弛变量, 对其优化的要求应为绝对值越小越好.

II) 第 $r+1$ 个优先级为目标值的期望上界或下界(包括单独放松上界、下界或同时放松上下界)和/或CV的软约束(包括单独放松CV的上界、下界或同时放松上下界), 则考虑的约束为

$$\begin{bmatrix} I \\ -I \\ C^{(r)} \\ \tilde{C}^{(r+1)} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_s(k) \leq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_s(k-1) \\ -\underline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_s(k-1) \\ \mathbf{c}^{(r)}(k) \\ \tilde{\mathbf{c}}^{(r+1)}(k) + \boldsymbol{\varepsilon}^{(r+1)}(k) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(r+1)}(k) \geq \mathbf{0}, \quad (22a)$$

$$C_{\text{eq}}^{(r)} \Delta \mathbf{u}_s(k) = \mathbf{c}_{\text{eq}}^{(r)}(k), \quad (22b)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(r+1)}(k)$ 为松弛变量. 需要特别说明的是, 若某个ETCV的等式约束出现在较高优先级中, 则此ETCV的不等式约束在较低的优先级计算中不予考虑. 但对应CV的上下界约束仍要考虑.

对第 $r+1$ 个优先级的优化问题, 或者采用线性规划, 或者采用二次规划. 如果在一个优先级中, 要同时调整多个软约束或ET, 则对它们给予同等重要的关注. 对每一个标量松弛变量 $\varepsilon$ , 记其对应的等关注偏差为 $\bar{\varepsilon}$ . 对 $y_{s,j}(k)$ 所涉及的CV软约束, 可以取其等关注偏差为 $\bar{\varepsilon}_j = \bar{y}_j - y_j$ . 对ET对应的上/下界和等式约束, 可以取其等关注偏差为ET<sub>range</sub>, 其中对 $u_{s,i}(k)$ 和 $y_{t,j}(k)$ 而言, 则分别为 $u_{s,i,\text{range}}$ 和 $y_{s,j,\text{range}}$ . 下面分4种情况讨论.

i) 类型I, 线性规划. 令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}+}^{(r+1)}(k) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}+}^{(r+1)}(k) - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}-}^{(r+1)}(k),$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}+}^{(r+1)}(k)$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}-}^{(r+1)}(k)$ 为松弛变量. 则求解

$$\min_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}+}^{(r+1)}(k), \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}-}^{(r+1)}(k)} \sum_{\tau=1}^{d_{r+1}} (\bar{\varepsilon}_{\text{eq},\tau}^{(r+1)})^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}+,\tau}^{(r+1)}(k) + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}-,\tau}^{(r+1)}(k)), \quad (23a)$$

$$\text{s.t. 式(21), } \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}+}^{(r+1)}(k) \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}-}^{(r+1)}(k) \geq \mathbf{0}, \quad (23b)$$

其中: 下角标 $\tau$ 表示对应于 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}}^{(r+1)}(k)$ 的第 $\tau$ 个元, 而 $d_{r+1}$ 表示 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}}^{(r+1)}(k)$ 的维数.

ii) 类型I, 二次规划, 则求解

$$\min_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq}}^{(r+1)}(k)} \sum_{\tau=1}^{d_{r+1}} (\bar{\varepsilon}_{\text{eq},\tau}^{(r+1)})^{-2} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{eq},\tau}^{(r+1)}(k)^2, \text{ s.t. 式(21)}. \quad (24)$$

iii) 类型II, 线性规划, 则求解

$$\min_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(r+1)}(k)} \sum_{\tau=1}^{d_{r+1}} (\bar{\varepsilon}_{\tau}^{(r+1)})^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{\tau}^{(r+1)}(k), \text{ s.t. 式(22)}, \quad (25)$$

其中: 下角标 $\tau$ 表示对应于 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(r+1)}$ 的第 $\tau$ 个元, 而 $d_{r+1}$ 表示 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(r+1)}$ 的维数.

iv) 类型II, 二次规划, 则求解

$$\min_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(r+1)}(k)} \sum_{\tau=1}^{d_{r+1}} (\bar{\varepsilon}_{\tau}^{(r+1)})^{-2} \boldsymbol{\varepsilon}_{\tau}^{(r+1)}(k)^2, \text{ s.t. 式(22)}. \quad (26)$$

当第 $r+1$ 个优先级的优化完成后, 式(21)或式(22)

则被统一表达为式(19), 即 $r$ 替换为 $r+1$ .

### 3.2 稳态目标计算的经济优化阶段(The economics stage of steady-state target calculation)

如果{式(7)–(8), 式(11)–(12), 式(15)–(16), 式(17)–(18)}中的某些不满足, 则对应的上(下)界或ET要被放松(软化), 记软化后的约束为

$$\mathbf{y}_s(k-1) + G \Delta \mathbf{u}_s(k) \leq \bar{\mathbf{y}}'(k), \quad (27)$$

$$\mathbf{y}_s(k-1) + G \Delta \mathbf{u}_s(k) \geq \underline{\mathbf{y}}'(k), \quad (28)$$

$$u_{s,i}(k-1) + \Delta u_{s,i}(k) \leq \bar{u}'_{s,i}(k), i \in \mathcal{I}_t, \quad (29)$$

$$u_{s,i}(k-1) + \Delta u_{s,i}(k) \geq \underline{u}'_{s,i}(k), i \in \mathcal{I}_t, \quad (30)$$

$$y_{s,j}(k-1) + \sum_{i \in \mathcal{I}_j} G_{ji} \Delta u_{s,i}(k) \leq \bar{y}'_{s,j}(k), j \in \mathcal{J}_t, \quad (31)$$

$$y_{s,j}(k-1) + \sum_{i \in \mathcal{I}_j} G_{ji} \Delta u_{s,i}(k) \geq \underline{y}'_{s,j}(k), j \in \mathcal{J}_t, \quad (32)$$

$$u_{s,i}(k-1) + \Delta u_{s,i}(k) = u_{s,i}(k), i \in \mathcal{I}_t, \quad (33)$$

$$y_{s,j}(k-1) + \sum_{i \in \mathcal{I}_j} G_{ji} \Delta u_{s,i}(k) = y_{s,j}(k), j \in \mathcal{J}_t, \quad (34)$$

其中:  $\bar{u}'_{s,i}(k) \geq \bar{u}_{s,i}(k)$ ,  $\underline{u}'_{s,i}(k) \leq \underline{u}_{s,i}(k)$ ;  $\bar{y}'_{s,j}(k) \geq \bar{y}_{s,j}(k)$ ,  $\underline{y}'_{s,j}(k) \leq \underline{y}_{s,j}(k)$ ;  $\bar{\mathbf{y}}'(k)$  ( $\underline{\mathbf{y}}'(k)$ )中的某些元可能与 $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$ 中的对应元相等, 而其他元则大于(小于) $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$ 中的对应元.

**定理1** 经过SSTC的可行性阶段, 约束{式(1)–(2), 式(27)–(34)}等价于式(33)–(34)和

$$u_{s,i}(k-1) + \Delta u_{s,i}(k) \leq \bar{u}_i, i \notin \mathcal{I}_t, \quad (35)$$

$$u_{s,i}(k-1) + \Delta u_{s,i}(k) \geq \underline{u}_i, i \notin \mathcal{I}_t, \quad (36)$$

$$y_{s,j}(k-1) + \sum_{i \in \mathcal{I}_j} G_{ji} \Delta u_{s,i}(k) \leq \bar{y}'_j(k), j \notin \mathcal{J}_t, \quad (37)$$

$$y_{s,j}(k-1) + \sum_{i \in \mathcal{I}_j} G_{ji} \Delta u_{s,i}(k) \geq \underline{y}'_j(k), j \notin \mathcal{J}_t. \quad (38)$$

**证** 式(33)–(34)中的等式, 使得{式(1)–(2), 式(27)–(34)}中所有对应于 $i \in \mathcal{I}_t$ 和 $j \in \mathcal{J}_t$ 的不等式为冗余的, 故结论显然成立. 证毕.

**定义1** 在 $k$ 时刻, SSTC的经济优化阶段的可行解指满足式(33)–(38)的 $\mathbf{u}_s(k)$ 和 $\mathbf{y}_s(k)$ . 也就是说,  $\Delta \mathbf{u}_s(k)$ 需要满足

$$\Delta u_{s,i}(k) = u_{s,i}(k) - u_{s,i}(k-1), i \in \mathcal{I}_t, \quad (39)$$

$$\Delta u_{s,i}(k) \leq \bar{u}_i - u_{s,i}(k-1), i \notin \mathcal{I}_t, \quad (40)$$

$$\Delta u_{s,i}(k) \geq \underline{u}_i - u_{s,i}(k-1), i \notin \mathcal{I}_t, \quad (41)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_j} G_{ji} \Delta u_{s,i}(k) = y_{s,j}(k) - y_{s,j}(k-1), j \in \mathcal{J}_t, \quad (42)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_j} G_{ji} \Delta u_{s,i}(k) \leq \bar{y}'_j(k) - y_{s,j}(k-1), j \notin \mathcal{J}_t, \quad (43)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_j} G_{ji} \Delta u_{s,i}(k) \geq \underline{y}'_j(k) - y_{s,j}(k-1), j \notin \mathcal{J}_t. \quad (44)$$

根据定义1, 所谓SSTC的经济优化问题, 实质上是寻找满足式(39)–(44)的 $\Delta \mathbf{u}_s(k)$ 的问题. 若采用线性规划, 优化问题如下所示:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_s(k)} J = \mathbf{h} \Delta \mathbf{u}_s(k), \text{ s.t. 式(39)–(44),}$$

其中 $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathcal{R}^{1 \times m}$ 为权重向量, 根据各个操作变量的标准化效益损失或成本折算后设定. 上述优化问题得到的解即为一组能够在当前约束条件下取得经济效益极大化的工作点.

相应地, 若采用二次规划, 优化问题如下所示:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_s(k)} J = (\mathbf{h} \Delta \mathbf{u}_s(k) - J_{\min})^2, \text{ s.t. 式(39)–(44),}$$

其中 $J_{\min}$ 为最大经济效益时对应的值.

通过SSTC可行性阶段和经济优化阶段求出 $\Delta \mathbf{u}_s(k)$ 后, 由 $\mathbf{u}_s(k) = \mathbf{u}_s(k-1) + \Delta \mathbf{u}_s(k)$ 和 $\mathbf{y}_s(k) = \mathbf{G} \mathbf{u}_s(k)$ 可以求得当前时刻MV和CV的设定值. SSTC阶段至此结束, 在获得MV和CV的稳态设定值后即可通过动态控制模块对上述稳态目标进行跟踪. 鉴于本文主要着眼于多优先级SSTC, 故动态跟踪控制相关内容仅在后续仿真中提及, 此处不再赘述.

#### 4 仿真算例(Simulation example)

采用Tai-Ji MPC软件(北京太极光控制软件有限公司产品)中提供的重油分馏塔模型, 其传递函数矩阵如下:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{4.05e^{-25s}}{50s+1} & \frac{1.77e^{-27s}}{60s+1} & \frac{5.88e^{-25s}}{50s+1} \\ \frac{5.39e^{-17s}}{50s+1} & \frac{5.72e^{-17s}}{60s+1} & \frac{6.90e^{-15s}}{40s+1} \\ \frac{5.92e^{-8s}}{12s+1} & \frac{2.54e^{-9s}}{27s+1} & \frac{8.10e^{-9s}}{20s+1} \\ \frac{4.13e^{-5s}}{8s+1} & \frac{2.38e^{-7s}}{19s+1} & \frac{6.23e^{-5s}}{10s+1} \\ \frac{4.38e^{-15s}}{33s+1} & \frac{4.42e^{-15s}}{44s+1} & \frac{7.20e^{-15s}}{19s+1} \end{bmatrix}.$$

各MV, CV的上下界均为 $-0.5, 0.5$ , 其中 $y_{s,1}, y_{s,2}, u_{s,2}$

具有外部目标并且其 $ET_{\text{range}}$ 均为0.5. 可行性阶段的相关参数设定见表2. 经济优化中, 权重向量 $\mathbf{h} = (1, 2, 2)$ ,  $J_{\min} = 5$ . 在 $k = 28$ 这一时刻,  $y_{s,1}, y_{s,2}, u_{s,2}$ 的外部目标发生变化, 分别由0.3,  $-0.3, 0.2$ 变化为0.1,  $-0.2, 0.4$ .

表 2 多优先级SSTC参数选取

Table 2 The parameters in multi-priority rank SSTC

优先级	类型	变量	理想值或上、下界	等关注偏差
1	II	$y_{s,3}$	CV上界	1
1	II	$y_{s,4}$	CV上界	1
1	II	$y_{s,5}$	CV下界	1
2	I	$y_{s,1}$	0.3, 0.1	0.5
2	I	$y_{s,2}$	-0.3, -0.2	0.5
3	II	$u_{s,2}$	ET下界	0.5
3	II	$u_{s,2}$	ET上界	0.5
3	II	$y_{s,1}$	ET下界	0.5
3	II	$y_{s,2}$	ET上界	0.5
3	II	$y_{s,5}$	CV上界	1
4	II	$y_{s,1}$	ET上界	0.5
4	II	$y_{s,2}$	CV下界	1
4	II	$y_{s,2}$	CV上界	1
4	II	$y_{s,3}$	CV下界	1
5	I	$u_{s,2}$	0.2, 0.4	0.5
6	II	$y_{s,2}$	ET下界	0.5
6	II	$y_{s,1}$	CV下界	1
6	II	$y_{s,1}$	CV上界	1
6	II	$y_{s,4}$	CV下界	1

多优先级SSTC的结果见表3, 采用线性规划和二次规划相同. 由表3可见, 由于 $y_{s,1}, y_{s,2}$ 处于较高优先级2上, 经多优先级SSTC得到的结果与外部目标的期望值一致, 较低优先级5的期望目标则未能完全满足. 结果表明多优先级算法在保证高优先级目标优先实现方面的有效性.

表 3 多优先级SSTC结果

Table 3 The results of the multi-priority rank SSTC

$k$	$\varepsilon_1^{1*}$	$\varepsilon_2^{1*}$	$\varepsilon_3^{1*}$	$\varepsilon_{\text{eq},1}^{2*}$	$\varepsilon_{\text{eq},2}^{2*}$	$\varepsilon_1^{3*}$	$\varepsilon_2^{3*}$	$\varepsilon_3^{3*}$	$\varepsilon_1^{4*}$	$\varepsilon_2^{4*}$	$\varepsilon_3^{4*}$	$\varepsilon_{\text{eq},1}^{5*}$
0 ~ 27	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.042	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.292
28 ~ 49	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.150	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.399
$k$	$\varepsilon_1^{6*}$	$\varepsilon_2^{6*}$	$\varepsilon_3^{6*}$	$u_{s,1}$	$u_{s,2}$	$u_{s,3}$	$y_{s,1}$	$y_{s,2}$	$y_{s,3}$	$y_{s,4}$	$y_{s,5}$	
0 ~ 27	0.000	0.000	0.000	-0.500	-0.092	0.423	0.300	-0.300	0.234	0.352	0.451	
28 ~ 49	0.000	0.000	0.000	-0.500	0.0004	0.361	0.100	-0.200	-0.033	0.187	0.413	

获取稳态目标之后, 本文采用工程中普遍接受的有限时域二次型性能指标来构造动态控制的优化问题, 求操作变量值. 采用子空间辨识方法<sup>[10]</sup>得到该模型的状态空间表示(而不是严格的离散化模型):

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k),$$

$$\mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k),$$

其中:  $\mathbf{x}$  为系统状态,  $\{A, B, C, D\}$  为状态空间矩阵(具体数值见文献[11], 此处略). 采样周期为  $t_s = 4 \text{ min}$ . 在整个仿真过程中, 对被控对象的模拟采用状态空间模型而不是上面的传递函数模型, 并且假设状态可测. 注意子空间辨识方法得到的模型中状态通常都是不可测的, 应该采用状态观测器, 但本文侧重点在于SSTC, 因此不采用观测器. 动态控制优化问题如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(i|k)} J(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} \|\mathbf{u}(j|k) - \mathbf{u}_s\|_R^2 + \\ &\quad \sum_{i=1}^P \|\mathbf{y}(j|k) - \mathbf{y}_s\|_Q^2, \\ \text{s.t. } \mathbf{x}(j+1|k) &= A\mathbf{x}(j|k) + B\mathbf{u}(j|k), \\ \mathbf{y}(j|k) &= C\mathbf{x}(j|k) + D\mathbf{u}(j|k), \\ \mathbf{u} &\leq \mathbf{u}(i|k) \leq \bar{\mathbf{u}}, \\ \underline{\mathbf{y}}'(k) &\leq \mathbf{y}(j+1|k) \leq \bar{\mathbf{y}}'(k), \end{aligned}$$

其中:  $P$  和  $N$  为预测时域和控制时域 ( $P \geq N$ ),  $Q$  和  $R$  为权重矩阵. 此处选择  $P = 6$ ,  $N = 4$ ,  $Q = 20I$ ,  $R = I$  ( $I$  为适维单位阵).  $\underline{\mathbf{y}}'(k)$  和  $\bar{\mathbf{y}}'(k)$  是经过SSTC调整后的约束上下界.  $\mathbf{u}_s(-1) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y}_s(-1) = \mathbf{0}$ . 动态控制结果见图1. 结果表明SSTC给出的CV和MV的稳态值可以被动态控制模块完全跟踪上.

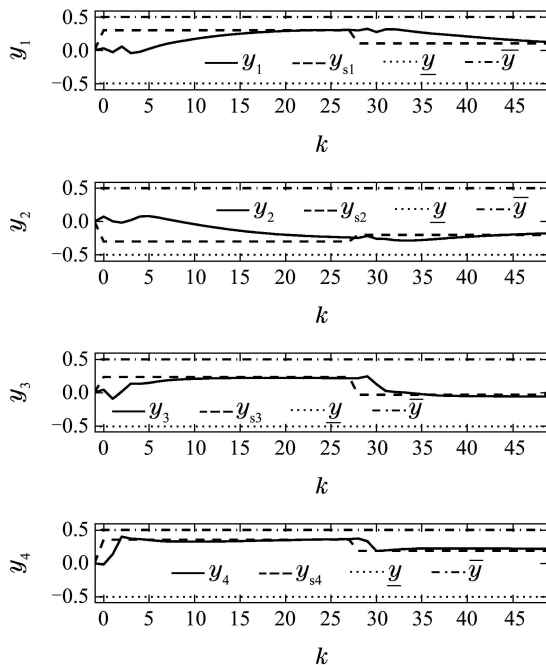


图1 重油分馏塔控制结果

Fig. 1 The control results of the heavy oil fractionator

## 5 结论(Conclusion)

本文描述了一种多优先级SSTC算法. 该算法将CV和ET的约束统一表述为关于MV增量的约束. 在可行性阶段, 将两种不同类型下的关于MV增量的软约束采用线性或二次规划进行放松, 保证了放松后MV增量约束集的相容性; 在经济优化阶段, 求解经济最优的MV增量值. 注意这类算法在若干工业MPC软件中都已经采用, 但是并没有完整描述的论著出现, 至少未见与本文方案完全一致的论著. 类似本文的SSTC算法的研究已非前沿课题, 但是其对应的理论问题却远远没有解决. 为了系统地继续研究双层结构MPC的稳定性等问题, 有必要首先给出SSTC算法上的统一描述. 本文正是为了考虑这种应用和学术上的双重要求而写就. 更完整的SSTC描述, 尚需要考虑可测干扰、(由建模误差带来的)误差校正、CV的工程硬约束等, 将在后续的论文中阐述.

## 参考文献(References):

- [1] 席裕庚, 李德伟, 林姝. 模型预测控制—现状与挑战 [J]. 自动化学报, 2013, 39(3): 222–236.  
(XI Yugeng, LI Dewei, LIN Shu. Model predictive control—status and challenges [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 222–236.)
- [2] DARBY M L, NIKOLAOU M. MPC: Current practice and challenges [J]. *Control Engineering Practice*, 2012, 20(4): 328–342.
- [3] 席裕庚, 耿晓军, 陈虹. 预测控制性能研究的新进展 [J]. 控制理论与应用, 2000, 17(4): 469–475.  
(XI Yugeng, GENG Xiaojun, CHEN Hong. Recent advances in re-

- search on predictive control performance [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(4): 469 – 475.)
- [4] YING C M, JOSEPH B. Performance and stability analysis of LP-MPC and QP-MPC cascade control systems [J]. *AIChE Journal*, 2009, 45(7): 1521 – 1534.
- [5] 邹涛, 李海强. 具有积分环节多变量系统的双层结构预测控制 [J]. 浙江大学学报(工学版), 2011, 45(2): 2079 – 2087.  
(ZOU Tao, LI Haiqiang. Two-layer predictive control of multi – variable system with integrating element [J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2011, 45(2): 2079 – 2087.)
- [6] 邹涛, 丁宝苍, 张端. 模型预测控制工程应用导论 [M]. 北京: 化学工业出版社, 2010.  
(ZOU Tao, DING Baocang, ZHANG Duan. *MPC: An Introduction to Industrial Applications* [M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2010.)
- [7] 钱积新, 赵均, 徐祖华. 预测控制 [M]. 北京: 化学工业出版社, 2007.  
(QIAN Jixin, ZHAO Jun, XU Zuhua. *Predictive Control* [M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2007.)
- [8] 席裕庚, 谷寒雨. 有约束多目标多自由度优化的可行性分析及软约束调整 [J]. 自动化学报, 1998, 24(6): 726 – 731.  
(XI Yugeng, GU Hanyu. Feasibility analysis and soft constraints adjustment of CMMO [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(6): 726 – 731.)
- [9] QIN S J, BADGWELL A. A survey of industrial model predictive control technology [J]. *Control Engineering Practice*, 2003, 7(11): 733 – 764.
- [10] ZHU Y C. *Multivariable System Identification For Process Control* [M]. Amsterdam: Elsevier, 2001.
- [11] 潘红光, 高海南, 孙耀, 等. 基于多优先级稳态优化的双层结构预测控制算法及软件实现 [J]. 自动化学报, 2014, 40(3): 405 – 414.  
(PAN Hongguang, GAO Hainan, SUN Yao, et al. The algorithm and software implementation for the double – layered model predictive control based on multi – priority rank steady – state optimization [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014 40(3): 405 – 414.)

### 作者简介:

李世卿 (1991–), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为预测控制,

E-mail: lsqjhy@126.com;

丁宝苍 (1972–), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为预测控制、模糊控制及其在流程工业中的应用, E-mail: baocangding@126.com;

孙耀 (1987–), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为预测控制, E-mail: 514850388@qq.com.