

无抖振离散重复控制器的设计与实现

邬玲伟, 孙明轩[†]

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

摘要: 针对周期参考/干扰信号下的不确定离散时间系统, 提出一种基于吸引律的重复控制方法, 在吸引律中“嵌入”干扰抑制措施, 构造理想误差动态, 并基于此设计重复控制器. 文中推导出单调减区域、绝对吸引层和稳态误差带边界的表达式, 用于整定控制器参数和表征闭环系统的跟踪性能, 并给出了跟踪误差在无干扰时收敛于原点及在干扰存在时收敛进入稳态误差带内所需最多步数的表达式. 设计的重复控制器不仅能够完全抑制周期干扰信号, 而且可以消除系统抖振. 在电机实验装置上的应用结果表明了所提出控制方法的有效性.

关键词: 重复控制; 无抖振; 理想误差动态; 离散时间系统

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Design and implementation of a chattering-free discrete-time repetitive controller

WU Ling-wei, SUN Ming-xuan[†]

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China)

Abstract: This paper presents an attracting-law-based design of discrete-time repetitive controllers for systems with periodic reference/disturbance signals. A measure of disturbance-rejection is embedded in the attracting law to form the ideal error dynamics, by which the discrete-time repetitive controller is derived. For characterizing the tracking performance and the convenience in adjusting the controller parameters, we derive the expressions for the range of the steady-state error, the boundary of the monotonically decreasing region and the absolute attractive layer, and the steps for tracking error to converge to the origin/steady-state error bound without/with the disturbances. The developed repetitive controller is not only effective for rejecting the periodic disturbances, but also ensures chattering avoidance. A motor servo system is taken as an example, and experiment results are given to validate the feasibility and effectiveness of the presented control method.

Key words: repetitive control; chattering-free; ideal error dynamics; discrete-time systems

1 引言(Introduction)

离散滑模控制是实际中常用的一种控制方法, 它引起人们极大兴趣的是其滑动模态对系统在受到参数摄动及外界干扰时所具有的鲁棒性. 在设计滑模控制器时, 需要考虑到达条件. 文献[1–2]提出了等式到达条件的趋近律. 与不等式形式的到达条件相比, 趋近律更好地描述系统趋近切换面的运动过程, 而且由这种等式条件更容易推得控制律. 目前, 趋近律方法已发展成为离散滑模控制系统设计的一种主要方法.

回顾已发表的离散滑模控制的研究结果. 通过引入sgn函数, 文献[2]给出的离散指数趋近律使得切换函数步步穿越切换面, 形成zigzag滑动, 并且给出了准滑动模态的定义. 文献[3]给出了新的准滑动模态定义

以及提出的趋近律放宽了文献[2]中给出的趋近律每一步穿越切换面的要求. 文献[4]引入解耦干扰观测器, 使得切换动态与干扰估计误差动态是解耦的. 文献[5–6]对切换函数边界层的吸引过程进行了讨论. 文献[7]提出一种无抖振滑模控制器设计方法, 且通过改变采样周期来提高系统的鲁棒性. 文献[8]对离散趋近律方法进行分类研究, 并提出理想趋近律方法和鲁棒趋近律方法. 文献[9]提出一种扰动动态补偿的离散趋近律, 并给出了切换函数从任意初态开始第一次穿越切换面所需的步数.

对于不确定系统, 采用离散趋近律方法设计控制器, 所推导出的控制器与干扰项有关, 因而实际中无法实现^[2]. 因此, 需采用理想切换动态方法, 即在原趋

近律中“嵌入”干扰抑制措施, 构造出理想的切换函数动态, 由其切换动态方程推导出可实现的控制器. 实际上, 它是考虑了干扰抑制目的用于处理不确定系统的趋近律方法. 文献[10–11]提出的理想误差动态设计方法是基于能够使跟踪误差本身趋近原点的吸引律, 构造一种具有干扰抑制作用的理想误差动态.

实际中有许多被控对象常被要求执行周期跟踪任务, 如电力电子线路及硬盘/光盘伺服系统等. 这类系统的参考信号是周期已知的周期信号, 重复运行时受到的外界干扰在稳态时往往呈周期特性. 重复控制技术可抑制周期干扰, 实现对周期期望输入信号的精确跟踪^[12–15]. 大多文献利用内模原理的频域方法设计重复控制器^[12]. 而文献[13]将二维连续/离散系统理论应用于重复控制, 提出了一种基于二维混合模型的重复控制新方法; 文献[14]采用饱和趋近律方法, 给出的控制律是重复控制律, 形式上看是一周期修正; 文献[15]采用幂次趋近律设计变结构重复控制器.

本文提出一种基于吸引律的重复控制方法. 通过将干扰抑制措施“嵌入”到吸引律中, 构造出理想误差动态, 并基于此设计重复控制器, 使闭环系统具有理想误差动态所表征的期望性能. 本文称这种方法为理想误差动态方法. 本文提出理想误差动态方法的动机源于离散滑模控制的理想切换动态方法. 两者的区别在于: 将跟踪误差取代切换函数、原点取代滑模面; 滑模控制要求有限时间达到滑模面, 而本文提出的方法要求有限时间达到原点; 闭环系统仍具有关于参数摄动和外界干扰的鲁棒性能, 只是滑模控制能够保证滑动模态的不变性, 而本文提出的方法可实现原点(即稳态)的相同特性. 为了进行控制器参数整定和表征闭环系统的跟踪性能, 文中推导出单调减区域、绝对吸引层和稳态误差带边界的表达式, 并给出了跟踪误差在无干扰时收敛于原点及在存在干扰时收敛进入稳态误差带内所需最多步数的表达式. 最后通过在电机实验装置上的应用结果验证了3个边界值和所提出控制方法的有效性.

2 问题的提出(Problem formulation)

考虑如下单输入单输出(single input single output, SISO)离散时间系统:

$$A(q^{-1})y_k = q^{-d}B(q^{-1})u_k + w_k, \quad (1)$$

其中: u_k 和 y_k 分别为 k 时刻的输入和输出, w_k 表示 k 时刻的系统干扰; $A(q^{-1})$ 与 $B(q^{-1})$ 为延迟算子 q^{-1} 的多项式:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n}, \quad (2)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \cdots + b_mq^{-m}, \quad b_0 \neq 0, \quad (3)$$

其中: n 为 $A(q^{-1})$ 的阶数, m 为 $B(q^{-1})$ 的阶数, $a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ 为系统参数, 且 $1 \leq m \leq n$; d 表示延迟,

且本文中设 $d = 1$.

参考信号 r_k 是周期为 N 的周期信号, 满足 $r_k = r_{k-N}$. 定义跟踪误差

$$e_k = r_k - y_k. \quad (4)$$

本文的控制目的是寻找控制序列 u_k , 在保证闭环系统稳定的同时, 使得输出信号 y_k 尽可能地跟踪上给定的参考信号 r_k .

本文基于吸引律设计重复控制器, 提出表征跟踪误差收敛过程的3个边界, 即稳态误差带边界 Δ_{SSE} 、绝对吸引层边界 Δ_{AAL} 和单调减区域边界 Δ_{MDR} . 这3个边界的具体定义详见文献[10].

实际上, Δ_{SSE} , Δ_{AAL} 和 Δ_{MDR} 的具体取值依赖于控制器(第4节给出)中的可调参数 ρ , ε 和扰动的界值 Δ . 选取不同的控制器参数会导致不同的边界值. 本文将分别推导出3个边界的具体表达式.

3 吸引律(Attracting law)

为了进行控制器设计, 本文提出一种误差吸引律方法, 它反映了无干扰($w_k = 0$)时的误差动态特性, 且能够满足控制系统的暂态和稳态性能要求.

考虑下述离散吸引律:

$$e_{k+1} = e_k - \min\{|e_k|, \rho|e_k| + \varepsilon\} \operatorname{sgn}(e_k). \quad (5)$$

其中: $0 < \rho < 1$, $\varepsilon > 0$ 为可调参数.

注1 式(5)相应的趋近律是由文献[7]提出的, 它使得切换函数趋近滑模面; 而本文所提出的吸引律(5)能够使跟踪误差本身趋近原点, 直接反映了误差动态特性.

定理1 当 $w_k = 0$ 时, 利用式(5)设计控制器, 则离散系统具有以下收敛性能:

- 1) 跟踪误差同号单调收敛;
- 2) 无抖振、无正负交替的现象, 即

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(e_{k+1}) = \operatorname{sgn}(e_k), & |e_k| > \frac{\varepsilon}{1-\rho}, \\ e_{k+1} = 0, & |e_k| \leq \frac{\varepsilon}{1-\rho}. \end{cases} \quad (6)$$

证 同号单调收敛.

当 $e_k > \varepsilon/(1-\rho)$ 时, 由式(5)可得

$$0 < e_{k+1} = (1-\rho)e_k - \varepsilon < e_k. \quad (7)$$

当 $0 < e_k \leq \varepsilon/(1-\rho)$ 时, 由式(5)知 $e_k > e_{k+1} = 0$. 同理可得, 当 $e_k < 0$ 时, 有 $e_k < e_{k+1} \leq 0$.

下面证明无抖振、无正负交替现象.

当 $|e_k| > \varepsilon/(1-\rho)$ 时, 式(5)变成

$$e_{k+1} = e_k - (\rho|e_k| + \varepsilon) \operatorname{sgn}(e_k). \quad (8)$$

由式(8)知

$$e_{k+1} \operatorname{sgn}(e_k) = (1-\rho)|e_k| - \varepsilon >$$

$$(1-\rho)\frac{\varepsilon}{1-\rho} - \varepsilon = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sgn}(e_{k+1}) = \operatorname{sgn}(e_k). \quad (9)$$

当 $|e_k| \leq \varepsilon/(1-\rho)$ 时,由式(5)知, $e_{k+1}=0$. 证毕.

定理 2 当 $w_k=0$ 时,利用式(5)设计控制器,对任意初始值 $e_0(e_0 \neq 0)$,跟踪误差经过 $\lceil k_1 \rceil + 1$ 步后单调收敛于原点.其中, k_1 的表达式为

$$k_1 = \begin{cases} \log_{(1-\rho)}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \rho|e_0|}\right) - 1, & |e_0| > \frac{\varepsilon}{1-\rho}, \\ 0, & |e_0| \leq \frac{\varepsilon}{1-\rho}, \end{cases} \quad (10)$$

$\lceil \cdot \rceil$ 表示大于或等于 \cdot 的最小整数.

证 下面按 $|e_0| > \varepsilon/(1-\rho)$ 和 $|e_0| \leq \varepsilon/(1-\rho)$ 两种情形进行证明.

1) 考虑 $|e_0| > \varepsilon/(1-\rho)$ 情形.

当 $e_k > \varepsilon/(1-\rho)$ 时,由式(5)和定理1的1)知

$$e_k = (1-\rho)^k e_0 - \varepsilon \frac{1 - (1-\rho)^k}{\rho}.$$

假设在 $\lceil k_1 \rceil$ 时刻的跟踪误差收敛进入到 $|e_k| \leq \varepsilon/(1-\rho)$ 的邻域内,且 $k_1 = \log_{(1-\rho)}(\varepsilon/(\varepsilon + \rho|e_0|)) - 1$ 满足

$$(1-\rho)^{k_1} e_0 - \varepsilon \frac{1 - (1-\rho)^{k_1}}{\rho} = \frac{\varepsilon}{1-\rho}.$$

当 $0 \leq k \leq \lceil k_1 \rceil$ 时, $e_0 > \varepsilon/(1-\rho)$,则有

$$e_{\lceil k_1 \rceil} = (1-\rho)^{\lceil k_1 \rceil} e_0 - \varepsilon \frac{1 - (1-\rho)^{\lceil k_1 \rceil}}{\rho} \leq$$

$$(1-\rho)^{k_1} e_0 - \varepsilon \frac{1 - (1-\rho)^{k_1}}{\rho} = \frac{\varepsilon}{1-\rho}.$$

所以,跟踪误差收敛进入 $|e_k| \leq \varepsilon/(1-\rho)$ 邻域内的步数为 $\lceil k_1 \rceil = \lceil \log_{(1-\rho)}(\varepsilon/(\varepsilon + \rho|e_0|)) - 1 \rceil$.当 $0 < |e_{\lceil k_1 \rceil}| \leq \varepsilon/(1-\rho)$ 时,由式(5)知, $e_{\lceil k_1 \rceil+1} = 0$.同理可得,当 $e_0 < -\varepsilon/(1-\rho)$ 时,跟踪误差收敛于原点的步数为 $\lceil \log_{(1-\rho)}(\varepsilon/(\varepsilon - \rho e_0)) \rceil$.

2) 考虑 $|e_0| \leq \varepsilon/(1-\rho)$ 情形.

当 $|e_0| \leq \varepsilon/(1-\rho)$ 时,由式(5)知 $e_1 = 0$.所以跟踪误差收敛于原点的步数为1. 证毕.

注 2 在无干扰时,利用吸引律(5)设计的控制器,不但能够实现无抖振控制,而且可以保证跟踪误差在有限步内收敛于原点.另外,改变 ε 和 ρ 的大小可以改变 e_k 的吸引速度.

4 重复控制器设计 (Repetitive controller design)

在这一节,基于吸引律(5)构造理想误差动态,用于重复控制器设计.理想误差动态是在吸引律中“嵌入”了干扰抑制措施,反映了干扰存在时控制系统的误差动态特性.

由于系统存在不确定性干扰,吸引律(5)在实际中不可实现.为此,将干扰抑制措施“嵌入”到吸引律

(5)中,构造如下理想误差动态:

$$e_{k+1} = e_k - \min\{|e_k|, \rho|e_k| + \varepsilon\} \operatorname{sgn}(e_k) - d_{k+1}, \quad (11)$$

其中: $d_k = w_k - w_{k-N}$, N 为周期干扰部分的周期.

注 3 理想误差动态(11)中引入的变量 d_k 为两个周期之间的干扰的差($w_k - w_{k-N}$),反映了对于给定周期对称特性的干扰信号的抑制措施;而现有的干扰抑制技术大多是用前一时刻干扰对当前时刻干扰进行补偿、抑制,即前后两步干扰的差($w_k - w_{k-1}$).

令 Δ 为 d_k 的上界值,即

$$|d_k| \leq \Delta, \quad \forall k > N. \quad (12)$$

将式(1)延时 N 步,可得

$$w_{k-N} = A(q^{-1})y_{k-N} - q^{-d}B(q^{-1})u_{k-N}. \quad (13)$$

由式(1)(4)(13)知

$$d_{k+1} = r_{k+1} - r_{k+1-N} - e_{k+1} + e_{k+1-N} + q(A(q^{-1}) - 1)(y_k - y_{k-N}) - q^{-d+1}B(q^{-1})(u_k - u_{k-N}). \quad (14)$$

将式(14)代入式(11),可得如下重复控制器:

$$u_k = u_{k-N} + [q^{-d+1}B(q^{-1})]^{-1}[e_{k+1-N} - e_k + \min\{|e_k|, \rho|e_k| + \varepsilon\} \operatorname{sgn}(e_k) - r_{k+1-N} + r_{k+1} + q(A(q^{-1}) - 1)(y_k - y_{k-N})]. \quad (15)$$

注 4 式(15)中, y_k 可通过量测获得, r_{k+1-N} 和 r_{k+1} 为给定参考信号的第 $k+1-N$ 和 $k+1$ 时刻值, e_{k-N+1} 和 e_k 可通过计算获得, u_{k-N} 和 y_{k-N} 为控制信号和输出信号的前一周存储值,可从内存中取得.虽然从控制器形式上看较为复杂,但控制算法仅需当前时刻输出信息、前一周控制信息和输出信息($2N+1$ 个内存占用空间)即能实现.在重复控制器(15)作用下,不确定系统(1)的误差动态性能由式(11)决定.因而,基于式(11)设计的重复控制器(15)不仅可实现有限时间收敛,而且能够完全抑制周期干扰信号.

注 5 本文提出的重复控制器设计方法也适用于常值调节问题,这时的变量 d_k 满足 $d_k = w_k - w_{k-1}$,重复控制器(15)修改为

$$u_k = u_{k-1} + [q^{-d+1}B(q^{-1})]^{-1}[r_{k+1} - r_k + \min\{|e_k|, \rho|e_k| + \varepsilon\} \operatorname{sgn}(e_k) + q(A(q^{-1}) - 1)(y_k - y_{k-1})]. \quad (16)$$

由式(16)易知,该控制器实际上是重复控制器(15)置 $N=1$ 的一种特殊情形.

在实现时,重复控制算法按照式(15)进行编程.具体的控制器参数 ρ, ε 可根据表征系统收敛性能的指标进行整定,而这些指标可以由表征跟踪误差收敛过程的3个边界来刻画.

5 鲁棒性分析(Robust analysis)

本节作者推导出稳态误差带、绝对吸引层以及单调减区域边界的表达式, 并给出跟踪误差收敛进入到稳态误差带内所需最多步数的表达式.

在重复控制器(15)作用下, 系统跟踪误差的稳态误差带边界 Δ_{SSE} 、绝对吸引层边界 Δ_{AAL} 和单调减区域边界 Δ_{MDR} 分别为

$$\Delta_{SSE} = \Delta_{AAL} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, & \varepsilon \leq (1 - \rho)\Delta, \\ \Delta, & \varepsilon > (1 - \rho)\Delta, \end{cases} \quad (17)$$

$$\Delta_{MDR} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, & \varepsilon \leq (1 - 2\rho)\Delta, \\ \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho}, & \varepsilon > (1 - 2\rho)\Delta. \end{cases} \quad (18)$$

系统边界 Δ_{SSE} , Δ_{AAL} , Δ_{MDR} 这3者的证明过程类似, 下文只证明稳态误差带边界 Δ_{SSE} .

下面按 $\Delta_{SSE} > \varepsilon/(1 - \rho)$ 与 $\Delta_{SSE} \leq \varepsilon/(1 - \rho)$ 两种情况进行证明.

1) 考虑 $\Delta_{SSE} > \varepsilon/(1 - \rho)$ 情况.

当 $\varepsilon/(1 - \rho) < e_k \leq \Delta_{SSE}$ 时, 式(11)转化为

$$-\Delta_{SSE} \leq (1 - \rho)e_k - \varepsilon - d_{k+1} \leq \Delta_{SSE}.$$

利用 $|d_k| \leq \Delta$, 有

$$\begin{cases} (1 - \rho)\Delta_{SSE} - \varepsilon + \Delta \leq \Delta_{SSE}, \\ -\Delta \geq -\Delta_{SSE}. \end{cases} \quad (19)$$

解不等式方程组(19), 可得

$$\Delta_{SSE} \geq \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \Delta\right\}. \quad (20)$$

同理, 当 $-\Delta_{SSE} \leq e_k < -\varepsilon/(1 - \rho)$ 时, 可得相同的结果. 因此, 稳态误差带边界 Δ_{SSE} 为(选取满足边界取值条件的最小值)

$$\Delta_{SSE} = \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \Delta\right\} > \frac{\varepsilon}{1 - \rho}. \quad (21)$$

当 $0 \leq e_k \leq \varepsilon/(1 - \rho) \leq \Delta_{SSE}$ 时, 由式(11)知 $-\Delta_{SSE} \leq -d_{k+1} \leq \Delta_{SSE}$. 利用 $|d_k| \leq \Delta$, 有 $\Delta_{SSE} \geq \Delta$. 同理, 当 $-\Delta_{SSE} \leq -\varepsilon/(1 - \rho) < e_k$ 时, 可得相同的结果. 因此, 稳态误差带边界 Δ_{SSE} 为

$$\Delta_{SSE} = \Delta > \frac{\varepsilon}{1 - \rho}. \quad (22)$$

结合式(21)–(22), 可得

$$\Delta_{SSE} = \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \Delta\right\} > \frac{\varepsilon}{1 - \rho}. \quad (23)$$

2) 考虑 $\Delta_{SSE} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \rho}$ 情况.

当 $0 < e_k \leq \Delta_{SSE} \leq \varepsilon/(1 - \rho)$ 时, 由式(11)可知 $-\Delta_{SSE} \leq -d_{k+1} \leq \Delta_{SSE}$. 由 $|d_k| \leq \Delta$ 知 $\Delta_{SSE} \geq \Delta$. 同理, 当 $-\varepsilon/(1 - \rho) \leq -\Delta_{SSE} \leq e_k < 0$ 时, 可得相同

的结果. 因此, 稳态误差带边界 Δ_{SSE} 为

$$\Delta_{SSE} = \Delta \leq \frac{\varepsilon}{1 - \rho}. \quad (24)$$

根据式(23)–(24), 可得式(17).

注6 3个边界的大小取决于控制器参数 ρ , ε 和扰动的界值 Δ . 在实现时, 可首先提出对3个边界值的要求, 具体的控制器参数的整定工作可根据这些要求和3个边界的具体表达式进行.

注7 从 d_k 的定义看, 设计的重复控制器(15)可完全抑制周期干扰信号; Δ_{SSE} 表示非周期干扰信号的抑制水平.

定理3 不确定离散系统(1)满足

$$\frac{\rho}{1 - (1 - \rho)^k} \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \rho)^i |d_{k-i}| \leq \delta < \Delta. \quad (25)$$

利用式(11)设计控制器(15), 则 $|e_0| > \Delta_{SSE}$ 时, 跟踪误差最多经过 k^* 步后收敛进入稳态误差带 Δ_{SSE} 内, 并稳定于其内. 其中: $k^* = [k_2]$, k_2 的表达式为

$$k_2 = \begin{cases} \log_{(1-\rho)}\left(\frac{\Delta - \delta}{\varepsilon - \delta + \rho|e_0|}\right), & \varepsilon \leq (1 - \rho)\Delta, \\ \log_{(1-\rho)}\left(\frac{\varepsilon - (1 - \rho)\delta}{\varepsilon - \delta + \rho|e_0|}\right), & \varepsilon > (1 - \rho)\Delta, |e_0| > \frac{\varepsilon}{1 - \rho}, \\ 1, & \varepsilon > (1 - \rho)\Delta, |e_0| \leq \frac{\varepsilon}{1 - \rho}, \end{cases} \quad (26)$$

$[\cdot]$ 表示大于或等于 \cdot 的最小整数.

证 $\varepsilon \leq (1 - \rho)\Delta$ 与 $\varepsilon > (1 - \rho)\Delta$ 两种情况的证明过程类似, 下文只证明 $\varepsilon > (1 - \rho)\Delta$ 的情况.

当 $\varepsilon > (1 - \rho)\Delta$ 时, 由式(17), 可得

$$\Delta_{SSE} = \Delta < \frac{\varepsilon}{1 - \rho}.$$

当 $|e_0| > \varepsilon/(1 - \rho)$ 时, 由式(11)和式(25)知

$$\begin{aligned} |e_k| &= (1 - \rho)^k |e_0| - \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \rho)^i (\varepsilon - |d_{k-i}|) \leq \\ &(1 - \rho)^k |e_0| - (\varepsilon - \delta) \frac{1 - (1 - \rho)^k}{\rho}. \end{aligned}$$

假设在 $[k_3]$ 时刻跟踪误差收敛进入 $|e_k| \leq \varepsilon/(1 - \rho)$ 的邻域内, 且 k_3 满足

$$(1 - \rho)^{k_3} |e_0| - (\varepsilon - \delta) \frac{1 - (1 - \rho)^{k_3}}{\rho} = \frac{\varepsilon}{1 - \rho}.$$

当 $0 \leq k \leq [k_3]$ 时, $|e_0| > \varepsilon/(1 - \rho)$, 则有

$$\begin{aligned} |e_{[k_3]}| &\leq (1 - \rho)^{[k_3]} |e_0| - (\varepsilon - \delta) \frac{1 - (1 - \rho)^{[k_3]}}{\rho} \leq \\ &(1 - \rho)^{k_3} |e_0| - (\varepsilon - \delta) \frac{1 - (1 - \rho)^{k_3}}{\rho} = \\ &\frac{\varepsilon}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

所以跟踪误差收敛进入 $|e_k| \leq \varepsilon/(1-\rho)$ 邻域内所需步数为 $\lceil \log_{(1-\rho)}((\varepsilon - (1-\rho)\delta)/(\varepsilon - \delta + \rho|e_0|)) - 1 \rceil$. 当 $|e_{\lceil k_3 \rceil}| \leq \varepsilon/(1-\rho)$ 时, 有 $|e_{\lceil k_3 \rceil + 1}| \leq \Delta_{\text{SSE}}$.

综上, 当 $\varepsilon > (1-\rho)\Delta$ 且 $|e_0| > \varepsilon/(1-\rho)$ 时, 跟踪误差收敛进入稳态误差带内所需最多的步数为

$$k^* = \lceil k_2 \rceil = \lceil k_3 \rceil + 1 = \lceil \log_{(1-\rho)}\left(\frac{\varepsilon - (1-\rho)\delta}{\varepsilon - \delta + \rho|e_0|}\right) \rceil.$$

当 $\varepsilon > (1-\rho)\Delta$ 且 $|e_0| \leq \varepsilon/(1-\rho)$ 时, 有 $|e_1| \leq \Delta_{\text{SSE}}$. 因此, 跟踪误差收敛进入稳态误差带内所需的步数为 $k^* = \lceil k_2 \rceil = 1$. 证毕.

注8 当 $|d_k| = \Delta$ 且 $\varepsilon \leq (1-\rho)\Delta$ 时, 跟踪误差不会收敛进入稳态误差带内. 但只要出现 $|d_k| < \Delta$ 情况, 跟踪误差将会在有限步收敛进入稳态误差带内, 且出现次数越多, 误差收敛速度越快, 所需的步数越少.

6 实验结果(Experiment results)

本节以电机为被控对象, 验证上述理论结果. 作者将电机动态特性表达为二阶离散动态系统, 其输入输出特性可表达为

$$y_{k+1} = -a_1 y_k - a_2 y_{k-1} + b_1 u_k + b_2 u_{k-1} + w_{k+1}, \quad (27)$$

其中: u_k 和 y_k 分别为 k 时刻的系统控制输入和输出, w_k 为 k 时刻的干扰信号(包括参数摄动、外部干扰及各种未建模动态特性等). 模型参数为

$$a_1 = -1.5001, \quad a_2 = 0.4989, \\ b_1 = 2.8786, \quad b_2 = -0.4113.$$

对于由式(27)表示的受控对象, 重复控制器(15)变成

$$u_k = u_{k-N} + \frac{1}{b_1} [b_2(u_{k-1-N} - u_{k-1}) + r_{k+1} - r_{k+1-N} - e_k + a_1(y_k - y_{k-N}) + a_2(y_{k-1} - y_{k-1-N}) + e_{k+1-N} + \min\{|e_k|, \rho|e_k| + \varepsilon\} \text{sgn}(e_k)]. \quad (28)$$

本文设计的控制器作为电机三环控制系统中的位置环控制器.

在实验中, 采样周期 $T_s = 5$ ms, 控制器参数选取为: $\rho = 0.45$, $\varepsilon = 0.00025$.

1) 定位控制.

定位控制实验中电机的给定位置参考信号

$$r_k = \begin{cases} 0, & 0 < kT_s \leq 1, \\ \frac{3\pi}{4} [10(kT_s - 1)^3 - 15(kT_s - 1)^4 + 6(kT_s - 1)^5], & 1 < kT_s \leq 2, \\ \frac{3\pi}{4}, & kT_s > 2. \end{cases}$$

采用控制器(16), 实验结果见图1. 位置输出信号快速跟踪上给定的位置参考信号, 且无超调; 定位误差在 2×10^{-3} rad左右.

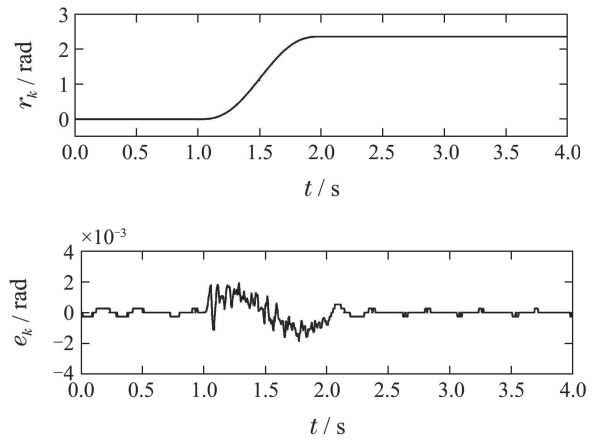


图1 采用控制器(16)时的定位控制性能

Fig. 1 Positioning performance by controller (16)

2) 周期跟踪.

周期跟踪时的给定参考信号选取为

$$r_k = \frac{3\pi}{4} \times \sin(2\pi f T_s k) \text{ rad},$$

其中频率 $f = 0.25$ Hz. 采用控制器(16), 实验结果见图2-3. 实验中得到 d_k 的数据并取 d_k 的上、下界为 ± 0.0017 . 因此, 界值

$$\Delta = 0.0017.$$

由此可知,

$$\Delta_{\text{SSE}} = \Delta_{\text{AAL}} = \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho} = 0.0032,$$

$$\Delta_{\text{MDR}} = \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho} = 0.0035.$$

系统跟踪误差 e_k 在一个采样周期($T_s = 5$ ms)之后收敛进入 $|e_k| \leq 1.2 \times 10^{-3}$ rad的邻域内(见图3直方图), 但呈周期性, 周期与给定参考信号 r_k 相同.

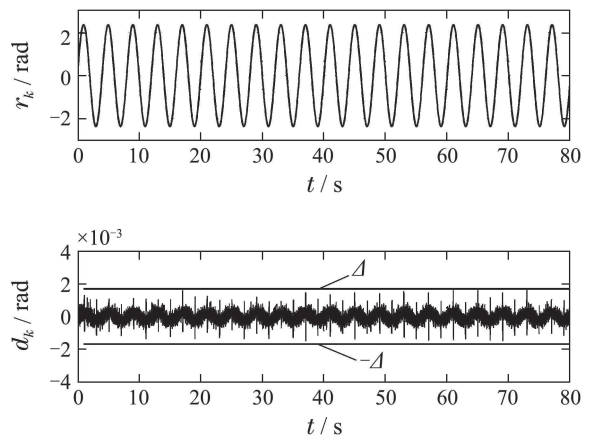


图2 采用控制器(16)时的参考信号和变量 d_k

Fig. 2 The reference signal and d_k -variable by controller (16)

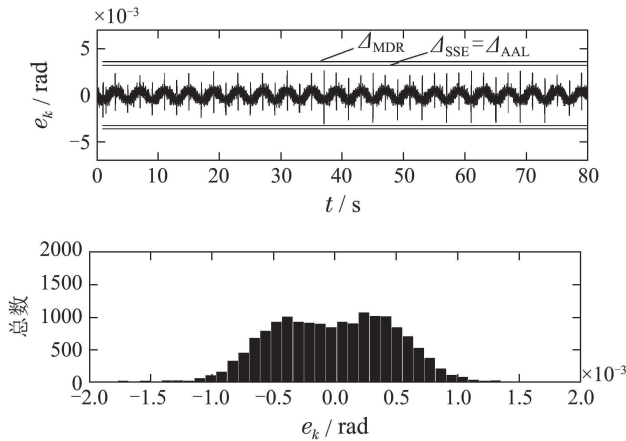


图 3 采用控制器(16)时的跟踪误差和统计直方图
Fig. 3 Tracking error and its count histogram by controller (16)

采用控制器(28), 实验结果见图4-5. 实验中得到 d_k 的数据并取 d_k 的上、下界为 ± 0.00075 . 因此, 界值

$$\Delta = 0.00075.$$

由此可知,

$$\Delta_{SSE} = \Delta_{AAL} = \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho} = 0.001111,$$

$$\Delta_{MDR} = \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho} = 0.00182.$$

系统跟踪误差 e_k 在一个参考信号周期 ($T = 4$ s) 之后收敛进入 $|e_k| \leq 8 \times 10^{-4}$ rad 的邻域内(参见图5), 且无周期特性. 实验结果表明, 所提出的重复控制器可实现对周期干扰信号的完全抑制.

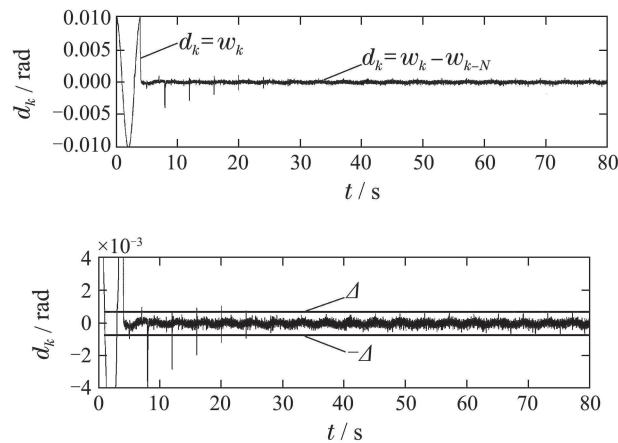


图 4 采用控制器(28)时的变量 d_k
Fig. 4 d_k -variable by controller (28)

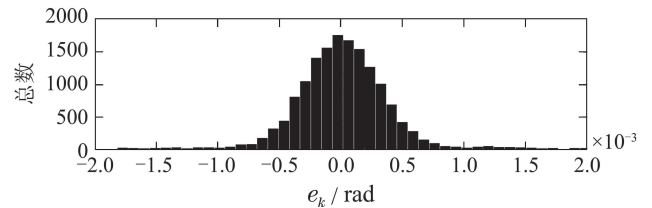
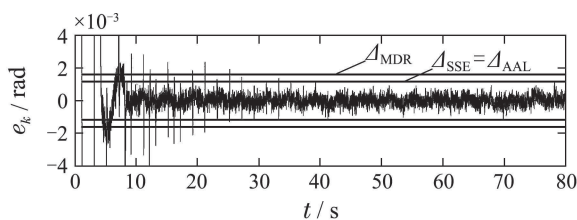


图 5 采用控制器(28)时的跟踪误差和统计直方图
Fig. 5 Tracking error and its statistical histogram by controller (28)

7 结论(Conclusions)

本文针对一类周期参考/干扰信号下的不确定离散时间系统, 提出一种基于吸引律的重复控制方法, 在吸引律中“嵌入”干扰抑制措施, 构造出理想误差动态, 并基于此设计出重复控制器. 文中推导出能够表征闭环系统收敛性能和稳态性能的单调减区域、绝对吸引层和稳态误差带边界的表达式, 并给出跟踪误差在无干扰时收敛于原点及在干扰存在时收敛进入稳态误差带内所需最多步数的表达式. 理论与实验结果表明, 所提出的重复控制方法对周期干扰信号可实现完全抑制.

参考文献(References):

- [1] 高为炳, 程勉. 变结构控制系统的品质控制 [J]. 控制与决策, 1989, 4(4): 1-6.
(GAO Weibing, CHENG Mian. Quality control of variable structure control system [J]. *Control and Decision*, 1989, 4(4): 1-6.)
- [2] GAO W B, WANG Y, HOMAIFA A. Discrete-time variable structure control systems [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1995, 42(2): 117-122.
- [3] BATOSZEWICZ A. Discrete-time quasi-sliding mode control strategies [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1998, 45(4): 633-637.
- [4] EUN Y, KIM J, KIM K, et al. Discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism [J]. *IEEE Transactions Control Systems Technology*, 1997, 7(4): 414-423.
- [5] MISAWA E A. Discrete-time sliding mode control for nonlinear systems with unmatched uncertainties and uncertain control vector [J]. *Journal Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1997, 119(3): 503-512.
- [6] TANG C Y, MISAWA E A. Discrete variable structure control for linear multivariable systems [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2000, 122(4): 783-792.
- [7] GOLO G, MILOSAVJEVIC C. Robust discrete-time chattering free sliding mode control [J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 41(1): 19-28.
- [8] 宋立忠, 李槐树, 姚琼荟. 基于趋近律方法的离散时间系统变结构控制 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 525-528.
(SONG Lizhong, LI Huaishu, Yao Qionghui. Discrete-time variable-structure control based on reaching-law approach [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 525-528.)
- [9] QU S C, XIA X H, ZHANG J F. Dynamics of discrete-time sliding-mode-control uncertain systems with a disturbance compensator [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(7): 3502-3510.

- [10] SUN M X, WU L W, XU L D. Discrete-time repetitive control with ideal error dynamics [C] // *Proceedings of IEEE the 12th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*. Guangzhou, China: IEEE, 2012: 458 – 463.
- [11] 孙明轩, 许利达, 邬玲伟. 离散时间系统重复控制的理想误差动态方法 [J]. 控制与决策, 2013, 28(12): 1771 – 1778.
(SUN Mingxuan, XU Lida, WU Lingwei. Ideal-error-dynamics approach for repetitive control of discrete-time systems [J]. *Control and Decision*, 2013, 28(12): 1771 – 1778.)
- [12] TOMIZUKA M, TSAO T, CHEW K. Anaysis and synthesis of discrete-time repetitive controllers [J]. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1989, 111(3): 353 – 358.
- [13] 吴敏, 兰永红, 余锦华. 基于二维混合模型的重复控制系统设计方法 [J]. 自动化学报, 2008, 34(9): 1208 – 1214.
(WU Min, LAN Yonghong, SHE Jinhua. A new design method for repetitive control systems based on two-dimensional hybrid model [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(9): 1208 – 1214.)
- [14] SUN M X, XIE H Y, WANG H. Switching-function dynamics designs for uncertain variable structure systems with repetitive control [J]. *International Journal of Control*, 2011, 84(7): 1196 – 1208.
- [15] 孙明轩, 王辉, 范伟云. 以幂次趋近的离散变结构重复控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(11): 1426 – 1432.
(SUN Mingxuan, WANG Hui, FAN Weiyun. Discrete-time variable-structure repetitive control with power-rate reaching [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(11): 1426 – 1432.)

作者简介:

邬玲伟 (1985–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为重复控制,

E-mail: lingweiwu@126.com;

孙明轩 (1961–), 男, 教授, 目前研究方向为学习控制, E-mail:

mxsun@zjut.edu.cn.