

## 带有未知参数和有界干扰的移动机器人轨迹跟踪控制

陈 罡<sup>1,2</sup>, 高婷婷<sup>2†</sup>, 贾庆伟<sup>3</sup>, 周奇才<sup>1</sup>, 黄江帅<sup>4</sup>, 王 薇<sup>5</sup>

(1. 同济大学 机械与能源工程学院, 上海 200092;

2. 浙江纺织服装职业技术学院 机电与轨道交通分院, 浙江 宁波 315211;

3. 宁波韦尔德斯凯勒智能科技有限公司, 浙江 宁波 315500;

4. 南洋理工大学 电子电器工程学院, 新加坡 639798; 5. 清华大学 自动化系, 北京 100084)

**摘要:** 针对模型参数未知和存在有界干扰的非完整移动机器人的轨迹跟踪控制问题, 本文提出了一种鲁棒自适应轨迹跟踪控制器方法. 非完整移动机器人的控制难点在于它的运动学系统是欠驱动的. 针对这一难点, 本文利用横截函数的思想, 引入新的辅助控制器, 使得非完整移动机器人系统不再是一个欠驱动系统, 缩减了控制器设计的难度, 进而利用非线性自适应算法和参数映射方法构造李雅普诺夫函数. 通过李雅普诺夫方法设计控制器和参数自适应器, 从而使得非完整移动机器人的跟随误差任意小, 即可以任意小的误差来跟随任意给定的参考轨迹. 仿真结果证明了方法的有效性.

**关键词:** 非完整移动机器人; 轨迹跟踪; 鲁棒自适应控制; 横截函数; 反步方法

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Trajectory tracking control for nonholonomic mobile robots with unknown parameters and bounded disturbance

CHEN Gang<sup>1,2</sup>, GAO Ting-ting<sup>2†</sup>, JIA Qing-wei<sup>3</sup>,  
ZHOU Qi-cai<sup>1</sup>, HUANG Jiang-shuai<sup>4</sup>, WANG Wei<sup>5</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. School of Mechanical & Electrical Engineering, Zhejiang Textile & Fashion College, Ningbo Zhejiang 315211, China;

3. Wild SC Intelligent Technology CO., LTD, Ningbo Zhejiang 315500, China;

4. School of Electrical & Electronic Engineering, Nanyang Technological University, 639798, Singapore;

5. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** The trajectory tracking control problem for a nonholonomic mobile robot with unknown system parameters and bounded external disturbances is investigated and a robust adaptive tracking control scheme is proposed in this paper. The main difficulty of tracking control of a nonholonomic mobile robot is that the kinematics is underactuated. To deal with this difficulty, an additional controller variable is created through variable transformation by using the transverse function method. With the additional control variable, the kinematic model of the nonholonomic mobile robot is no longer underactuated, thus, facilitating the control design for the nonholonomic mobile robot extensively. Finally, nonlinear adaptive control and parameter projection techniques are adopted to derive the tracking controller and parameter estimator through the Lyapunov function approach. It is shown with rigorous proof that with our proposed control scheme, the reference trajectory can be followed globally with an arbitrarily small tracking error. Simulation results also demonstrate the effectiveness of our proposed controller.

**Key words:** nonholonomic mobile robots; trajectory tracking; robust adaptive control; transverse function approach; backstepping technique

### 1 引言(Introduction)

与传统的工业机器人相比, 移动机器人具有更大的灵活性, 它可以替代人类在恶劣、危险条件下或者

其他不适宜人类活动的环境中作业, 因此成为近些年的研究热点<sup>[1-4]</sup>. 而轮式移动机器人则是研究最多的移动机器人类型, 在研究其运动控制问题时, 一般假

收稿日期: 2014-04-28; 录用日期: 2014-12-25.

†通信作者. E-mail: gaot0002@e.ntu.edu.sg; Tel.: +86 574-86329655.

国家自然科学基金项目(61203068), 宁波市自然科学基金项目(2014A610087), 浙江纺织服装学院基金项目(2014-1A-001)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61203068), Ningbo Natural Science Foundation (2014A610087) and Zhejiang Textile & Fashion College Foundation (2014-1A-001).

设机器人的车轮是不存在侧滑的,这就使得移动机器人系统必须要满足一定的运动学约束,从而成为一个十分复杂的多输入多输出的非完整性系统,并且具有时变、强耦合的动力学特性和不确定性.对于非完整系统来说,因为它不满足Brockett必要条件<sup>[1]</sup>,经典控制系统理论中许多成熟的结果也无法直接应用于非完整系统的镇定控制,必须寻找新的方法和工具来解决镇定问题,才能满足系统精度追踪的需求.

对于非完整移动机器人来说,由于非完整性约束条件的存在,镇定问题和轨迹跟踪问题一般是分开考虑的.对于轨迹跟踪问题,一些学者提出了一系列的控制器设计方法,这些方法主要都是以反步法为基础的.在文献[6-7]中,作者根据反步法设计出一种移动机器人轨迹跟踪控制器.在文献[8-9]中,作者提出了一种在输入转矩受限的约束下移动机器人轨迹跟踪问题的控制器设计方法.但是以上几个文献都没有考虑移动机器人系统模型中存在未知参数的问题.在文献[10-12]中,针对含有未知参数的移动机器人轨迹跟踪控制问题,作者提出了一种自适应控制器设计方法.在文献[13]中,把移动机器人的线速度、方向角和角速度假设为状态,将系统建模成线性系统,进而利用自适应反步法来处理不确定移动机器人的轨迹跟踪问题.在文献[14]中,针对含有控制输入转矩受限和未知参数的移动机器人轨迹跟踪问题,作者提出了一种鲁棒自适应控制器设计方法.除此之外,滑模控制的方法<sup>[15]</sup>和视觉伺服方法<sup>[16]</sup>也被应用到移动机器人的轨迹跟踪问题中.

但是在上述处理带有未知参数和(或)外界干扰的非完整移动机器人文献中<sup>[7-12,14-16]</sup>,参考轨迹的线性速度都必须满足持续激励条件(persistent excitation, PE)或其他更严格的条件,这就意味着不是所有的轨迹都能够实现跟踪或者跟随,而在实际的应用中PE条件一般很难达到.这就极大地限制了这些方法的应用范畴,因此以上文献都存在应用范围受限的问题.文献[17]虽然也提出了统一控制器设计的想法,但是却并没有考虑一般的移动机器人模型问题.

而本文针对带有未知参数和外界干扰的非完整移动机器人模型,提出一种鲁棒自适应轨迹跟踪控制器设计方法,并且这种方法能够实现任何参考轨迹的跟踪.首先利用横截函数方法<sup>[18-19]</sup>,通过一系列的函数变量变换引用一个虚拟的控制输入,使得整个移动机器人不再是一个欠驱动系统,然后通过反步法设计鲁棒自适应控制器使机器人按照指定的轨迹完成轨迹跟踪,并且最终的跟踪误差能够任意小.本文的主要创新点在于该方法能够解决对任意指定参考轨迹的跟踪以及镇定问题.同时该控制方法可以有效地处理外界干扰问题,并保证最终的跟踪误差能够达到任意小.

## 2 问题描述(Problem formulation)

本文考虑机构示意如图1所示的双轮驱动移动机器人,其质心和几何中心不重合.假设绝对坐标系 $O-XY$ 固定在平面内,一个前轮为随动轮,只有支撑车体的作用,两个后轮为独立驱动轮,各采用一台直流伺服电机独立驱动,通过调节各自的输入电压以实现两轮的速度差. $P_0-x_1y_1$ 为移动机器人的局部参考坐标系,并以移动机器人的中心点 $P_0$ 为原点.质心 $P_c$ 在 $x_1$ 轴上,距离原点 $P_0$ 距离为 $d$ .中心 $P_0$ 在全局参考坐标系下的坐标为 $(\bar{x}, \bar{y})$ ,偏航角为 $\bar{\phi}$ . $2b$ 是移动机器人的宽度, $r$ 是车轮半径.本文假设移动机器人只做纯滚动,不存在侧滑,则双轮移动机器人可由下列运动学和动力学模型描述<sup>[7]</sup>:

$$\dot{\eta} = J(\eta)\omega, \quad (1)$$

$$M\dot{\omega} + C(\dot{\eta})\omega + D\omega = \tau + \tau_d, \quad (2)$$

其中: $\eta = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\phi})^T$ , $\omega = (\omega_1, \omega_2)^T$ 分别为两个轮子的角速度, $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T$ 表示轮子的控制力矩, $M$ 是对称正定的惯性矩阵, $C(\dot{\eta})$ 为系统哥氏力和离心力矩阵, $D$ 为阻尼系数矩阵.矩阵 $J(\eta)$ , $M$ , $C(\dot{\eta})$ 和 $D$ 具有如下形式<sup>[7]</sup>:

$$J(\eta) = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \cos \bar{\phi} & \cos \bar{\phi} \\ \sin \bar{\phi} & \sin \bar{\phi} \\ b^{-1} & -b^{-1} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{11} \end{bmatrix},$$

$$C(\dot{\eta}) = c \begin{bmatrix} 0 & \dot{\bar{\phi}} \\ -\dot{\bar{\phi}} & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix},$$

$$m_{11} = 0.25b^{-2}r^2(mb^2 + I) + I_w,$$

$$m_{12} = 0.25b^{-2}r^2(mb^2 - I), \quad m = m_c + 2m_w,$$

$$I = m_c d^2 + 2m_w b^2 + I_c + 2I_m, \quad c = 0.5b^{-1}r^2 m_c d.$$

其中: $m_c$ 和 $m_w$ 分别是移动机器人主体质量和带有电机的轮子质量. $I_c$ , $I_w$ 和 $I_m$ 分别指移动机器人通过质心 $P_c$ 的惯性力矩,车轮关于车轴的惯性力矩和车轮关于半径的惯性力矩. $d_{ii}$ , $i = 1, 2$ 是阻尼系数, $\tau_d$ 是有界外部干扰,即

$$\|\tau_d\| \leq \tau_{d \max}, \quad (3)$$

其中 $\tau_{d \max}$ 是一个未知的正常数.

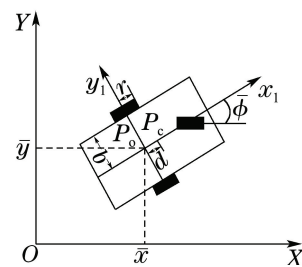


图1 非完整移动机器人示意图

Fig. 1 Diagram of a nonholonomic mobile robot

**假设 1** 参数  $r$  和  $b$  在已知的紧集内, 即存在正定常数  $\bar{r}, \underline{r}, \bar{b}$  和  $\underline{b}$ , 使得  $\underline{r} < r < \bar{r}$  和  $\underline{b} < b < \bar{b}$  成立.

**注 1** 因为该移动机器人在其运动平面内有 3 个运动自由度但只有 2 个独立控制量, 所以该移动机器人系统为欠驱动系统. 本文利用横截函数的方法, 引入辅助控制量, 使得系统不再是欠驱动的.

基于模型(1)–(2)和假设 1, 本文的控制目标可以描述为:

控制目标: 设计控制输入变量  $\tau$ , 使得带有未知参数和有界干扰的非完整移动机器人(1)–(2)可以跟踪预先设定的参考轨迹  $\Omega = (x_d, y_d, \phi_d)$ .

### 3 自适应控制器设计(Adaptive controller design)

在这一部分, 第 1 步, 使用横截函数的方法来进行坐标变换, 从而产生一个新的附加控制器  $\dot{\xi}$ , 使得移动机器人运动学模型不再是欠驱动系统; 第 2 步, 设计自适应控制器和参数估计器来跟踪给定的参考路径.

#### 3.1 坐标变换(Coordinates transformation)

引入新的状态变量  $(x, y, \phi)$  和辅助变量  $\xi$ , 使其满足<sup>[20]</sup>:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + R(\phi) \begin{bmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\phi = \bar{\phi} - f_3(\xi), \quad (5)$$

其中:

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$f_l(\xi) (l = 1, 2, 3)$  是关于  $\xi$  的函数

$$\begin{cases} f_1(\xi) = \varepsilon_1 \sin \xi \left( \frac{\sin f_3}{f_3} \right), \\ f_2 \xi = \varepsilon_1 \sin \xi \left( \frac{1 - \cos f_3}{f_3} \right), \\ f_3 \xi = \varepsilon_2 \cos \xi, \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  是正常数,  $\varepsilon_2$  满足  $0 < \varepsilon_2 < \pi/2$ ,

$$|f_1| \leq \varepsilon_1, |f_2| \leq \varepsilon_1, |f_3| \leq \varepsilon_2. \quad (8)$$

对  $x, y$  和  $\phi$  求导可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} ru_1 \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} + \frac{\partial R(\phi)}{\partial \phi} \begin{bmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{bmatrix} \times (rb^{-1}u_2 - \frac{\partial f_3(\xi)}{\partial \xi} \dot{\xi}), \quad (9)$$

$$\dot{\phi} = rb^{-1}u_2 - \frac{\partial f_3(\xi)}{\partial \xi} \dot{\xi}, \quad (10)$$

其中:

$$u_1 = 0.5(\omega_1 + \omega_2), u_2 = 0.5(\omega_1 - \omega_2),$$

矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} \left( \begin{smallmatrix} \cos \bar{\phi} \\ \sin \bar{\phi} \end{smallmatrix} \right) R(\phi) \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (11)$$

是可逆的<sup>[18]</sup>. 与  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\phi})$  不同, 变换后的坐标  $(x, y, \phi)$  是可以通过调节辅助控制变量  $u_1, u_2$  和  $\dot{\xi}$  来控制的.

#### 3.2 控制器设计(Controller design)

用式(9)–(10)来代替运动学模型式(1), 则式(2)–(9)–(10)是系统的严格反馈形式. 因此, 本文可以利用反步法来设计控制输入  $\tau$  使得系统可以跟踪任意给定的参考轨迹. 本节主要分为两步来设计统一控制器: 第 1 步, 通过设计虚拟控制器  $u_{1d}, u_{2d}$  和辅助变量  $\dot{\xi}$ , 控制移动机器人的运动轨迹, 使其可以跟踪任意给定的参考轨迹  $(x_d, y_d, \phi_d)$ . 第 2 步, 设计自适应控制率  $\tau$ , 使得式(9)–(10)中的  $u_1$  和  $u_2$  分别趋于虚拟控制器  $u_{1d}$  和  $u_{2d}$ .

**步骤 1** 首先定义跟踪误差为

$$x_e = x - x_d, y_e = y - y_d, \phi_e = \phi - \phi_d, \quad (12)$$

构造李雅普诺夫函数

$$V_1 = \frac{1}{2}q_e^T q_e + \frac{1}{2}\phi_e^2, \quad (13)$$

其中  $q_e = [x_e \ y_e]^T$ , 则对  $V_1$  求导可得

$$\dot{V}_1 = q_e^T \left( Q \begin{bmatrix} ru_1 \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} + \frac{\partial R(\phi)}{\partial \phi} \begin{bmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{bmatrix} \times \dot{\phi} - \dot{q}_d \right) + \phi_e (rb^{-1}u_2 - f_3' \dot{\xi} - \dot{\phi}_d),$$

其中:  $q_d = [x_d \ y_d]^T, \dot{q}_d = [x_d'(t) \ y_d'(t)]^T$ .

定义虚拟控制误差变量

$$u_{1e} = u_1 - u_{1d}, u_{2e} = u_2 - u_{2d}, \quad (14)$$

其中:  $u_{1d}$  和  $u_{2d}$  分别是关于  $u_1$  和  $u_2$  的虚拟控制器, 可以选择为

$$\begin{bmatrix} u_{1d} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q^{-1} (-k_1 q_e - R'(\phi) \times \begin{bmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{bmatrix} \times (-k_2 \phi_e + \dot{\phi}_d) + \dot{q}_d), \quad (15)$$

$$u_{2d} = \hat{\theta}_2^{-1} (-k_2 \phi_e + f_3' \dot{\xi} + \dot{\phi}_d), \quad (16)$$

其中:  $k_1$  和  $k_2$  是正常数,  $\hat{\theta}_i = \theta_i - \tilde{\theta}_i (i = 1, 2)$ , 分别为  $r$  和  $rb^{-1}$  的估计量, 即  $\theta_1 := r$  和  $\theta_2 := rb^{-1}$ , 进一步可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} = -k_1 \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix} + \frac{\partial R(\phi)}{\partial \phi} \begin{bmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{bmatrix} \times (\tilde{\theta}_2 u_2 + \hat{\theta}_2 u_{2e}) + Q \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 u_1 + \hat{\theta}_1 u_{1e} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\dot{\phi}_e = -k_2 \phi_e + \tilde{\theta}_2 u_2 + \hat{\theta}_2 u_{2e}.$$

参数估计设计为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \text{Proj}(\hat{\theta}_1, \gamma_{\theta_1} \pi_1 u_1), \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \text{Proj}(\hat{\theta}_2, \gamma_{\theta_2} \pi_2 u_2), \end{cases} \quad (18)$$

其中:  $\gamma_{\theta_1}, \gamma_{\theta_2}$  是常数,

$$\begin{aligned} \pi_1 &= x_e \cos \bar{\phi} + y_e \sin \bar{\phi}, \\ \pi_2 &= [x_e \ y_e] \frac{\partial R(\phi)}{\partial \phi} \begin{bmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{bmatrix} + \phi_e, \end{aligned} \quad (19)$$

$\text{Proj}(\cdot, \cdot)$  表示Lipschitz连续映射符号, 细节可见参考文献[21].

**引理 1**<sup>[21]</sup> 如果  $|\hat{b}(t_0)| \leq b_M$ , 则映射具有如下性质:

- 1)  $|\hat{b}(t)| \leq b_M + \epsilon, \forall 0 \leq t_0 \leq t < \infty$ .
- 2)  $\text{Proj}(a, \hat{b})$  是Lipschitz连续的.
- 3)  $|\text{Proj}(a, \hat{b})| \leq |a|$ .
- 4)  $\tilde{b} \text{Proj}(a, \hat{b}) \geq \tilde{b}a$ , 其中  $\tilde{b} = b - \hat{b}$ .

构造李雅普诺夫函数

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2\gamma_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2^2, \quad (20)$$

结合引理1的性质4), 可得

$$\dot{V}_2 \leq -k_1 q_e^T q_e - k_2 \phi_e^2 + \pi_1 \hat{\theta}_1 u_{1e} + \pi_2 \hat{\theta}_2 u_{2e}.$$

**步骤 2** 定义新的虚拟控制器误差变量  $z = [z_1 \ z_2]^T$ ,  $z_1 = \omega_1 - \omega_{1d}$ ,  $z_2 = \omega_2 - \omega_{2d}$ , 则有

$$z = \omega - \begin{bmatrix} \omega_{1d} \\ \omega_{2d} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

对式(21)两边求导并乘以矩阵  $M$ , 考虑系统运动学方程(2), 可得

$$M\dot{z} = -Dz + \chi^T \vartheta + \tau + \tau_d, \quad (22)$$

其中  $\chi$  和  $\vartheta$  如式(23)所示:

$$\begin{cases} \vartheta = [crb^{-1} \ d_{11} \ d_{22} \ m_{11} \ m_{12} \ m_{11}r \ m_{12}r \\ \ m_{11}rb^{-1} \ m_{12}rb^{-1}]^T, \\ \chi = \begin{bmatrix} -\omega_2 u_2 & -\omega_{1d} & 0 & -\Delta_{11} & -\Delta_{12} \\ \omega_1 u_2 & 0 & -\omega_{2d} & -\Delta_{12} & -\Delta_{11} \\ -\Delta_{21} & -\Delta_{22} & -\Delta_{31} & -\Delta_{32} \\ -\Delta_{22} & -\Delta_{21} & -\Delta_{32} & -\Delta_{31} \end{bmatrix}^T, \\ \Delta_{1k} = \frac{\partial \omega_{kd}}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{\partial \omega_{kd}}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2 + \frac{\partial \omega_{kd}}{\partial \dot{x}_d} \ddot{x}_d + \\ \frac{\partial \omega_{kd}}{\partial \dot{y}_d} \ddot{y}_d + \frac{\partial \omega_{kd}}{\partial \dot{\phi}_d} \ddot{\phi}_d, \\ \Delta_{2k} = \frac{\partial \omega_{kd}}{\partial \bar{x}} (\cos \bar{\phi} \cdot u_1) + \frac{\partial \omega_{kd}}{\partial \bar{y}} (\sin \bar{\phi} \cdot u_1), \\ \Delta_{3k} = \frac{\partial \omega_{kd}}{\partial \phi} u_2, \ k = 1, 2. \end{cases} \quad (23)$$

假设未知参数向量  $\vartheta$  的估计值为  $\hat{\vartheta}$ , 则局部控制力矩和自适应控制率可设计如下:

$$\tau = -Kz - \chi^T \hat{\vartheta} - 0.5\Xi - \text{sgn } z^T \cdot \hat{\tau}_{d \max}, \quad (24)$$

$$\dot{\hat{\vartheta}} = \Gamma \chi z, \quad (25)$$

其中:  $K$  是给定正定矩阵,  $\hat{\tau}_{d \max}$  是  $\tau_d$  的上界估计值.

$$\begin{cases} \Xi = (\Xi_1, \Xi_2)^T, \\ \Xi_1 = \pi_1 \hat{\theta}_1 + \pi_2 \hat{\theta}_2, \\ \Xi_2 = \pi_1 \hat{\theta}_1 - \pi_2 \hat{\theta}_2. \end{cases} \quad (26)$$

$$\text{sgn } z^T \cdot \hat{\tau}_{d \max} = (\text{sgn } z_1 \cdot \hat{\tau}_{1d \max}, \text{sgn } z_2 \cdot \hat{\tau}_{2d \max})^T.$$

定义  $\tilde{\tau}_{id \max} = \tau_{id \max} - \hat{\tau}_{id \max}$ ,  $\hat{\tau}_{id \max}$  的更新率选择为

$$\dot{\hat{\tau}}_{id \max} = |z_i|, \ i = 1, 2, \quad (27)$$

则整个系统的李雅普诺夫函数可以构造为

$$\begin{aligned} V_3 &= \\ V_2 &+ \frac{1}{2} (z^T M z + \tilde{\vartheta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\vartheta} + \tilde{\tau}_{1d \max}^2 + \tilde{\tau}_{2d \max}^2), \end{aligned}$$

其中:  $\Gamma$  是对称正定矩阵,  $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \hat{\vartheta}$ . 进一步可得

$$\dot{V}_3(t) \leq -k_1 q_e^T q_e - k_2 \phi_e^2 - z^T (K + D) z. \quad (28)$$

这部分的主要结果可写为如下定理:

**定理 1** 考虑非完整移动机器人系统(1)-(2), 则自适应控制器(24)、参数更新率(25)-(27)可以使得闭环系统的所有信号都是有界的, 且可以以任意小的跟踪误差跟踪任意参考轨迹  $x_d(t)$ ,  $y_d(t)$  和  $\phi_d(t)$ , 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) - x_d(t) \leq \sqrt{2}\epsilon_1, \quad (29)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{y}(t) - y_d(t) \leq \sqrt{2}\epsilon_1, \quad (30)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\phi}(t) - \phi_d(t) \leq \epsilon_2. \quad (31)$$

**证** 由映射原理,  $\tilde{\theta}_i (i = 1, 2)$  是有界的. 因此, 从式(28)可知,  $V_3$  中的所有信号都是有界的, 则  $x_e, y_e$  和  $\phi_e$  都是有界的. 从式(15)-(16), 可得出  $u_{1d}, u_{2d}$  和  $\xi$  都是有界的, 因此  $u_1$  和  $u_2$  是有界的, 从式(24)可得,  $\tau$  也是有界的. 从式(28)并根据Barbalat引理, 很容易能够证明  $q_e, \phi_e$  和  $z$  都是渐进稳定的. 证毕.

从式(4)-(5)(7), 可得

$$\begin{cases} \|(x - \bar{x}, y - \bar{y})\| \leq \sqrt{2}\epsilon_1, \\ |\phi - \bar{\phi}| \leq \epsilon_2, \end{cases} \quad (32)$$

则

$$\begin{cases} |\bar{x} - x_d| \leq |\bar{x} - x| + |x - x_d|, \\ |\bar{y} - y_d| \leq |\bar{y} - y| + |y - y_d|, \\ |\bar{\phi} - \phi_d| \leq |\bar{\phi} - \phi| + |\phi - \phi_d|. \end{cases} \quad (33)$$

由于  $x - x_d, y - y_d$  和  $\phi - \phi_d$  渐进收敛于零, 则式(29)-(31)成立. 合理地调节  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ , 系统对任意参考轨迹的跟踪误差任意小.

### 4 仿真结果(Simulation results)

本节利用MATLAB仿真软件验证所提出的算法的有效性. 主要给出两种参考轨迹, 即满足PE条件的轨迹和不满足PE条件的轨迹.

假设移动机器人的数学模型参数如下:  $b = 0.75$ ,  $d = 0.3$ ,  $r = 0.15$ ,  $m_c = 30$ ,  $m_w = 1$ ,  $I_c = 15.625$ ,  $I_w = 0.005$ ,  $I_m = 0.0025$ ,  $d_{11} = d_{22} = 5$ . 未知参数的初始估计值假设为初值的75%, 外部干扰的界限设为10. 设计参数假设如下:  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 3$ ,  $K = 8I$ ,  $\varepsilon_1 = 0.05$ ,  $\varepsilon_2 = 0.02$ .

#### 1) 满足PE条件的轨迹.

假设参考轨迹为  $q_d = [t, 10 \sin(0.1t)]^T$ , 初始条件为  $\{\bar{x}(0), \bar{y}(0), \bar{\phi}(0)\} = \{6, -2, 0\}$ , 则移动机器人的参数估计变量如图2所示.

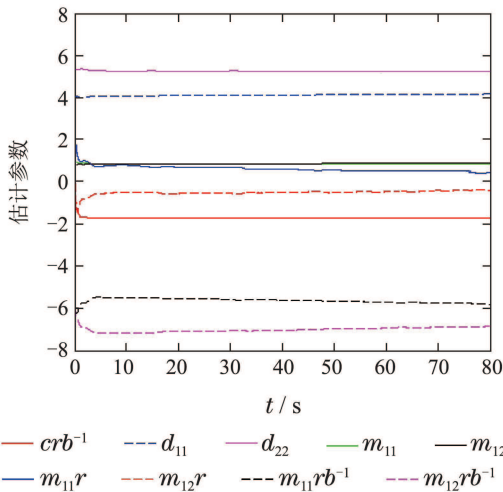


图 2 参数估计变量  
Fig. 2 Parameters estimation

移动机器人的运动轨迹和跟踪误差分别如图3-4所示, 可以看到移动机器人对参考轨迹的跟踪误差趋于零, 速度变化曲线如图5所示. 从仿真例子中可见, 尽管模型中存在着未知参数和有界干扰, 但利用自适应控制器可以跟踪给定的参考轨迹.

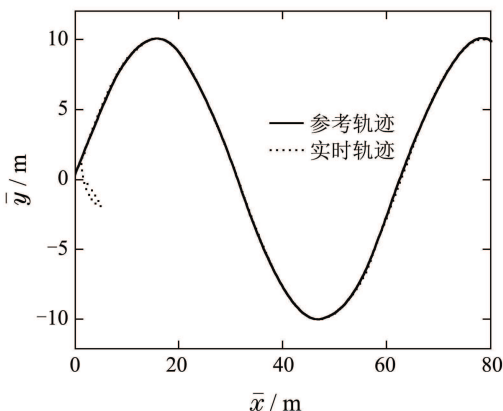


图 3 移动机器人的运动轨迹  
Fig. 3 The position of the mobile robot

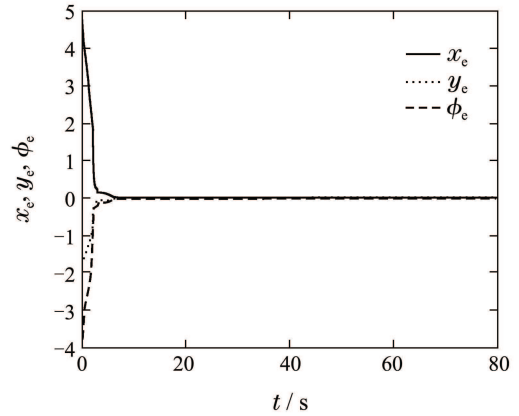


图 4 移动机器人的跟踪误差  $x_e, y_e$  和  $\phi_e$   
Fig. 4 The tracking errors  $x_e, y_e$  and  $\phi_e$

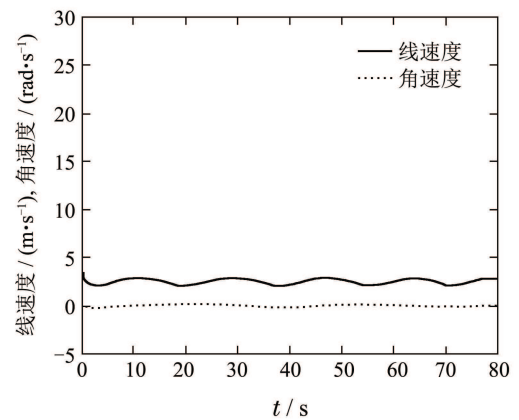


图 5 移动机器人的速度变化曲线  
Fig. 5 The velocity of the mobile robot

#### 2) 不满足PE条件的轨迹.

假设参考轨迹为  $\dot{x}_d = 0.006(t - 20)^2 \cos \phi_d$ ,  $\dot{y}_d = 0.006(t - 20)^2 \sin \phi_d$ ,  $\dot{\phi}_d = 0.1e^{-0.1t}$ , 初始条件为  $\{\bar{x}(0), \bar{y}(0), \bar{\phi}(0)\} = \{10, 10, -1\}$ . 很明显这个参考轨迹不满足PE条件, 因此文献[7-12, 14-16]不能处理此类参考轨迹的跟踪问题, 而从图6-7可以看出利用本文提出的移动机器人的轨迹跟踪方法, 可以处理不满足PE条件的轨迹跟踪问题.

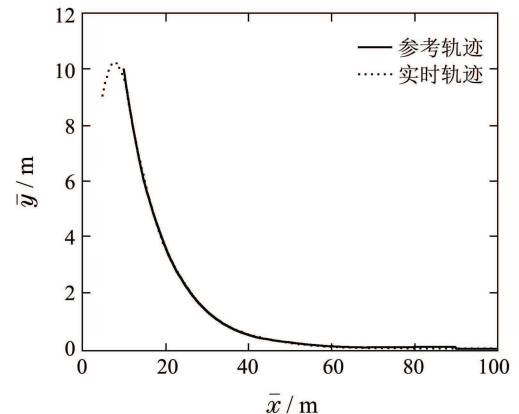


图 6 移动机器人的运动轨迹  
Fig. 6 The position of the mobile robot

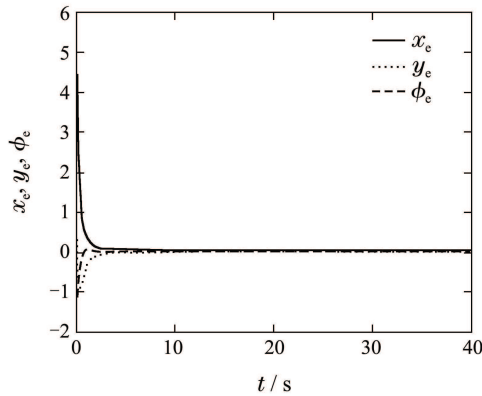


图7 移动机器人的跟踪误差 $x_e$ 、 $y_e$ 和 $\phi_e$

Fig. 7 The tracking errors  $x_e$ ,  $y_e$  and  $\phi_e$

## 5 结论(Conclusions)

本文针对带有未知参数和有界外部干扰的非完整移动机器人研究其轨迹跟踪问题. 首先利用横截函数的方法, 使得非完整移动机器人系统不再是欠驱动的, 然后利用自适应反步函数方法, 设计全局稳定自适应控制器可以追踪任意给定的参考轨迹, 最后的仿真结果证明方法的有效性. 这种横截函数的方法也可以使用到其他欠饱和机械系统, 例如欠饱和和船只系统、水下船只和VTOL飞机等.

## 参考文献(References):

- [1] 戴博, 肖晓明, 蔡自兴. 移动机器人路径规划技术的研究现状与展望 [J]. 控制工程, 2005, 12(3): 198 – 202.  
(DAI Bo, XIAO Xiaoming, CAI Zixing. Current status and future development of mobile robot path planning technology [J]. *Control Engineering of China*, 2005, 12(3): 198 – 202.)
- [2] 谭民, 王硕. 机器人技术研究进展 [J]. 自动化学报, 2013, 39(7): 963 – 972.  
(TAN Min, WANG Shuo. Research progress on robotics [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(7): 963 – 972.)
- [3] 朱大奇, 颜明重. 移动机器人路径规划技术综述 [J]. 控制与决策, 2010, 25(7): 961 – 967.  
(ZHU Daqi, YAN Mingzhong. Survey on technology of mobile robot path planning [J]. *Control and Decision*, 2010, 25(7): 961 – 967.)
- [4] 郑泽伟, 霍伟, 诸兵. 非完整移动机器人全局路径跟踪控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(6): 741 – 746.  
(ZHENG Zewei, HUO Wei, ZHU Bing. Global path-following control for nonholonomic mobile robots [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(6): 741 – 746.)
- [5] BROCKETT R W. Asymptotic stability and feedback stabilization [M] // *Differential Geometric Control Theory*. Boston, MA: Birkhauser, 1983: 181 – 191.
- [6] FIERRO R, LEWIS F L. Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1997, 14(3): 149 – 163.
- [7] JIANG Z, NIJMEIJER H. Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping [J]. *Automatica*, 1997, 33(7): 1393 – 1399.
- [8] LEE T C, SONG K T, LEE C H, et al. Tracking control of unicycle-modeled mobile robots using a saturation feedback controller [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001, 9(1): 305 – 318.
- [9] JIANG Z, LEFEBER E, NIJMEIJER H. Saturated stabilization and tracking of a nonholonomic mobile robot [J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 42(1): 327 – 332.
- [10] FUKAO T, NAKAGAWA H, ADACHI N. Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2000, 16(1): 609 – 615.
- [11] DO K D, JIANG Z P, PAN J. Simultaneous tracking and stabilization of mobile robots: an adaptive approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1147 – 1152.
- [12] DO K D, JIANG Z P, PAN J. A global output-feedback controller for simultaneous tracking and stabilization of unicycle-type mobile robots [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2004, 20(3): 589 – 594.
- [13] 孙棣华, 崔明月, 李永福. 具有参数不确定性的轮式移动机器人自适应Backstepping控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(9): 1198 – 1204.  
(SUN Dihua, CUI Mingyue, LI Yongfu. Adaptive backstepping control of wheeled mobile robots with parameter uncertainties [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(9): 1198 – 1204.)
- [14] HUANG J S, WEN C Y, WANG W, et al. Adaptive stabilization and tracking control of a nonholonomic mobile robot with input saturation and disturbance [J]. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(3): 234 – 241.
- [15] ASIF M, KHAN M J, CAI N. Adaptive sliding mode dynamic controller with integrator in the loop for nonholonomic wheeled mobile robot trajectory tracking [J]. *International Journal of Control*, 2014, 87(5): 964 – 975.
- [16] YANG F, WANG C L, JING G. Adaptive tracking control for dynamic nonholonomic mobile robots with uncalibrated visual parameters [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2013, 27(8): 688 – 700.
- [17] 庞海龙, 马保离. 不确定轮式移动机器人的任意轨迹跟踪 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(3): 285 – 292.  
(PANG Hailong, MA Baoli. Adaptive unified controller of arbitrary trajectory tracking for wheeled mobile robots with unknown parameters [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(3): 285 – 292.)
- [18] MORIN P, SAMSON C. Practical stabilization of driftless systems on lie group: the traverse function approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(9): 1496 – 1508.
- [19] 祝晓才, 董国华, 蔡自兴, 等. 曲面运动轮式移动机器人实际镇定控制器 [J]. 电机与控制学报, 2007, 11(2): 165 – 169.  
(ZHU Xiaocai, DONG Guohua, CAI Zixing, et al. Practical stabilization controller for wheeled mobile robots moving on uneven surface [J]. *Electric Machines and Control*, 2007, 11(2): 165 – 169.)
- [20] DO K D. Practical control of underactuated ships [J]. *Ocean Engineering*, 2010, 37(1): 1111 – 1119.
- [21] KRSTIĆ M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIĆ P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design* [M]. New York: Wiley, 1995: 87 – 154.

## 作者简介:

陈 罡 (1974–), 男, 博士, 教授, 目前主要从事机器人控制技术相关研究, E-mail: bastarcg@163.com;

高婷婷 (1982–), 女, 博士, 副教授, 目前主要从事移动机器人运动控制相关研究, E-mail: gaot0002@e.ntu.edu.sg;

贾庆伟 (1966–), 男, 博士, 目前主要从事机器人运动控制相关研究, E-mail: qingwei.jia@wildscgroup.com;

周奇才 (1962–), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前主要从事复杂系统及装备监测与控制相关研究, E-mail: qczhou@tongji.edu.cn;

黄江帅 (1985–), 男, 博士研究生, 目前主要从事自适应控制相关研究, E-mail: jhuang2@e.ntu.edu.sg;

王 薇 (1983–), 女, 博士, 讲师, 目前主要从事自适应控制相关研究, E-mail: wwang28@tsinghua.edu.cn.