

块序列布尔网络的拓扑结构

宋金利, 李志强[†]

(河南财经政法大学 数学与信息科学学院, 河南 郑州 450046)

摘要: 利用矩阵的半张量积, 通过建立逻辑变量与向量的对应, 块序列布尔网络被表示为离散时间系统, 将对序列布尔网络的研究转化为对结构矩阵的研究. 块序列布尔网络的结构矩阵是一个逻辑矩阵, 利用逻辑矩阵的 1 特征值与 1 特征向量的特殊性质, 从矩阵特征值和特征向量的角度研究了块序列布尔网络的拓扑结构, 显式表示出了不同长度极限环的个数, 并指出网络的极限环总数等于 $(2^n - \text{rank}(S))$.

关键词: 半张量积; 布尔网络; 特征向量; 逻辑矩阵

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Topological structure of block Boolean networks

SONG Jin-li, LI Zhi-qiang[†]

(School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou Henan 450046, China)

Abstract: Topological properties of block sequential Boolean networks are discussed by means of matrix theory. Using semi-tensor product, we express logical variables in vector forms and thus the block sequential Boolean network is expressed in a discrete time system. Based on the 1 eigenvalue and the 1 eigenvectors of the structure matrix, the numbers of limit cycles with different lengths are expressed in explicit formulas. Especially, the total number of all cycles is obtained as $(2^n - r)$, where r is the rank of the structure matrix.

Key words: semi-tensor product; Boolean network; eigenvector; logical matrix

1 引言(Introduction)

随着系统生物学的发展, 基因调控网络成为目前的研究热点之一. 对基因调控网络的研究模型很多. 文献[1-2]用微分方程作为模型, 文献[2]利用自治微分方程作为模型研究了基因调节. 另一方面, Kauffman在文献[3-4]中指出采用布尔网络模型研究基因调控网络是比较合理的.

文献[5]给出了 $N-K$ 布尔网络的描述. 一个 $N-K$ 布尔网络含有 N 个结点 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, 结点的状态 $x_i \in \mathcal{D} = \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, N$. 结点 x_i 在 $t + 1$ 时刻的状态受 K 个结点 $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_K}\}$ 在时刻 t 的状态影响, 即

$$x_i(t + 1) = f_i(x_{j_1}(t), x_{j_2}(t), \dots, x_{j_K}(t)), \quad (1)$$

其中 f_i 是一个含有 K 个自变量的逻辑函数. 在时刻 t , 首先按照一定的概率分布从 2^{2^K} 个不同的逻辑函数中选取 f_i , 然后从 x_1, \dots, x_N 中随机选取 K 个结点 x_{i_1}, \dots, x_{i_K} , 作为 K 元逻辑函数 f_i 的自变量. $N-K$ 布尔

网络本质上是随机布尔网络. 关于随机布尔网络的相关内容可参看文献[5-7]. 一般在具体应用模型中, 与各个结点相关的结点个数 K_i 并不相等, 为了研究这类系统的统计性质, 通常取 $\langle K \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_i$. 有关 $N-K$ 布尔网络的研究参看文献[5, 8-11].

对于确定性的布尔网络, 它的结构通常可以用一个有向图来表示, 这个有向图包含 N 个结点 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ 和一组有向边 $E \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. 如果 $(x_i, x_j) \in E$, 则有一条从结点 x_i 指向结点 x_j 的边, 也就是结点 x_j 的状态受结点 x_i 的状态影响. 这一网络图等价于文献[12]提到的关联矩阵, 关联矩阵只是反映了结点之间的有无相互作用. 布尔网络的动态方程反映了各个结点之间相互作用的具体方式, 可表示为

$$\begin{cases} x_1(t + 1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_n(t + 1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期: 2014-06-22; 录用日期: 2014-11-04.

[†]通信作者. E-mail: lizhiqiang@amss.ac.cn.

国家自然科学基金项目(61203050, 61374079, 11202068), 河南省高等学校青年骨干教师计划项目(2013GGJS-099), 河南省基础与前沿技术研究计划项目(132300410011), 河南省高等学校哲学社会科学研究“三重”重大项目(专项)(2014-SZZD-30)资助.

Supported by National Natural Science Foundation (NNSF) of China (61203050, 61374079, 11202068), Young Core Instructor Foundation from the Education Commission of Henan Province (2013GGJS-099), Basic and Advanced Technology Research Foundation of Henan Province (132300410011) and The Three Major Programs for Philosophy Social Sciences Research in Henan Province University(2014-SZZD-30).

其中: $x_i(t) \in \mathcal{D}$ 是布尔状态变量, $f_i (i = 1, \dots, n)$ 是给定的布尔函数.

在确定性布尔网络的文献中, 主要研究内容有以下两个方面: 一是研究布尔网络的不动点、极限环、暂态期等拓扑性质; 二是已知网络的不动点、极限环, 反过来重构布尔网络. 在系统生物学中, 不动点和极限环的物理意义有两种解释: 一种解释是将不动点、极限环理解为细胞基因的类型^[13], 另一种是将不动点、极限环理解为细胞在生长、分裂、死亡等各个时期状态的循环^[14].

对于布尔网络(2), 状态变量 $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ 的取值空间中只有 2^n 个元素, 因此从任意一个初始状态出发, 系统(2)的轨线最终会收敛到不动点或者极限环. 文献[15]通过对各个结点动态方程的迭代来寻找网络的不动点或者极限环. 文献[16]改进了这种迭代方法, 但是改进后的方法的缺点在于它只能适用于具体的布尔网络, 并且可能会漏掉一些不动点或极限环^[17]. 文献[18]指出寻找布尔网络的不动点和极限环是多项式复杂程度的非确定性(non-deterministic polynomial, NP)完全问题.

布尔网络是研究基因调控网络的一个重要模型, 近年来, 如何从实验数据来辨识出布尔网络成为研究热点^[19-22]. 从布尔网络的状态方程出发, 笔者可以找到它的所有不动点和极限环. 但是已知网络的不动点和极限环, 并不能唯一确定所对应的布尔网络. 文献[21, 23]研究了如何从不动点和极限环得到与之对应的一组布尔网络. 为了能从实验数据辨识出布尔网络, 文献[20]研究了能辨识出网络模型所需要的输入输出数据对的上限和下限. 文献[19]利用网络结点之间的关联矩阵给出了一种推导化学反应网络的统计方法. 文献[22]给出了一种REVEAL算法, 从网络状态的转移表格来辨识布尔网络. 文献[21]改进了REVEAL算法, 并证明辨识出一个有 n 个结点的布尔网络需要有 $O(\log n)$ 组输入输出数据.

近来, 程代展研究员和他领导的科研小组用半张量积这一新的矩阵乘法, 将布尔网络转化为线性离散动态方程, 从得到的线性离散动态方程出发, 得到了求解不动点数目、不同长度的极限环的数目、暂态期以及每个不动点和极限环的吸引域的显式表达公式, 在研究布尔网络的拓扑结构方面做出了突破性贡献^[17, 24-28], 使得布尔网络的拓扑结构性质得到了彻底解决.

用状态空间方法研究逻辑系统被国内外学者广泛引用, 得到了一大批具有重要价值的结果, 形成了状态空间框架下的逻辑系统控制理论. 文献[29-33]分别研究了布尔控制网络的相关稳定与镇定问题. 文献[30]得到了随机布尔网络的稳定与可镇定的充要条件; 文献[31]给出了带有脉冲的布尔系统的稳定与可

镇定的充要条件; 文献[32]对切换系统全局稳定与镇定进行了讨论. 特别地, 在文献[32]中针对切换布尔网络提出了切换能达概念, 并利用这一技巧得到切换布尔网络稳定性的检验条件. 文献[34-36]分别从不同角度研究了布尔网络系统的能控性能观性问题. 布尔控制网络的最优控制问题在文献[37-38]中进行了研究. 在文献[39-40]中定义了奇异布尔网络系统, 并在状态空间框架下进行了研究. 文献[41-42]研究了随机布尔控制网络的稳定性与能控性. 在文献[30, 43-44]中讨论了带有状态时滞的布尔控制网络的相关能控性. 文献[45]利用符号动力学的Artin-Mazur Zeta和拓扑熵研究了布尔网络的极限环个数和布尔控制网络的拓扑熵.

已有的研究主要是针对同步布尔网络^[24]或概率布尔网络^[41-42]. 由于布尔网络各个结点状态更新次序直接影响到网络的状态演化, 文献[46]在状态空间框架下研究了异步布尔网络. 块序列布尔网络是介于同步布尔网络和概率布尔网络之间的一类网络系统, 在本质上是一类相对确定的异步布尔网络. 在理论上, 块序列布尔网络是确定性布尔网络到完全随机布尔网络的过渡, 对块序列布尔网络的研究可以对随机布尔网络的研究起到一定促进作用. 在应用上, 块序列布尔网络比同步布尔网络更接近于实际模型, 比如在系统生物学的基因调控网络中, 基因或细胞的状态变化往往并不是同步的^[46]. 因此, 对块序列布尔网络的研究具有重要的理论意义和应用价值.

本文从矩阵的特征值与特征向量角度研究块序列布尔网络的结构. 在第2部分介绍块序列布尔网络的代数表示; 第3部分从块序列布尔网络的结构矩阵出发, 从矩阵特征值角度研究了网络的极限环性质; 第4部分用一个例子说明了本文方法的正确性; 第5部分是本文的小结.

2 块序列布尔网络(Block sequential Boolean network)

矩阵半张量积^[47]是本文的主要工具. 笔者将逻辑变量的取值与向量建立对应, 利用矩阵的半张量积, 将高阶逻辑动态系统转化为代数形式, 以逻辑动态系统的结构矩阵为主要研究对象. 不引起混淆的情况下, $1 \sim \delta_2^1, 0 \sim \delta_2^0, \mathcal{D} \sim \Delta$. 本文所指的“半张量积”是指左半张量积. 关于矩阵半张量积的性质可以参看文献[24, 47].

定义 1^[24] 设 $A \in M_{m \times n}, B \in M_{p \times q}$. 如果 n 是 p 的因子, 即 $nt = p$, 记为 $A \prec_t B$, 或 p 是 n 的因子, 即 $n = pt$, 记为 $A \succ_t B$, 则定义矩阵 A 和 B 的半张量积为

$$A \times B = (A \otimes I_{\frac{p}{t}})(B \otimes I_{\frac{n}{t}}),$$

其中: $\alpha = \text{lcm}(n, p)$ 是 n 与 p 的最小公倍数, \otimes 是 Kronecker 积.

为叙述方便, 本文用到的基本符号列表如下:

- $\mathcal{D} = \{0 \sim F, 1 \sim T\}$;
- $1_k := \underbrace{(1 \ 1 \ \cdots \ 1)}_k^T$;
- δ_n^i : 单位矩阵 I_n 的第 i 列;
- $\Delta_n := \{\delta_n^i | i = 1, \dots, n\}$, $\Delta := \Delta_2$;
- 矩阵 $L \in M_{n \times r}$ 称为逻辑矩阵, 其中 $\text{Col}(L) \subset \Delta_n$. 全体 $n \times r$ 逻辑矩阵的集合为 $\mathcal{L}_{n \times r}$; 逻辑矩阵 $L = [\delta_n^{i_1} \ \delta_n^{i_2} \ \cdots \ \delta_n^{i_r}]$ 记为 $L = \delta_n [i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_r]$;
- 矩阵 $B \in M_{n \times r}$ 称为布尔矩阵, 其中 $B_{ij} \in \mathcal{D}$; 全体 $n \times r$ 布尔矩阵的集合为 $\mathcal{B}_{n \times r}$.

引理 1^[24] 设 $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{D}$ 是 n 个逻辑变量, $f(x_1, \dots, x_n)$ 是一个逻辑函数. 则存在唯一的矩阵 $M_f \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$, 使得

$$f(x_1, \dots, x_n) = M_f \underset{i=1}{\times}^n x_i, \quad x_i \in \Delta.$$

集合 $\mathbb{Z}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个划分记作 $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_s)$, 其中: $\tau_i \subset \mathbb{Z}_n, \forall i \neq j, \tau_i \cap \tau_j = \emptyset$. 比如 $\mathbb{Z}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 时, $\tau = ((3), (5), (1, 2, 4))$ 是 \mathbb{Z}_5 的一个分割.

本文主要讨论块序列布尔网络的拓扑结构. 块序列布尔网络每个结点更新次序由分割 τ 确定, 是介于完全同步布尔网络和完全异步布尔网络的一类逻辑系统^[12].

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_{n_1}(t+1) = f_{n_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ x_{n_1+1}(t+1) = f_{n_1+1}(x_1(t+1), \dots, x_{n_1}(t+1), x_{n_1+1}(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_{n_2}(t+1) = f_{n_2}(x_1(t+1), \dots, x_{n_1}(t+1), x_{n_1+1}(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_{n_{s-1}+1}(t+1) = f_{n_{s-1}+1}(x_1(t+1), \dots, x_{n_{s-1}}(t+1), x_{n_{s-1}+1}(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t+1), \dots, x_{n_{s-1}}(t+1), x_{n_{s-1}+1}(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \quad (5)$$

利用紧凑形式, 式(5)可表示为

$$\begin{cases} x_{\tau_1}(t+1) = F_{\tau_1}(x_{\tau_1}(t), x_{\tau_2}(t), \dots, x_{\tau_s}(t)), \\ x_{\tau_2}(t+1) = F_{\tau_2}(x_{\tau_1}(t+1), x_{\tau_2}(t), \dots, x_{\tau_s}(t)), \\ \vdots \\ x_{\tau_s}(t+1) = F_{\tau_s}(x_{\tau_1}(t+1), x_{\tau_2}(t+1), \dots, x_{\tau_s}(t)), \end{cases}$$

其中: $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_s)$, $\tau_1 = (1, 2, \dots, n_1)$, $\tau_2 = (n_1 + 1, \dots, n_2), \dots, \tau_s = (n_{s-1} + 1, \dots, n)$.

注 1 对于由非有序划分确定的块序列布尔网络, 可以选择适当的坐标变换, 使得新的分块系统具有表达形式(5). 比如, 在例子1中, 取如下坐标变换:

$$\begin{cases} y_1(t) = x_3(t), \\ y_2(t) = x_5(t), \\ y_3(t) = x_1(t), \\ y_4(t) = x_2(t), \\ y_5(t) = x_4(t), \end{cases}$$

例 1 设一个含有5个结点的网络, 各个结点的更新律如下:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\ x_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\ x_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\ x_4 = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\ x_5 = f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \end{cases} \quad (3)$$

其中: $x_i (i = 1, \dots, 5)$ 是逻辑变量, $f_i (i = 1, \dots, 5)$ 是逻辑函数.

取 $\tau = ((3), (5), (1, 2, 4))$, 布尔网络(3)在状态更新序列 τ 作用下的演化律可描述为

$$\begin{cases} x_3(t+1) = f_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)), \\ x_5(t+1) = f_5(x_1(t), x_2(t), x_3(t+1), x_4(t), x_5(t)), \\ x_1(t+1) = f_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t+1), x_4(t), x_5(t+1)), \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t+1), x_4(t), x_5(t+1)), \\ x_4(t+1) = f_4(x_1(t), x_2(t), x_3(t+1), x_4(t), x_5(t+1)). \end{cases} \quad (4)$$

设 $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_s)$ 是 \mathbb{Z}_n 的一个划分, 如果对于任意的 $i < j$, τ_i 中的每一个元素都小于 τ_j 中的元素, 则称划分 τ 是有序的. 不失一般性, 设块序列布尔网络系统中各个结点状态更新次序由一个有序划分 τ 确定, 具体表示为式(5):

则系统(3)具有如下形式:

$$\begin{cases} y_1(t+1) = g_1(y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t), y_5(t)), \\ y_2(t+1) = g_2(y_1(t+1), y_2(t), y_3(t), y_4(t), y_5(t)), \\ y_3(t+1) = g_3(y_1(t+1), y_2(t+1), y_3(t), y_4(t), y_5(t)), \\ y_4(t+1) = g_4(y_1(t+1), y_2(t+1), y_3(t), y_4(t), y_5(t)), \\ y_5(t+1) = g_5(y_1(t+1), y_2(t+1), y_3(t), y_4(t), y_5(t)). \end{cases} \quad (6)$$

下面将式(6)转化为代数形式, 设 $y(t) = \underset{i=1}{\times}^5 y_i(t)$, 由引理1, 式(6)可以被表示为

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= M_1 y(t) = N_1 y(t), \\ y_2(t+1) &= M_2 y_1(t+1) y_2(t) y_3(t) y_4(t) y_5(t) = \\ &= M_2 M_1 y(t) y_2(t) y_3(t) y_4(t) y_5(t) := \\ &= N_2 y(t), \\ y_3(t+1) &= M_3 y_1(t+1) y_2(t+1) y_3(t) y_4(t) y_5(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &M_3 N_1 y(t+1) N_2 y(t+1) y_3(t) y_4(t) y_5(t) := \\
 &N_3 y(t), \\
 y_4(t+1) &= M_4 y_1(t+1) y_2(t+1) y_3(t) y_4(t) y_5(t) = \\
 &M_4 N_1 y(t+1) N_2 y(t+1) y_3(t) y_4(t) y_5(t) := \\
 &N_4 y(t), \\
 y_5(t+1) &= M_5 y_1(t+1) y_2(t+1) y_3(t) y_4(t) y_5(t) = \\
 &M_5 N_1 y(t+1) N_2 y(t+1) y_3(t) y_4(t) y_5(t) := \\
 &N_5 y(t).
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 &x_1(t+1) = N_1 x_1(t), \dots, x_n(t), \\
 &\vdots \\
 &x_{n_1}(t+1) = N_{n_1} x_1(t) \cdots x_n(t), \\
 &x_{n_1+1}(t+1) = N_{n_1+1} x_1(t+1) \cdots x_{n_1}(t+1) x_{n_1+1}(t) \cdots x_n(t), \\
 &\vdots \\
 &x_{n_2}(t+1) = N_{n_2} x_1(t+1) \cdots x_{n_1}(t+1) x_{n_1+1}(t) \cdots x_n(t), \\
 &\vdots \\
 &x_{n_{s-1}+1}(t+1) = N_{n_{s-1}+1} x_1(t+1) \cdots x_{n_{s-1}}(t+1) x_{n_{s-1}+1}(t) \cdots x_n(t), \\
 &\vdots \\
 &x_n(t+1) = N_n x_1(t+1) \cdots x_{n_{s-1}}(t+1) x_{n_{s-1}+1}(t) \cdots x_n(t).
 \end{aligned} \right. \tag{7}$$

设 $x(t) = \underset{i=1}{\times}^n x_i(t)$. 将式(7)中的方程依次代入并利用半张量积乘起来得到

$$x(t+1) = Lx(t), \tag{8}$$

其中矩阵 $L \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$, 称 L 为块序列布尔网络(5)的结构矩阵.

3 主要结论(Main results)

首先讨论布尔网络(8)的极限环性质. 设式(8)有 k 个不同的极限环, 不妨表示如下:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \{\delta_{2^n}^{i_{11}}, \delta_{2^n}^{i_{12}}, \dots, \delta_{2^n}^{i_{1j_1}}\}, \\
 X_2 &= \{\delta_{2^n}^{i_{21}}, \delta_{2^n}^{i_{22}}, \dots, \delta_{2^n}^{i_{2j_2}}\}, \\
 &\vdots \\
 X_k &= \{\delta_{2^n}^{i_{k1}}, \delta_{2^n}^{i_{k2}}, \dots, \delta_{2^n}^{i_{kj_k}}\}.
 \end{aligned}$$

对于布尔网络的 k 个极限环 X_s , 其中

$$X_s = \{\delta_{2^n}^{i_{s1}}, \delta_{2^n}^{i_{s2}}, \dots, \delta_{2^n}^{i_{sj_s}}\}, s = 1, \dots, k.$$

由极限环的性质, 有

$$\left\{ \begin{aligned}
 &L\delta_{2^n}^{i_{s1}} = \delta_{2^n}^{i_{s2}}, \\
 &L\delta_{2^n}^{i_{s2}} = \delta_{2^n}^{i_{s3}}, \\
 &\vdots \\
 &L\delta_{2^n}^{i_{s(j_s-1)}} = \delta_{2^n}^{i_{sj_s}}, \\
 &L\delta_{2^n}^{i_{sj_s}} = \delta_{2^n}^{i_{s1}}.
 \end{aligned} \right.$$

即

$$L\{\delta_{2^n}^{i_{s1}}, \delta_{2^n}^{i_{s2}}, \dots, \delta_{2^n}^{i_{sj_s}}\} = \{\delta_{2^n}^{i_{s1}}, \delta_{2^n}^{i_{s2}}, \dots, \delta_{2^n}^{i_{sj_s}}\}. \tag{9}$$

进一步将上述各式利用半张量积相乘, 利用文献[24]中的方法, 得到

$$\begin{aligned}
 y(t+1) &= \underset{i=1}{\times}^5 y_i(t+1) = \\
 &N_1 y(t) N_2 y(t) N_3 y(t) N_4 y(t) N_5 y(t) := Ly(t),
 \end{aligned}$$

其中 $L \in \mathcal{L}_{2^5 \times 2^5}$.

一般的, 对于块序列布尔网络系统(5). 利用矩阵的半张量积, 可以得到 f_i 的结构矩阵 N_i , 进而式(5)可以表示为代数形式(7):

为下文叙述方便, 本文将极限环表示为布尔向量形式, 其中 $X_s = \{\delta_{2^n}^{i_{s1}}, \delta_{2^n}^{i_{s2}}, \dots, \delta_{2^n}^{i_{sj_s}}\}$ 可以表示为

$$X_s = \delta_{2^n}^{i_{s1}, \dots, i_{sj_s}}.$$

即

$$LX_s = X_s, s = 1, \dots, k. \tag{10}$$

本文不加混淆的使用极限环的集合与布尔向量两种形式. 从式(10)可以看出, 极限环 X_s 是逻辑矩阵 L 的一个 1 特征向量.

以下定义布尔和算子 \oplus , 对于布尔向量 $\alpha, \beta \in \mathcal{B}^m$, 定义 α 与 β 的布尔和为

$$u \oplus v = (u_i \vee v_i), i = 1, \dots, n.$$

例 2 设有布尔向量 α, β, γ , 其中:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0], \\
 \beta &= [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0], \\
 \gamma &= [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],
 \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
 \alpha \oplus \beta &= [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0], \\
 \beta \oplus \gamma &= [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0], \\
 \gamma \oplus \alpha &= [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0].
 \end{aligned}$$

对于布尔网络的任意两个极限环 X_i, X_j , 由式(10)可知

$$LX_i = X_i, LX_j = X_j.$$

进一步有

$$L(X_i \oplus X_j) = LX_i \oplus LX_j = X_i \oplus X_j.$$

即布尔网络的任意两个1特征向量的布尔和仍然是1特征向量.

由上述讨论可知, 本文得到如下命题.

命题 1 设 $L \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$ 是布尔网络(8)的结构矩阵, 则有

1) 布尔网络(8)的极限环 X_s 是结构矩阵 L 的1特征向量.

2) 结构矩阵 L 的1特征向量 X 是布尔网络(8)的一个极限环或若干个极限环的布尔和, 即

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_s, \quad s \geq 1.$$

为了建立1特征向量与极限环的对应, 本文引进基本特征向量.

定义 2 设布尔向量 $X = \delta_{2^n}^{i_1, \dots, i_s}$ 是逻辑矩阵的1特征向量, 如果存在 $\{i_1, \dots, i_s\}$ 的真子集 $\{j_1, \dots, j_r\}$ 使得布尔向量 $X' = \delta_{2^n}^{j_1, \dots, j_r}$ 是逻辑矩阵 L 的1特征向量, 则称 X 是 L 的非基本特征向量; 否则称 X 是 L 的基本特征向量.

逻辑矩阵的基本特征向量有如下性质.

命题 2 设 α, β 是逻辑矩阵 L 的两个不同基本特征向量, 则 $\alpha^T \beta = 0$.

证 不妨设 $\alpha = \delta_{2^n}^{i_1, i_2, \dots, i_s}, \beta = \delta_{2^n}^{j_1, j_2, \dots, j_t}$, 则

$$L\alpha = \alpha, \quad L\beta = \beta.$$

断言: 集合 $S_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ 与 $S_2 = \{j_1, j_2, \dots, j_t\}$ 交集为空. 事实上, 布尔向量 α 可以分解为 s 个逻辑向量的布尔和, 即 $\alpha = \delta_{2^n}^{i_1} \oplus \delta_{2^n}^{i_2} \oplus \dots \oplus \delta_{2^n}^{i_s}$. 对于逻辑向量 $\delta_{2^n}^{i_1}$, 一定存在 $\{\delta_{2^n}^{i_2}, \dots, \delta_{2^n}^{i_s}\}$ 中的一个向量, 不失一般性记为 $\delta_{2^n}^{i_2}$, 使得

$$L\delta_{2^n}^{i_1} = \delta_{2^n}^{i_2}.$$

类似地

$$\begin{cases} L\delta_{2^n}^{i_1} = \delta_{2^n}^{i_2}, \\ L\delta_{2^n}^{i_2} = \delta_{2^n}^{i_3}, \\ \vdots \\ L\delta_{2^n}^{i_{s-1}} = \delta_{2^n}^{i_s}, \\ L\delta_{2^n}^{i_s} = \delta_{2^n}^{i_1}. \end{cases}$$

对于 β , 有

$$\begin{cases} L\delta_{2^n}^{j_1} = \delta_{2^n}^{j_2}, \\ L\delta_{2^n}^{j_2} = \delta_{2^n}^{j_3}, \\ \vdots \\ L\delta_{2^n}^{j_{t-1}} = \delta_{2^n}^{j_t}, \\ L\delta_{2^n}^{j_t} = \delta_{2^n}^{j_1}. \end{cases}$$

如果 $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, 不妨设 $i \in S_1 \cap S_2$, 则必有

$L\delta_{2^n}^i \in S_1 \cap S_2$. 即存在 $i_* \in S_1, j_* \in S_2$, 使得

$$L\delta_{2^n}^i = \delta_{2^n}^{i_*}, \quad L\delta_{2^n}^i = \delta_{2^n}^{j_*}.$$

由于 L 是逻辑矩阵, 每一列只有一个元素为1, 必有 $i_* = j_*$. 按类似的方法可以得到 $S_1 = S_2$, 断言成立.

由于 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, 所以

$$\alpha^T \beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{2^n} b_{2^n} = 0.$$

命题 3 结构矩阵 L 的基本特征向量是布尔网络的极限环.

证 不妨设 $\alpha = \delta_{2^n}^{i_1, i_2, \dots, i_s}$ 是布尔网络(8)的一个基本特征向量, 即

$$L\alpha = \alpha.$$

如果 α 不是极限环, 则由命题1, α 必为若干个极限环的和, 即 α 可以分解为

$$\alpha = \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_s, \quad s > 1,$$

其中 $\alpha_j = \delta_{2^n}^{j_1, \dots, j_p}$ 为布尔网络(8)的一个极限环, 并且有

$$L\alpha_j = \alpha_j.$$

另一方面, $\{j_1, \dots, j_p\} \subset \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$, 这与 α 为基本特征向量矛盾. 因此, 结构矩阵 L 的任何一个基本特征向量都是布尔网络的极限环, 即基本特征向量不是极限环的布尔和.

事实上, 由命题1和命题3可以看出, 结构矩阵的基本特征向量和极限环之间是一一对应的, 笔者可以将对极限环的研究转化为布尔网络极限环的研究. 得到本文的主要结论.

定理 1 设矩阵 L 是块序列布尔网络(2)的结构矩阵, 并且 $\text{rank}(L - I) = r$, 则块序列布尔网络(2)含有 $k = 2^n - r$ 极限环.

证 由上述定理和命题, 为了求出各种长度极限环的个数, 只需找到逻辑矩阵 L 所有基本特征向量的个数. 考虑如下其次线性方程组:

$$(L - I)X = 0,$$

其基础解系中含有线性无关解向量的总数为 $k = 2^n - r$, 其中 r 为系数矩阵 $(L - I)$ 的秩.

命题 1 设 $X = \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{2^n})^T \in \Delta_{2^n}$ 是布尔网络(8)的一个极限环, 则极限环 X 的极限环长度是 $\sum_{j=1}^{2^n} \eta_j$.

证 极限环 $X = \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{2^n})^T \in \Delta_{2^n}$ 中元素为1的各个分量, 分别代表布尔网络的一个状态, 因此极限环中不同状态的个数就是极限环的长度.

记布尔网络(8)的结构矩阵 L 的所有基本特征向

量集合为 $\sigma(1)$. 根据基本特征向量的长度分类如下:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\xi \mid \xi \in \sigma(1), |\xi| = 1\}, \\ W_2 &= \{\xi \mid \xi \in \sigma(1), |\xi| = 2\}, \\ &\vdots \\ W_{2^n} &= \{\xi \mid \xi \in \sigma(1), |\xi| = 2^n\}. \end{aligned}$$

推论 1 布尔网络(8)的结构矩阵为 L , 则布尔网络长度为 s 的极限环个数为

$$N_s = |W_s|, s = 1, \dots, 2^n.$$

证 注意到布尔网络的极限环与结构矩阵的基本特征向量有一一对应关系. 由命题 1 可知, 因此长度为 s 的极限环个数即模为 s 的基本特征向量的个数.

一般情况下, 结构矩阵的基本特征向量很难直接得到. 下面本文讨论如何从结构矩阵的一般 1 特征向量组得到不同长度极限环个数. 记 $\Sigma(1) = \{X_1, \dots, X_m\}$ 是结构矩阵的所有 1 特征向量集合. 接下来本文从布尔网络的结构矩阵得到不同长度极限环的个数. 定义

$$\begin{aligned} V_1 &= \{\xi \mid \xi \in \Sigma(1), |\xi| = 1\}, \\ V_2 &= \{\xi \mid \xi \in \Sigma(1), |\xi| = 2\}, \\ &\vdots \\ V_t &= \{\xi \mid \xi \in \Sigma(1), |\xi| = t\}, \end{aligned}$$

其中: $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2^n})^T \in \mathcal{B}^{2^n}, |\xi| = \sum_{i=1}^{2^n} \xi_i$.

对于布尔向量集合 V_1 和 V_2 , 定义

$$\text{Span}_{\oplus}(V_1, V_2) = \{u \oplus v, u, v \in V_1 \cup V_2\}.$$

类似地, 本文可以定义

$$\text{Span}_{\oplus}(V_1, \dots, V_k) = \{u \oplus v, u, v \in V_1 \cup \dots \cup V_k\}.$$

定理 2 长度为 s 的极限环个数 N_s 即为集合 V_t 可以由下述式子计算:

$$\begin{cases} N_1 = |V_1|, \\ N_s = |V_s \setminus \text{Span}_{\oplus}(V_1, \dots, V_{s-1})|. \end{cases} \quad (11)$$

由 V_t 的构造和 Span_{\oplus} 的定义, 重述定理 2 如下.

推论 2 布尔网络(8)长度为 N_s 的极限环个数递推计算如下:

$$\begin{cases} N_1 = |V_1|, \\ N_s = |V_s| - \sum_{t_1 + \dots + t_{s-1} = s} \binom{N_1}{t_1} \dots \binom{N_{s-1}}{t_{s-1}}. \end{cases} \quad (12)$$

设 $C: \eta = \delta_{2^n}^{i_1, \dots, i_s} \in B_{2^n}$ 是布尔网络(8)的一个极限环. 本文可以利用下述算法找到收敛到极限环 C 的所有状态集合即收敛域. 对极限环 C 中的每

一个状态 $\delta_{2^n}^{i_j} \in C, j = 1, \dots, s$, 进行如下运算: 首先将方程组 $L^k x = \delta_{2^n}^{i_j}$ 的所有解用 $B_{j,k}$ 表示. 由于布尔网络(8)只有 2^n 个不同的状态, 本文只需考虑当 $k \leq 2^n$ 时方程组 $L^{k_s} x = \delta_{2^n}^{i_j}$ 的解. 因此, 极限环 C 的吸引域表示为

$$B = \bigcup_{j=1, \dots, s} \bigcup_{t=1, \dots, 2^n} B_{j,k_s^*}.$$

4 例子 (An illustrative example)

本部分给出一个例子, 说明如何从布尔网络结构矩阵得到网络的极限环结构.

例 3 考虑如下布尔网络:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) \vee x_3(t), \\ x_2(t+1) = (x_1(t+1) \wedge x_2(t)) \rightarrow x_4(t), \\ x_3(t+1) = x_1(t+1) \leftrightarrow x_3(t), \\ x_4(t+1) = x_4(t) \vee x_3(t+1). \end{cases} \quad (13)$$

设 $x(t) = \bigotimes_{i=1}^4 x_i(t)$, 得到式(13)中各个结点的代数形式为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = L_1 x(t), \\ x_2(t+1) = L_2 x(t), \\ x_3(t+1) = L_3 x(t), \\ x_4(t+1) = L_4 x(t), \end{cases} \quad (14)$$

其中:

$$\begin{cases} L_1 = \delta_2 [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2], \\ L_2 = \delta_2 [1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], \\ L_3 = \delta_2 [1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], \\ L_4 = \delta_2 [1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]. \end{cases} \quad (15)$$

利用矩阵的半张量积, 将式(14)中各式分别代入得到布尔网络(13)的代数形式为

$$x(t+1) = Lx(t), \quad (16)$$

其中

$$L = \delta_{16} [1 \ 5 \ 3 \ 8 \ 1 \ 1 \ 3 \ 4 \ 1 \ 5 \ 9 \ 9 \ 1 \ 1 \ 9 \ 9].$$

容易检验

$$\text{rank}(L - I) = 13.$$

由定理 1 可知, 布尔网络(13)有 $(2^4 - 13) = 3$ 个极限环.

接下来, 本文寻找不同长度极限环的个数. 将结构矩阵 L 作为系数矩阵构造线性方程组

$$Lx = x.$$

通过计算得到上述方程组的基本特征向量为

$$\begin{aligned} x^1 &= \delta_{16}^{\{1\}} \sim \{(1 \ 1 \ 1 \ 1)\}, \\ x^2 &= \delta_{16}^{\{3\}} \sim \{(1 \ 1 \ 0 \ 1)\}, \\ x^3 &= \delta_{16}^{\{4,8\}} \sim \{(1 \ 1 \ 0 \ 0), (1 \ 0 \ 0 \ 0)\}. \end{aligned}$$

因此布尔网络(13)有两个不动点,一个长为2的极限环。

另一方面,从布尔网络(13)状态轨线图1得到布尔网络(13)的极限环个数和本文的结论一致。

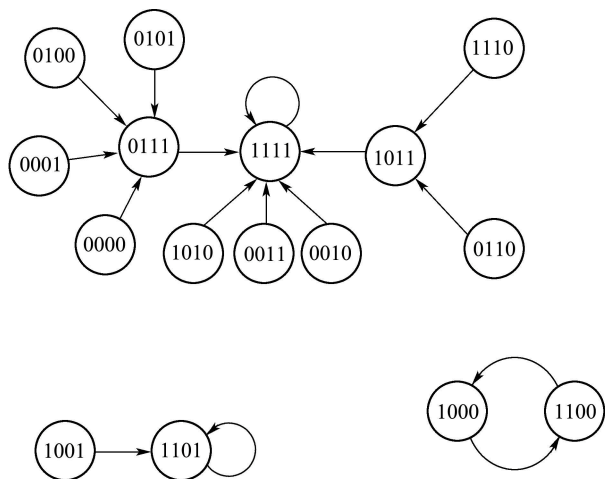


图1 布尔网络(13)的状态图

Fig. 1 State graph of Boolean network (13)

5 结论(Conclusions)

通过建立逻辑变量的逻辑取值与单位向量的一一对应,利用矩阵的半张量积将块序列布尔网络表示为代数形式.在布尔网络的状态空间框架下,通过对网络结构矩阵的研究,得到了块序列布尔网络的极限环等拓扑结构,利用结构矩阵的秩表示了不同长度极限环的个数和结构.同时利用实例检验了本文结果的正确性.

对含有 n 个结点的块序列布尔网络,如果将结点分为 n 块,那么块序列布尔网络就退化为一般的同步布尔网络.因此一般的非块序列布尔网络即同步布尔网络是块序列布尔网络的特例,本文的方法可以直接用于解决同步布尔网络极限环的结构.另一方面,本文的方法也可以用于研究多值、混合值逻辑系统的极限环性质.

下一步,笔者将研究如何从结构矩阵本身的性质从特征值与特征向量的角度得到随机逻辑系统的极限环结构特点.

参考文献(References):

- [1] Yamada S, Shiono S, Joo A, et al. Control mechanism of JAK/STAT signal transduction pathway [J]. *FEBS Letters*, 2003, 534(1/2/3): 190 – 196.
- [2] MESTL T, PLAHT E, STIG W O. A mathematical framework for describing and analysing gene regulatory networks [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1995, 176(2): 291 – 300.
- [3] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1969, 22(3): 437 – 467.
- [4] KAUFFMAN S A. *The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution* [M]. New York: Oxford University Press, 1993.
- [5] ALDANA M, COPPERSMITH S, KADANOFF L P. Boolean dynamics with random couplings [M] // *Perspectives and Problems in Nonlinear Science*. New York: Springer, 2003.
- [6] SHMULEVICH I, DOUGHERTY E R, KIM S, et al. Probabilistic Boolean networks: a rule-based uncertainty model for gene regulatory networks [J]. *Bioinformatics*, 2002, 18(2): 261 – 274.
- [7] SHMULEVICH I, DOUGHERTY R, ZHANG W. From boolean to probabilistic boolean networks as models of gene regulatory networks [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2002, 90(11): 1778 – 1791.
- [8] KAUFFMAN S A. The large scale structure and dynamics of gene control circuits: an ensemble approach [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1974, 44(1): 167 – 190.
- [9] GELFAND A E, WALKER C C. *Ensemble Modeling* [M]. New York: Marcel Dekker Inc., 1984.
- [10] FLYVBJERG H. An order parameter for networks of automata [J]. *Journal of Physics a Mathematical and Theoretical*, 1988, 21(19): 955 – 960.
- [11] LUQUE B, SOLE R V. Lyapunov exponents in random Boolean networks [J]. *Physica A*, 2000, 284(1): 33 – 45.
- [12] ROBERT F. *Discrete Iterations, A Metric Study* [M]. Translated by J. Rokne. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [13] KAUFFMAN S A. *At Home in the Universe* [M]. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [14] HUANG S. Gene expression profiling, genetic networks, and cellular states: an integrating concept for tumorigenesis and drug discovery [J]. *Journal of Molecular Medicine*, 1999, 77(6): 469 – 480.
- [15] HEIDEL J, MALONEY J, FARROW J, et al. Finding cycles in synchronous Boolean networks with applications to biochemical systems [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2003, 13(3): 535 – 552.
- [16] FARROW C, HEIDEL J, MALONEY H, et al. Scalar equations for synchronous Boolean networks with biological applications [J]. *IEEE Transactions on Neural Network*, 2004, 15(2): 348 – 354.
- [17] CHENG D, QI H S. A linear representation of dynamics of Boolean networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2251 – 2258.
- [18] ZHAO Q. A remark on “Scalar equations for synchronous Boolean networks with biological applications” [J]. *IEEE Transactions on Neural Network*, 2005, 16(6): 1715 – 1716.
- [19] ARKIN A, SHEN P, ROSS J. A test case of correlation metric-construction of a reaction pathway from measurements [J]. *Science*, 1997, 277(5330): 1275 – 1275.
- [20] AKUTSU T, KUHARA S, MARUYAMA O, et al. Identification of gene regulatory networks by strategic gene disruptions and gene over-expressions [C] // *Proceeding of the 9th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. New York: The Association for Computing Machinery Press, 1998: 695 – 702
- [21] AKUTSU T, MIYANO S, KUHARA S. Identification of genetic networks from a small number of gene expression patterns under the Boolean network model [J]. *Pacific Symposium on Biocomputing*, 1999, 4: 17 – 28.
- [22] LIANG S, FUHRMAN S, SOMOGYI R. REVEAL, a general reverse engineering algorithm for inference of genetic network architectures [J]. *Pacific Symposium on Biocomputing*, 1998, 3: 18 – 29.
- [23] PAL R, IVANOV I, DATTA A, et al. Generating Boolean networks with a prescribed attractor structure [J]. *Systems Biology*, 2005, 21(21): 4021 – 4025.
- [24] CHENG D, QI H, LI Z. *Analysis and Control of Boolean Networks—a Semi-tensor Product Approach* [M]. London: Springer-Verlag, 2011.

- [25] CHENG D. Input-state approach to Boolean networks [J]. *IEEE Transactions on Neural Network*, 2009, 20(3): 512 – 521.
- [26] CHENG D, QI H. State - space analysis of Boolean networks [J]. *IEEE Transactions on Neural Network*, 2010, 21(4): 584 – 594.
- [27] CHENG D, LIU J. Stabilization of Boolean control networks [C] // *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) / 28th Chinese Control Conference (CCC)*. Shanghai: IEEE, 2009: 5269 – 5274.
- [28] CHENG D, LI Z, QI H. Realization of Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2010, 46(1): 62 – 69.
- [29] CHENG D, QI H, LI Z, et al. Stability and stabilization of Boolean networks [J]. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2011, 21(2): 134 – 156.
- [30] LI F, SUN J. Stability and stabilization issue of probabilistic boolean network [C] // *Proceeding of the 30th Chinese Control Conference*. Yantai: IEEE, 2011: 6380 – 6385.
- [31] LI F, SUN J. Stability and stabilization of boolean networks with impulsive effects [J]. *System & Control Letters*, 2012, 61(1): 1 – 5.
- [32] LI H. Global stability and controllability of switched Boolean networks [C] // *Proceeding of the 31st Chinese Control Conference*. Hefei: IEEE, 2012: 82 – 88.
- [33] LI Z, SONG J. Controllability of boolean control networks avoiding states set [J]. *Science China: Information Science*, 2014, 57(3): 1 – 13.
- [34] ETTORE F, MARIA E V. Observability, reconstructibility and state observers of Boolean control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(6): 1390 – 1401.
- [35] LASCHOV D, MARGALOT M. Controllability of boolean control networks via the Perron-Frobenius theory [J]. *Automatica*, 2012, 48(6): 1218 – 1223.
- [36] LASCHOV D, MARGALOT M, GUY E. Observability of boolean networks: a graph-theoretic approach [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2351 – 2362.
- [37] LASCHOV D, MARGALOT M. A maximum principle for single-input boolean control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(4): 913 – 917.
- [38] LASCHOV D, MARGALOT M. Minimum-time control of boolean networks [J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2013, 51(4): 2869 – 2892.
- [39] FENG J E, YAO J, CUI P. Singular Boolean networks: semi-tensor product approach [J]. *Science China: Information Sciences*, 2013, 56(11): 1 – 14.
- [40] 李海涛, 王玉振. 切换奇异布尔网络的稳定性分析 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(7): 908 – 914.
(LI Haitao, WANG Yuzheng. Stability analysis for switched singular Boolean networks [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 908 – 914.)
- [41] ZHAO Y, CHENG D Z. On controllability and stabilizability of probabilistic Boolean control networks [J]. *Science China: Information Science*, 2014, 57(1): 012202:1 – 012202:14.
- [42] LI F, SUN J. Controllability of probabilistic boolean control networks [J]. *Automatica*, 2011, 47(12): 2765 – 2771.
- [43] ZHANG L J, ZHANG K Z. Controllability of time-variant boolean control networks and its application to Boolean control networks with finite memories [J]. *Science China: Information Sciences*, 2013, 56(10): 108201(12)
- [44] ZHANG L Q, FENG J E, MENG M. Controllability of higher order switched boolean control networks [C] // *The 9th Asian Control Conference*. Istanbul: IEEE, 2013: 1 – 6.
- [45] HOCHMA G, MARGALOT M, FORNASINI E, et al. Symbolic dynamics of Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2525 – 2530.
- [46] LI Z, XIAO H, SONG J. Algebraic approach to asynchronous boolean networks [C] // *The 23rd Chinese Control and Decision Conference*. Mianyang: IEEE, 2011: 769 – 773.
- [47] 程代展, 齐洪胜. 矩阵的半张量积理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

作者简介:

宋金利 (1981–), 女, 硕士, 讲师, 目前研究方向为系统理论,
E-mail: songjinli@huel.edu.cn;

李志强 (1980–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为逻辑系统理论、复杂系统建模与分析, E-mail: lizhiqiang@amss.ac.cn.