

## 基于有限频段的Markov跳变系统有限时间 $H_\infty$ 滤波

赵长钟, 栾小丽<sup>†</sup>, 刘 飞

(江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 传统Markov跳变系统 $H_\infty$ 滤波方法要求所有子系统对全频域的噪声具有同样的干扰抑制水平, 由于没有充分利用噪声的频率信息, 导致传统滤波方法可能含有较大的保守性. 本文针对特定频段的干扰信号, 提出基于有限短时间的 $H_\infty$ 滤波器设计方法. 在引入有限频段的同时, 结合有限短时间稳定理论, 提出有限频段以及有限时间两尺度滤波方案, 为降低滤波理论的工程保守性提供了思路. 仿真结果表明本文所提滤波方法与现有滤波方法相比, 具有一定的优越性.

**关键词:** Markov跳变系统; 有限频段; 有限时间;  $H_\infty$ 滤波; 广义KYP引理

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Finite-time H-infinity filtering for Markov jump systems in finite frequency domain

ZHAO Chang-zhong, LUAN Xiao-li<sup>†</sup>, LIU Fei

(Key Laboratory of Advanced Control for Light Industry Processes, Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

**Abstract:** The traditional H-infinity filtering methods for Markov jump systems require all the subsystems have the same level of noise attenuation in full frequency. Because the frequency information of noise is not efficiently used, the traditional filtering methods may lead to more conservativeness. This paper proposes a finite time based H-infinity filter design method by considering the noise in specific frequency. Combining with the definition of finite frequency and finite time stability theory, we develop the finite frequency and finite time filtering scheme, named as two dimensional filtering technique, to reduce the engineering conservation of filtering theory. Simulation results show that the proposed filtering method has certain advantages compared with the existing ones.

**Key words:** Markov jump systems; finite frequency; finite time; H-infinity filtering; generalized Kalman-Yakubovic-Popov (KYP) lemma

### 1 引言(Introduction)

从模拟滤波、数字滤波, 到维纳滤波, 进而到卡尔曼滤波, 滤波技术在控制理论发展及工程实践中一直独具魅力, 而 $H_\infty$ 滤波由于不需要获取输入噪声的统计信息、鲁棒性强等特点, 吸引了众多研究人员的注意力<sup>[1-4]</sup>. 另外, 现代工程领域中存在着大量既随时间连续演化, 又受离散事件驱动的混杂系统, 而Markov跳变系统作为一类重要的混杂系统, 因能描述大量的实际系统而受到广泛关注<sup>[5-10]</sup>. 目前Markov跳变系统的 $H_\infty$ 滤波问题已经得到了充分研究, 如文献[11-13]针对带有时滞或不确定性的线性Markov跳变系统, 研究其 $H_\infty$ 滤波器设计方法; 文献[14-15]利用神经网络、T-S模糊等工具, 处理非线性Markov跳变系统的

$H_\infty$ 滤波问题. 此外, 考虑转移概率部分未知或时变等复杂情形, 离散Markov跳变系统的 $H_\infty$ 滤波器设计也同样有学者关注<sup>[16-17]</sup>.

梳理众多的Markov跳变系统 $H_\infty$ 滤波研究成果, 从线性到非线性, 从转移概率精确已知到随机变化, 均要求所有子系统对全频域的噪声具有同样的干扰抑制水平. 而除了白噪声, 任何噪声的绝大多数能量都集中在一定频率范围内, 由于不能凸显有限频率范围特性, 已有的 $H_\infty$ 滤波方法可能含有较大的保守性. 基于有限频段的广义卡尔曼-雅克布-波波夫(Kalman-Yakubovic-Popov, KYP)引理的提出<sup>[18]</sup>, 为解决有限频段滤波问题带来了全新的思路, 提高了频域方法在滤波器设计中的实用性. 由于广义KYP引理能够直接

收稿日期: 2014-07-11; 录用日期: 2014-11-26.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: xluan@jiangnan.edu.cn; Tel.: +86 510-5912109.

国家自然科学基金项目(61473137), 江南大学自主科研计划重点项目(JUSRP51407B)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61473137) and Fundamental Research Funds for the Central Universities (JUSRP51407B).

刻画和处理特定频段性能指标,使得基于有限频段的H<sub>∞</sub>滤波方法得到了广泛关注<sup>[19-21]</sup>,但主要针对基于时间演化的所谓单一动态系统,对于既含时间演化又有事件驱动的Markov跳变系统还没有文献涉及。

本文针对离散Markov跳变系统,不仅考虑具有特定频段的噪声干扰信号,而且考虑系统在有限时间内的暂态特性,研究其H<sub>∞</sub>滤波器设计方法。从频率和时间两个角度,提出有限频段与有限时间两尺度滤波方案。由于Markov跳变系统含多个子系统,通过限定各子系统传递函数的最大奇异值小于给定值,从而确保整个系统在特定频段具有H<sub>∞</sub>干扰抑制水平。再利用广义KYP引理,将频域不等式转化成线性矩阵不等式,同时结合有限短时间稳定理论,获取H<sub>∞</sub>滤波器存在的充分条件。仿真结果表明,与已有的全频段有限时间H<sub>∞</sub>滤波方法相比,该方法具有更好的扰动抑制能力。

文章的结构安排如下:首先通过一些基本的定义及引理,对本文要解决的问题作具体描述;其次通过引理4及引理5得出系统分别满足有限频段及有限时间两个性能指标的充分条件,并在定理1中归纳出本文的主要结果;接着通过仿真验证本文方法的有效性;最后对全文做了总结。

## 2 问题描述(Problem statement)

考虑如下离散时间Markov跳变系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(\sigma_k)x(k) + B(\sigma_k)w(k), \\ y(k) = C(\sigma_k)x(k) + D(\sigma_k)w(k), \\ z(k) = L(\sigma_k)x(k), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  为系统的状态变量;  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  表示系统的可测输出;  $z(k) \in \mathbb{R}^q$  表示系统的被控输出;  $w(k) \in l_2^m[0, +\infty)$  为外部干扰,并满足能量有界条件

$$\|w\|_2^2 = \left[ \sum_{k=0}^N w_k^T w_k \right] < h^2,$$

$A(\sigma_k), B(\sigma_k), C(\sigma_k), D(\sigma_k)$  和  $L(\sigma_k)$  是已知的依赖于模态  $\sigma_k$  的适维矩阵。 $\sigma_k$  是随时间  $k$  在有限集合  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  中取值的离散Markov链,其状态转移概率满足

$$P\{\sigma_{k+1} = j | \sigma_k = i\} = p_{ij},$$

其中  $p_{ij} > 0$  表示从模态  $i$  到模态  $j$  的转移概率,并满足条件  $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$ 。为表述方便,当  $\sigma_k = i$  时,分别用  $A_i, B_i, C_i, D_i$  和  $L_i$  表示  $A(\sigma_k), B(\sigma_k), C(\sigma_k), D(\sigma_k)$  和  $L(\sigma_k)$ 。

针对系统(1),构造如下的全维滤波器:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_{fi}x(k) + B_{fi}y(k), \\ \hat{z}(k) = C_{fi}\hat{x}(k), \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  是滤波器的状态向量,  $\hat{z}(k) \in \mathbb{R}^q$  为

滤波器的被控输出,  $A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}$  为待求的滤波器参数。

定义估计误差

$$e(k) = z(k) - \hat{z}(k),$$

状态变量

$$\tilde{x}(k) = [x(k) \ \hat{x}(k)]^T,$$

可以得到如下增广的滤波误差系统:

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \bar{A}_i\tilde{x}(k) + \bar{B}_i w(k), \\ e(k) = \bar{C}_i\tilde{x}(k), \end{cases} \quad (3)$$

其中:

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{fi}C_i & A_{fi} \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ B_{fi}D_i \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_i = [L_i \quad -C_{fi}].$$

在得到本文的主要结果之前,有必要给出以下基本的定义以及要用到的一些引理:

**定义1** 滤波误差跳变系统(3)是关于  $(c_1, c_2, N, R, h^2)$  有限时间有界的,其中  $c_1 < c_2, R > 0, N$  为给定正整数,如果有下式成立:

$$\tilde{x}^T(k_0)R\tilde{x}(k_0) \leq c_1 \implies E\{\tilde{x}^T(k)R\tilde{x}(k)\} < c_2, \\ k \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (4)$$

**定义2** 定义  $G_{we}^i(e^{j\theta})$  为第  $i$  个子系统从干扰  $w(k)$  到误差  $e(k)$  的传递函数,Markov跳变系统的有限频域H<sub>∞</sub>滤波就是设计一组滤波器,对于给定的性能指标  $\gamma > 0$ ,使得

$$\sup \sigma_{\max}(G_{we}^i(e^{j\theta})) < \gamma, \forall \theta \in \Theta, i \in S, \quad (5)$$

其中  $\Theta$  代表不同的频域范围,其定义如表1所示。

表1 不同频段的定义

Table 1 Definition of different frequency ranges

	低频	中频	高频
$\Theta$	$ \theta  \leq \vartheta_1$	$\vartheta_1 \leq \theta \leq \vartheta_2$	$\theta \geq \vartheta_h$

**注1** 在工程实际中,有时希望某一特定子系统对特定频段的外部干扰衰减有不同的度量要求,此时可设计一组模态依赖的度量指标  $\gamma_i$ ,使得对不同频段的  $\theta_i$  满足

$$\sigma_{\max}(G_{we}^i(e^{j\theta_i})) < \gamma_i, \forall \theta \in \Theta, i \in S.$$

**引理1**(广义KYP引理<sup>[18]</sup>) 给定系统矩阵  $(A, B, C, D)$  以及适维的对称矩阵  $\Pi$ ,则下列两个表述是等价的:

1) 有限频域不等式

$$[G^*(e^{j\theta}) \ I]\Pi \begin{bmatrix} G(e^{j\theta}) \\ I \end{bmatrix} < 0, \forall \theta \in \Theta, \quad (6)$$

其中  $G(e^{j\theta}) = C(e^{j\theta}I - A)^{-1}B + D$  为传递函数。

2) 存在 $n$ 阶厄尔米特矩阵 $P, Q(Q > 0)$ 满足

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

其中: 在低频段

$$\Xi = \begin{bmatrix} -P & Q \\ Q & P - (2 \cos \vartheta_1)Q \end{bmatrix};$$

中频段

$$\Xi = \begin{bmatrix} -P & e^{j\vartheta_c}Q \\ e^{-j\vartheta_c}Q & P - (2 \cos \vartheta_d)Q \end{bmatrix},$$

$$(\vartheta_c = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \vartheta_d = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2});$$

高频段

$$\Xi = \begin{bmatrix} -P & -Q \\ -Q & P + (2 \cos \vartheta_h)Q \end{bmatrix}.$$

**注 2** 应该指出的是式(6)中 $\Pi$ 的作用是刻画具体的性能指标, 如果定义 $\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$ , 经过简单矩阵运算, 式(6)变为

$$G_{we}^T(e^{j\theta})G_{we}(e^{j\theta}) - \gamma^2 I < 0, \quad (8)$$

即 $\|G_{we}(e^{j\theta})\| < \gamma$ , 代表的是 $H_\infty$ 性能指标.

**引理 2**(射影定理<sup>[22]</sup>) 给定矩阵 $\Gamma, A, \Psi$ , 存在矩阵 $F$ 满足 $\Gamma F A + (\Gamma F A)^T + \Psi < 0$ , 当且仅当下面两个条件成立:

$$\Gamma^\perp \Psi \Gamma^{\perp T} < 0, \quad A^{T\perp} \Psi A^{T\perp T} < 0,$$

其中上标“ $\perp$ ”表示矩阵的零空间.

**引理 3** 给定适维的对称正定矩阵 $X$ 以及一般矩阵 $N$ , 有如下不等式成立:

$$-NX^{-1}N^T \leq X - N^T - N, \quad (9)$$

证明见文献[23].

本文的目的是从有限时间以及有限频段两个尺度设计滤波方案, 并以低频段为例, 即考虑当外部干扰为低频噪声时, 设计滤波器使得滤波误差系统(3)满足有限频段 $H_\infty$ 性能指标

$$\sup \sigma_{\max}(G_{we}^i(e^{j\theta})) < \gamma, \quad |\theta| \leq \vartheta_1, \quad (10)$$

同时考虑系统在有限短时间内的暂态性能, 设计滤波器使滤波误差系统(3)满足有限时间有界条件(4).

### 3 有限频段 $H_\infty$ 滤波器设计(Finite frequency H-infinity filter design)

为使得滤波误差系统(3)对于低频噪声满足低频段 $H_\infty$ 性能指标(10), 限定各子系统传递函数的最大奇异值小于给定的衰减系数, 从而确保整个系统在特定

低频段满足 $H_\infty$ 干扰抑制水平, 得到如下引理:

**引理 4** 给定 $\gamma > 0, \vartheta_1$ , 如果存在对称矩阵 $P_i$ , 正定对称矩阵 $Q_i$ 及矩阵 $W_i$ 满足

$$\begin{bmatrix} -P_i & Q_i - W_i & 0 & 0 \\ * & \Delta_i & W_i^T \bar{B}_i & \bar{C}_i^T \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

其中

$$\Delta_i = P_i - (2 \cos \vartheta_1)Q_i + W_i^T \bar{A}_i + \bar{A}_i^T W_i,$$

则滤波误差系统(3)满足低频段 $H_\infty$ 性能指标(10).

**证** 根据Schur引理, 式(11)等价于

$$\begin{bmatrix} -P_i & Q_i - W_i & 0 \\ * & \Delta_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i & W_i^T \bar{B}_i \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

根据引理1及注2, 系统满足有限低频段 $H_\infty$ 性能指标(10)等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_i \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_i \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} \bar{C}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

其中:

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} -P_i & Q_i \\ Q_i & P_i - (2 \cos \vartheta_1)Q_i \end{bmatrix}.$$

令 $\Gamma = [-I \quad \bar{A}_i \quad \bar{B}_i]^T$ , 则

$$\Gamma^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A}_i^T & I & 0 \\ \bar{B}_i^T & 0 & I \end{bmatrix}.$$

同时令

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & \bar{C}_i & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T,$$

则式(13)可整理如下:

$$\Gamma^\perp (J \Xi J^T + H \Pi H^T) \Gamma^{\perp T} < 0. \quad (14)$$

再取 $\Lambda = [0 \quad I \quad 0]$ , 则 $\Lambda^{T\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ , 可验证

$$\Lambda^{T\perp} (J \Xi J^T + H \Pi H^T) \Lambda^{T\perp T} < 0. \quad (15)$$

令 $\Psi = J \Xi J^T + H \Pi H^T$ , 于是利用引理2, 式(14)-(15)等价于

$$(J \Xi J^T + H \Pi H^T) + H e(\Gamma W \Lambda) < 0, \quad (16)$$

其中 $H e(\Gamma W \Lambda) = \Gamma W \Lambda + (\Gamma W \Lambda)^T$ . 将式(16)展开即可得式(12). 因此, 式(11)成立可确保式(13)成立, 即满足低频段 $H_\infty$ 性能指标. 证毕.

**注 3** 值得注意的是引理4中的矩阵不等式(11)既从时

域角度给出了滤波误差系统(3)具有H<sub>∞</sub>性能指标的充分条件, 又从频域角度通过引入干扰的低频段 $\theta_1$ 来确保误差系统对特定频段的干扰信号具有干扰抑制能力, 放松了传统滤波误差系统对全频域的干扰信号都具有干扰抑制能力的要求, 降低了设计方法的保守性.

引理4确保了滤波误差系统(3)对于低频噪声满足H<sub>∞</sub>性能指标, 但不能确保系统状态轨迹在时间域内的演化行为, 因此给出如下引理使得滤波误差系统(3)在有限短时间内满足一定的暂态性能, 即确保系统是有限时间有界的.

**引理5** 给定 $\alpha > 1$ , 如果存在正定对称矩阵 $\hat{P}_i$ 及一般矩阵 $W_i$ 使得

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_i - W_i - W_i^T & W_i^T \bar{A}_i & W_i^T \bar{B}_i \\ * & -\alpha \hat{P}_i & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

$$\alpha^N (c_1 \max_{i \in S} \lambda_{\max}(\tilde{P}_i) + \gamma^2 h^2) < c_2 \min_{i \in S} \lambda_{\min}(\tilde{P}_i), \quad (18)$$

其中:  $\tilde{P}_i = R^{-\frac{1}{2}} \hat{P}_i R^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\bar{P}_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} \hat{P}_j$ . 则滤波误差系统(3)是关于 $(c_1, c_2, N, R, h^2)$ 有限时间有界的.

**证** 首先选取Lyapunov函数

$$V(k) = \tilde{x}_k^T \hat{P}_i x_k, \quad (19)$$

则当 $\sigma_k = i, \sigma_{k+1} = j$ 时,

$$\begin{aligned} E\{V(k+1) - V(k)\} = \\ \tilde{x}^T(k+1) \bar{P}_i \tilde{x}(k+1) - \tilde{x}^T(k) \hat{P}_i \tilde{x}(k) = \\ \tilde{x}^T(k) (\bar{A}_i^T \bar{P}_i \bar{A}_i - \hat{P}_i) \tilde{x}(k) + 2\tilde{x}^T(k) \bar{A}_i^T \bar{P}_i \bar{B}_i w(k) + \\ w^T(k) \bar{B}_i^T \bar{P}_i \bar{B}_i w(k) = \zeta^T(k) \Phi_i \zeta(k), \end{aligned} \quad (20)$$

其中:

$$\zeta^T(k) = [x^T(k) \quad w^T(k)],$$

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_i^T \bar{P}_i \bar{A}_i - \hat{P}_i & \bar{A}_i^T \bar{P}_i \bar{B}_i \\ * & \bar{B}_i^T \bar{P}_i \bar{B}_i \end{bmatrix}.$$

由引理3, 式(17)可推出

$$\begin{bmatrix} -W_i^T \bar{P}_i^{-1} W_i & W_i^T \bar{A}_i & W_i^T \bar{B}_i \\ * & -\alpha \hat{P}_i & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

对上式两边分别乘以对角阵 $\text{diag}\{W_i^{-1}, I, I\}$ , 再利用Schur补定理可得

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T \bar{P}_i \bar{A}_i - \alpha \hat{P}_i & \bar{A}_i^T \bar{P}_i \bar{B}_i \\ * & -\gamma^2 I + \bar{B}_i^T \bar{P}_i \bar{B}_i \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

根据式(22), 可得

$$V(k+1) < \alpha V(k) + \gamma^2 w(k)^T w(k).$$

对上式进行递推, 有

$$\begin{aligned} V(k) < \alpha V(k-1) + \gamma^2 w(k-1)^T w(k-1) < \\ & \alpha^2 V(k-2) + \alpha \gamma^2 w^T(k-2) w(k-2) + \\ & \gamma^2 w^T(k-1) w(k-1) < \dots < \\ & \alpha^k V(0) + \gamma^2 \sum_{l=0}^{k-1} \alpha^{k-l-1} w^T(l) w(l) < \\ & \alpha^k (V(0) + \gamma^2 h^2). \end{aligned} \quad (23)$$

另一方面, 利用矩阵特征值的性质, 有

$$\begin{aligned} V(0) = \tilde{x}^T(0) \hat{P}_{\sigma_0} \tilde{x}(0) < \\ \max_{i \in S} \lambda_{\max}(\tilde{P}_i) \tilde{x}^T(0) R \tilde{x}(0) < \\ \max_{i \in S} \lambda_{\max}(\tilde{P}_i) c_1. \end{aligned}$$

同理 $V(k) > \min_{i \in S} \lambda_{\min}(\tilde{P}_i) \tilde{x}^T(k) R \tilde{x}(k)$ , 所以

$$\tilde{x}^T(k) R \tilde{x}(k) < \frac{\alpha^k (\max_{i \in S} \lambda_{\max}(\tilde{P}_i) c_1 + \gamma^2 h^2)}{\min_{i \in S} \lambda_{\min}(\tilde{P}_i)}. \quad (24)$$

结合条件(18)可得 $\tilde{x}^T(k) R \tilde{x}(k) < c_2$ , 则滤波误差系统(3)是有限时间有界的. 证毕.

**注4** 应该指出的是与已有文献中有限时间有界的充分条件相比, 引理5中的式(17)中不仅包含了变量 $\hat{P}_i$ , 还引入了新的松弛变量矩阵 $W_i$ , 此变量的引入在增加有限短时间下系统状态轨迹吸引域的同时, 也为低频干扰情形下滤波器的求解提供了统一方法.

同时考虑有限频段与有限时间两尺度滤波, 基于引理4-5即可得到本文的主要结论如下:

**定理1** 对离散时间Markov跳变系统(1), 给定 $\theta_1, \gamma, \alpha > 1$ , 如果存在对称矩阵 $P_i, Q_i > 0, \hat{P}_i > 0$ , 以及矩阵 $M_{i1}, M_{i2}, M_{i3}, A_{Fi}, B_{Fi}, C_{Fi}$ (其中 $i \in S, P_i = \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} \\ * & P_{i3} \end{bmatrix}, Q_i = \begin{bmatrix} Q_{i1} & Q_{i2} \\ * & Q_{i3} \end{bmatrix}, \hat{P}_i = \begin{bmatrix} \hat{P}_{i1} & \hat{P}_{i2} \\ * & \hat{P}_{i3} \end{bmatrix}$ )满足

$$\begin{bmatrix} -P_{i1} & -P_{i2} & \Omega_{13} & \Omega_{14} & 0 & 0 \\ * & -P_{i3} & \Omega_{23} & \Omega_{24} & 0 & 0 \\ * & * & \Omega_{33} & \Omega_{34} & \Omega_{35} & L_i^T \\ * & * & * & \Omega_{44} & \Omega_{45} & -C_{Fi}^T \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & \Upsilon_{13} & A_{Fi} & \Upsilon_{15} \\ * & \Upsilon_{22} & \Upsilon_{23} & A_{Fi} & \Upsilon_{25} \\ * & * & -\alpha \hat{P}_{i1} & -\alpha \hat{P}_{i2} & 0 \\ * & * & * & -\alpha \hat{P}_{i3} & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

$$\lambda_1 R < \hat{P}_i < \lambda_2 R, \quad (27)$$

$$\alpha^N (c_1 \lambda_2 + \gamma^2 h^2) - c_2 \lambda_1 < 0, \quad (28)$$

其中:

$$\Omega_{13} = Q_{i1} - M_{i1}^T, \quad \Omega_{14} = Q_{i2} - M_{i3}^T,$$

$$\Omega_{23} = Q_{i2}^T - M_{i2}^T, \quad \Omega_{24} = Q_{i3} - M_{i2}^T,$$

$$\Omega_{33} = P_{i1} - 2 \cos \vartheta_1 Q_{i1} + H e(M_{i1} A_i + B_{Fi} C_i),$$

$$\Omega_{34} = P_{i2} - 2 \cos \vartheta_1 Q_{i2} + A_{Fi} + (M_{i3} A_i + B_{Fi} C_i)^T,$$

$$\Omega_{35} = M_{i1} B_i + B_{Fi} D_i, \quad \Omega_{45} = M_{i3} B_i + B_{Fi} D_i,$$

$$\Omega_{44} = P_{i3} - 2 \cos \vartheta_1 Q_{i3} + A_{Fi} + A_{Fi}^T,$$

$$\Upsilon_{11} = \sum_{j=1}^N p_{ij} \hat{P}_{j1} - M_{i1} - M_{i1}^T,$$

$$\Upsilon_{12} = \sum_{j=1}^N p_{ij} \hat{P}_{j2} - M_{i2} - M_{i3}^T,$$

$$\Upsilon_{22} = \sum_{j=1}^N p_{ij} \hat{P}_{j3} - M_{i2} - M_{i2}^T,$$

$$\Upsilon_{13} = M_{i1} A_i + B_{Fi} C_i, \quad \Upsilon_{15} = M_{i1} B_i + B_{Fi} D_i,$$

$$\Upsilon_{23} = M_{i3} A_i + B_{Fi} C_i, \quad \Upsilon_{25} = M_{i1} B_i + B_{Fi} D_i,$$

则存在一组滤波器使得滤波误差系统(3)是有限时间有界的,且满足低频段 $H_\infty$ 性能指标(10).进一步,如果线性矩阵不等式(25)–(28)有可行解,则可求得滤波器参数

$$A_{fi} = M_{i2}^{-1} A_{Fi}, \quad B_{fi} = M_{i2}^{-1} B_{Fi}, \quad C_{fi} = C_{Fi}.$$

**证** 由引理3–4,式(11)以及式(17)–(18)可确保滤波误差系统(3)有限时间有界,并且满足有限频段 $H_\infty$ 性能指标(10),但变量之间存在耦合,需要将其转化为线性矩阵不等式.

将矩阵 $P_i, Q_i, W_i, \hat{P}_i$ 作如下分解:

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} \\ * & P_{i3} \end{bmatrix}, \quad Q_i = \begin{bmatrix} Q_{i1} & Q_{i2} \\ * & Q_{i3} \end{bmatrix},$$

$$W_i = \begin{bmatrix} M_{i1} & M_{i2} \\ M_{i3} & M_{i2} \end{bmatrix}^T, \quad \hat{P}_i = \begin{bmatrix} \hat{P}_{i1} & \hat{P}_{i2} \\ * & \hat{P}_{i3} \end{bmatrix},$$

并令

$$A_{Fi} = M_{i2} A_{fi}, \quad B_{Fi} = M_{i2} B_{fi}, \quad C_{Fi} = C_{fi}, \quad (29)$$

经过变量替换等计算可得到式(11)等价于式(25),式(17)等价于式(26).

另外式(27)–(28)两式可确保式(18)成立.

证毕.

**注5** 传统Markov跳变系统的有限时间 $H_\infty$ 滤波器设计方法仅仅从时域角度进行分析,没有充分利用噪声的频率信息,该方法可能具有较大的保守性.定理1不仅从时域,而且利用广义KYP引理从频域角度分析问题,因此具有一定的优势.

**注6** 为获得最优的 $H_\infty$ 性能指标,可将问题转化为

$$\begin{cases} \min \rho, \\ \text{s.t. 式(25) – (28)} \end{cases} \quad (30)$$

其中 $\gamma = \sqrt{\rho}$ .

**注7** 在有限短时间控制问题中,总是期望 $c_2$ 的值越小越好,为得到可行的最小 $c_2$ 值,可以求解下述问题:

$$\begin{cases} \min c_2, \\ \text{s.t. 式(25) – (28)}. \end{cases} \quad (31)$$

#### 4 仿真分析(Simulation analysis)

为表明本文所提基于有限短时间的有限频段 $H_\infty$ 滤波方法的优越性,与文献[17]提出的全频段有限时间 $H_\infty$ 滤波器设计结果进行比较.取如下两模态的离散时间Markov跳变系统,系统参数如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.2 & 0 \\ 1.5 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.26 \\ 1.1 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.26 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0.5 \ 0.4], \quad C_2 = [0.1 \ 0.3],$$

$$D_1 = [0.4], \quad D_2 = [-0.5],$$

$$L_1 = [0.4 \ 0.2], \quad L_2 = [0.3 \ 0.5],$$

其状态转移概率矩阵为

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.64 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix}.$$

设系统初值 $\alpha = 1.05$ ,  $\vartheta_1 = \pi/10$ ,  $c_1 = 1$ ,  $N = 5$ ,  $R = I$ .由于文献[17]考虑转移概率部分未知的情形,当转移概率完全已知时,只需将文献[17]中的 $\mathcal{N}_k^i$ 用 $\mathcal{N}$ 代替.固定 $c_2$ 的值,利用本文方法求解优化问题(30),当 $c_2 > 23$ 时存在可行解.通过 $c_2$ 取不同的值可以得到 $\gamma$ 随 $c_2$ 变化曲线如图1中的虚线,对应的利用文献[17]求得全频段 $\gamma$ 优化值曲线为图1中实线.从图中可以明显看出,取相同的 $c_2$ 值时本文可获得更小的 $\gamma$ 值,即针对特定频段的滤波算法相比较于全频域的滤波方法,具有更强的干扰抑制能力.

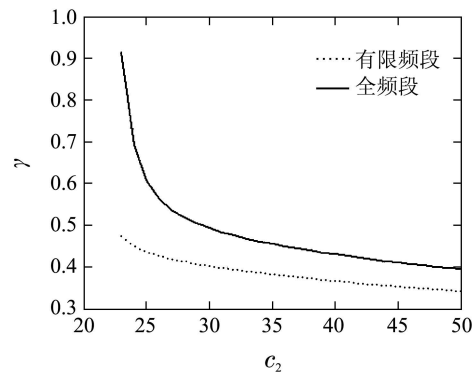


图1  $\gamma$ 随 $c_2$ 变化曲线图

Fig. 1 The curve of  $\gamma$  over  $c_2$  changes

以 $c_2 = 25$ 为例, 利用本文方法求得最优 $\gamma$ 值为 $\gamma = 0.4349$ , 滤波器参数

$$A_{f1} = \begin{bmatrix} -0.1795 & 0.8276 \\ 0.3091 & -0.3727 \end{bmatrix},$$

$$A_{f2} = \begin{bmatrix} 0.1364 & 0.0227 \\ 0.4907 & -0.1017 \end{bmatrix},$$

$$B_{f1} = \begin{bmatrix} 1.2478 \\ -1.0391 \end{bmatrix}, B_{f2} = \begin{bmatrix} 0.4530 \\ 0.1633 \end{bmatrix},$$

$$C_{f1} = [-0.4287 \ 0.0189],$$

$$C_{f2} = [-0.5445 \ -0.7553].$$

根据文献[17]求解出最优 $\gamma$ 值为 $\gamma = 0.6076$ , 滤波器参数

$$A_{f1} = \begin{bmatrix} -0.0380 & 0.8677 \\ 0.0139 & -0.3160 \end{bmatrix},$$

$$A_{f2} = \begin{bmatrix} 0.0496 & 0.0115 \\ 0.5426 & 0.1259 \end{bmatrix},$$

$$B_{f1} = \begin{bmatrix} 0.7607 \\ -1.7630 \end{bmatrix}, B_{f2} = \begin{bmatrix} 0.8969 \\ -1.0116 \end{bmatrix},$$

$$C_{f1} = [-0.2372 \ 0.0086],$$

$$C_{f2} = [-0.2785 \ -0.2841].$$

将求得的两组滤波器带入滤波误差系统(3), 图2为系统的模态转移及误差响应曲线图. 其中点划线为本文求得的滤波器误差响应曲线, 实线为文献[17]求得的滤波器误差响应曲线. 从图2可以看出, 两组滤波器都能使误差最终趋于零, 但本文设计的滤波器具有更小的输出误差, 即具有更好的扰动抑制能力.

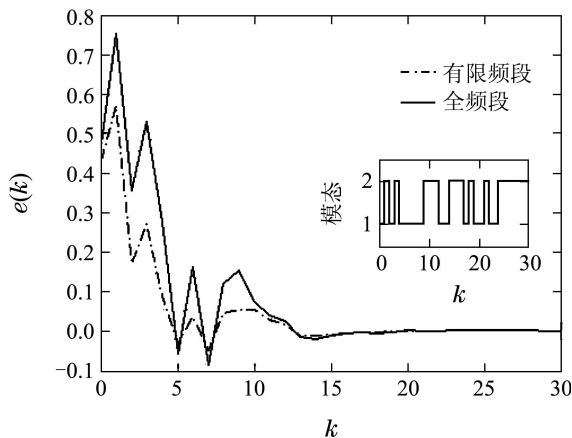


图2 跳变模态及误差响应曲线

Fig. 2 Jump modes and error response

更进一步, 以 $\gamma$ 为变量, 用本文的方法求解优化问题(31), 并与文献[17]进行比较. 表2给出了 $\gamma$ 取不同值时对应的 $c_2$ 值, 可见取同样的 $\gamma$ 时, 本文得到的 $c_2$ 值较

小. 由此说明基于特定频段的H<sub>∞</sub>滤波方法具有更小的保守性.

表2 最小的 $c_2$ 值  
Table 2 The minimum value of  $c_2$

$\gamma$	1	1.5	2	2.5	3
本文 $c_2$	26.23	41.22	63.27	91.86	126.89
文献[17] $c_2$	30.58	50.15	78.43	114.98	159.72

### 5 结论(Conclusions)

本文从时间和频率两个角度, 针对离散时间Markov跳变系统, 以低频段为例, 结合有限短时间理论, 给出了有限频段和有限时间两尺度H<sub>∞</sub>滤波器设计的具体方法. 仿真结果表明, 与全频段滤波方法相比, 该方法具有更好的扰动抑制能力及更小的保守性. 所得结果可进一步应用到不确定或带时滞的离散Markov跳变系统.

### 参考文献(References):

- [1] XIE L, SOUZA C E, FU M. H<sub>∞</sub> estimation for discrete-time linear uncertain systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1991, 1(2): 11 – 23.
- [2] PALHARES R M, PERES P L. Robust H<sub>∞</sub> filtering design with pole placement constraint via linear matrix inequalities [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1999, 102(2): 239 – 261.
- [3] LI H, FU M. A linear matrix inequality approach to robust H<sub>∞</sub> filtering [J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 1997, 45(9): 2338 – 2350.
- [4] XU S Y, CHEN T. Reduced-order H<sub>∞</sub> filtering for stochastic systems [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(8): 2998 – 3007.
- [5] FENG X B, LOPARO K A, JI Y D, et al. Stochastic stability properties of jump linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(1): 38 – 53.
- [6] DU B Z, LAM J, ZOU Y. Stability and stabilization for Markovian jump time-delay systems with partially unknown transition rates [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2013, 60(2): 341 – 351.
- [7] COSTA O L V, FRAGOSO M D, MARQUES R P. *Discrete Time Markov Jump Linear Systems* [M]. London: Springer, 2005.
- [8] ZHANG L X, BOUKAS E K. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities [J]. *Automatica*, 2009, 45(2): 463 – 468.
- [9] LUAN X L, ZHAO S Y, LIU F. H<sub>∞</sub> control for discrete-time Markov jump systems with uncertain transition probabilities [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(6): 1566 – 1572.
- [10] SHI P, BOUKAS E K. Kalman filtering for continuous-time uncertain systems with Markovian jumping parameters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(8): 1592 – 1597.
- [11] LIU H P, HO D, SUN F. Design of H<sub>∞</sub> filter for Markov jumping linear systems with non-accessible mode information [J]. *Automatica*, 2008, 44(10): 2655 – 2660.
- [12] XU S Y, CHEN T W, LAM J. Robust H<sub>∞</sub> filtering for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(5): 900 – 907.
- [13] SHI P, MAHOUD M, NGUANG S K, et al. Robust filtering for jumping systems with mode-dependent delays [J]. *Signal Processing*, 2006, 86 (1): 140 – 152.

- [14] ASSAWINCHAICHOTE W, NGUANG S K, SHI P. Robust  $H_\infty$  fuzzy filter design for uncertain nonlinear singularly perturbed systems with Markovian jumps: an LMI approach [J]. *Information Sciences*, 2007, 177(4): 1699 – 1714.
- [15] LUAN X L, LIU F, SHI P. Finite-time  $H_\infty$  filtering for nonlinear stochastic systems with partially known transition jump rates [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2010, 4(5): 735 – 745.
- [16] ZHANG L X, BOUKAS E K. Mode-dependent  $H_\infty$  filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities [J]. *Automatica*, 2009, 45(6): 463 – 468.
- [17] CHENG J, ZHU H Z, ZHANG S M, et al. Finite-time  $H_\infty$  filtering for discrete-time Markovian jump systems with partly unknown transition probabilities [J]. *Canadian Journal of Physics*, 2013, 91(8): 1020 – 1028.
- [18] IWASAKI T, HARA S. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 41 – 59.
- [19] WANG H, JU H, WANG Y L. Finite frequency  $H_\infty$  filtering for switching LPV systems [C] // *The 24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. Taiyuan: IEEE, 2012, 5: 4008 – 4013.
- [20] 李贤伟. 时滞系统的有限频域 $H_\infty$ 滤波分析与综合 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011.  
(LI Xianwei. *Finite frequency  $H_\infty$  filtering analysis and synthesis for time-delay systems* [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2011.)
- [21] WANG H, YANG G H.  $H_\infty$  filter design for uncertain discrete-time systems in finite frequency domain [C] // *The 16th IEEE International Conference on Control Applications*. Singapore: IEEE, 2007, 10: 1000 – 1005.
- [22] IWASAKI T, SKELTON R E. All controllers for the general  $H_\infty$  control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. *Automatica*, 1994, 30(5): 1307 – 1317.
- [23] ZONG G D, HOU L L, WU Y Q. Robust  $l_2-l_\infty$  guaranteed cost filtering for uncertain discrete-time switched system with mode-dependent time-varying delays [J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2011, 30(1): 17 – 33.

#### 作者简介:

**赵长钟** (1988–), 男, 硕士研究生, 研究方向为混杂系统及鲁棒控制, E-mail: changzhongzhao@163.com;

**栾小丽** (1979–), 女, 博士, 副教授, 研究方向为复杂系统的鲁棒控制及应用, E-mail: xlluan@jiangnan.edu.cn;

**刘飞** (1965–), 男, 博士, 教授, 研究方向为先进过程控制理论及应用, E-mail: fliu@jiangnan.edu.cn.