

## 卫星控制系统离散积分滑模容错控制

段文杰, 王大轶<sup>†</sup>, 刘成瑞

(北京控制工程研究所, 北京 100190; 2. 空间智能控制技术重点实验室, 北京 100190)

**摘要:** 卫星控制系统是采样控制系统, 对它来讲, 不确定性离散系统容错控制方法非常重要. 本文提出了一种离散积分滑模容错控制方案, 用于调节动量轮有故障的卫星姿态, 其主要部分是设计控制器和控制分配方法. 本文对含有匹配和不匹配的确定性的离散多输入多输出系统, 设计了一种离散积分滑模控制器, 分析了匹配的和 mismatch 的不确定性对闭环系统稳定性的影响, 得出了系统状态的界. 应用可达集方法确定控制分配方案时, 本文改变可达集表面的搜索顺序, 提高了求解速度. 以五动量轮卫星模型为例, 将本文方法应用于含多故障、健康因子不准确、匹配不确定性和不匹配不确定性的卫星控制系统中, 理论和仿真的结果一致.

**关键词:** 卫星; 滑模; 容错控制; 不确定性; 健康因子

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## Discrete-time integral sliding-mode fault-tolerant controller for satellite control system

DUAN Wen-jie, WANG Da-yi<sup>†</sup>, LIU Cheng-rui

(1. Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China;

2. Science and Technology on Space Intelligent Control Laboratory, Beijing 100190, China)

**Abstract:** Satellite control systems are sample-data control systems, to which the method for designing the discrete-time fault-tolerant controller with uncertainties is of great significance. A discrete-time integral sliding-mode fault-tolerant control approach is proposed for regulating the attitude of a satellite with reaction wheel faults. The major portion of this approach includes the controller design and the control allocation. A discrete-time integral sliding-mode controller is thus developed for discrete-time MIMO linear time-invariant (LTI) systems, in which the matched and unmatched uncertainties are considered for closed-loop stability, and the final boundaries of system states are determined. In determining the control allocation based on the attainable moment space (AMS), the facets of the AMS is rearranged for reducing the calculation. This approach is applied to the simulation of a five-wheel satellite with multi-faults, inaccurate efficiency factors, matched and unmatched uncertainties. Simulation and analysis results are almost in coincidence with each other.

**Key words:** satellite; sliding-mode; fault-tolerant control; uncertainties; efficiency factor

### 1 引言(Introduction)

由于卫星控制系统结构复杂、空间未知干扰多、生产工艺水平有限等, 在轨故障难以避免. 研究容错控制方法对降低故障影响, 提高运行可靠性和延长卫星寿命有重大意义.

故障的检测、隔离和诊断(fault detection and diagnosis, FDD)是主动容错控制的基础<sup>[1-3]</sup>. 研究可重构控制方法, 通常假设故障已经被隔离和确定. 对于充分冗余的过驱动系统, 控制分配<sup>[4-7]</sup>可以在FDD的基础上对故障的被控系统重新分配虚拟控制率, 而不用改变控制算法. 因此, 控制分配经常和其他的控制方法共同使用, 以用于处理故障<sup>[8]</sup>. H. Alwi等<sup>[9-11]</sup>设计

了包含控制分配、积分滑模控制和健康因子辨识的容错控制方法, 并应用于飞机舵面控制, 但是他们的研究中未考虑不确定性的影响.

对于卫星控制系统, 不确定性是影响闭环系统稳定的重要因素, 产生的原因包括建模不精确、未知干扰、柔性附件、FDD诊断结果不精确等. 容错控制算法设计中需要考虑不确定性的影响, 设计鲁棒性强的控制器. 滑模方法对匹配的不确定性具有很强的鲁棒性, 但是系统未进入滑模动态前, 稳定性无法保证. 积分滑模控制方法<sup>[12]</sup>的提出解决这一个问题. 积分项的引入使得系统初始状态就落在滑模面上, 从而在控制系统开始运行时就能抵消未知干扰影响, 增强了控制

律的鲁棒性. 近些年, 很多学者重点研究了含不匹配不确定性时采用积分滑模控制律的滑模面存在性和系统稳定性问题<sup>[13-17]</sup>, 设计的控制器在抵消匹配不确定性影响的同时, 可以不使得不匹配不确定性的影响增大.

大部分实际控制系统是采用控制系统, 故障的诊断和隔离也是基于采用控制系统. 离散积分滑模的研究具有实际意义, 但是目前这方面的研究还较少. 文献[18]研究采样系统的滑模控制的边界层, 对于经典滑模控制方法, 采用等价控制原理, 系统最终稳态精度为 $O(T)$ . 文献[19]研究离散积分滑模控制的状态调节问题, 实现了 $O(T^2)$ 的稳态误差. 文献[20]研究设计积分滑模控制器解决含匹配不确定系统控制问题. 文献[21]研究含不匹配不确定的单输入系统的积分滑模控制问题. 对于含不匹配不确定性的离散多输入多输出系统的离散积分滑模控制器方面, 有待进一步研究.

基于以上问题, 本文以含冗余动量轮卫星为研究对象, 设计了一种包含离散积分滑模控制律、控制分配和健康因子辨识的容错控制方法. 其中, 面向离散多输入多输出系统, 设计了离散积分滑模控制器, 证明了系统的稳定性, 并且给出了系统状态变量的界. 对于控制分配, 本文改进了基于可达集的直接分配方法, 通过可达集表面的重新排序, 提高了控制分配的求解速度. 该容错控制方法可以有效处理卫星多故障、健康因子不准确、匹配不确定性等问题, 并且分析了不匹配不确定性对稳定性的影响.

本文余下内容安排如下: 第2节描述研究对象, 介绍不确定性、健康因子不准确和系统离散化等问题; 第3节介绍离散积分滑模控制器和控制分配方法; 第4节通过一个五动量轮卫星模型为例, 验证了本文方法; 第5节给出了本文内容的总结.

## 2 问题的数学描述(Problem formulation)

含动量轮的航天器系统动力学模型为

$$\begin{cases} I_x \ddot{\phi} + [(I_y - I_z)\omega_0^2 - \omega_0 h_y(t)\dot{\phi} + \\ [(I_y - I_z - I_x)\omega_0 - h_y(t)]\dot{\psi} = \\ -\dot{h}_x(t) + \omega_0 h_z(t), \\ I_y \ddot{\theta} + h_x(t)(\dot{\psi} + \omega_0 \phi) - \\ h_z(t)(\dot{\phi} - \omega_0 \psi) = -\dot{h}_y(t), \\ I_z \ddot{\psi} + [(I_y - I_x)\omega_0^2 - \omega_0 h_y(t)]\psi - \\ [(I_y - I_z - I_x)\omega_0 - h_y(t)]\dot{\phi} = \\ -\dot{h}_z(t) - \omega_0 h_x(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $I_x$ ,  $I_y$ 和 $I_z$ 为卫星3个轴的转动惯量;  $\omega_0$ 为卫星轨道角速度;  $h_x(t)$ ,  $h_y(t)$ 和 $h_z(t)$ 为动量轮系统总角动量在3个轴向的分量;  $\dot{h}_x(t)$ ,  $\dot{h}_y(t)$ 和 $\dot{h}_z(t)$ 为动量轮系统总角动量变化律在3个轴向的分量;  $\phi$ ,  $\theta$ 和 $\psi$ 分别为卫星姿态滚动角、俯仰角和偏航角;  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\psi}$ 为相应姿态角速度.

卫星有 $p$ 个动量轮, 角动量记为 $\mathbf{h}(t) \in \mathbb{R}^p$ , 动量轮角动量积分方程为

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_0 + \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{h}}(\tau) d\tau. \quad (2)$$

式(1)写成状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = & A_1^{-1}(A_2 + \Delta A)\mathbf{x}(t) + \\ & A_1^{-1}B_1\mathbf{v}_1(t) + A_1^{-1}\boldsymbol{\xi}_1(t) = \\ & A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{v}_1(t) + \boldsymbol{\xi}_0(t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $A_1 = \text{diag}\{[1 \ I_x \ 1 \ I_y \ 1 \ I_z]\}$ ,  $A = A_1^{-1}A_2$ ,  $B = A_1^{-1}B_1$ ,  $\boldsymbol{\xi}_0(t) = A_1^{-1}\boldsymbol{\xi}_1(t) + A_1^{-1}\Delta A\mathbf{x}(t)$ ,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(I_y - I_z)\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (I_y - I_z - I_x)\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & -(I_y - I_z - I_x)\omega_0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ -(I_y - I_x)\omega_0^2 & 0 & & \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_0 h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & h_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0 h_x & h_z & 0 & 0 & -h_z \omega_0 & -h_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_y & 0 & 0 & \omega_0 h_y & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{v}(t) = -[\dot{h}_x(t) \ \dot{h}_y(t) \ \dot{h}_z(t)]^T = -B_0 \dot{\mathbf{h}}(t),$$

$$\boldsymbol{\xi}_1(t) = [0 \ \omega_0 h_z(t) \ 0 \ 0 \ 0 \ -\omega_0 h_x(t)]^T,$$

$$\mathbf{x} = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]^T.$$

在式(3)添加不确定性 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 和健康因子 $W(t)$ 为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{v}(t) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^q$ 为虚拟控制律, 且 $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_1(t) + B^+ \boldsymbol{\xi}_0 = B_0 W(t) \mathbf{u}(t) + B^+ \boldsymbol{\xi}_0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $B_0 \in \mathbb{R}^{q \times p}$ 为动量轮安装矩阵;  $W(t) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 为健康因子矩阵,  $W(t) = \text{diag}\{w_1(t), w_2(t), \dots, w_p(t)\}$ ,  $w_i(t)$ 为第 $i$ 个动量轮的健康因子;  $\mathbf{u}(t) = -\dot{\mathbf{h}}(t) \in \mathbb{R}^p$ 为动量轮输出力矩向量;  $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为不确定性. 对于第 $j$ 个动量轮,  $w_j(t) = 1$ ,  $w_j(t) = 0$ 和 $0 < w_j(t) < 1$ 分别表示第 $j$ 个执行机构处于健康、完全故障和比例故障状态.

定义  $q_0$  是卫星系统的自由度, 对式(4),  $q = q_0, p \geq q_0$ .

**假设 1**  $\text{rank}(W) \geq q$ .

假设1保证了系统的可控性. 当故障发生时, 系统仍然具有足够数量的冗余执行机构保证系统可控. 本文不考虑当  $\text{rank}(W) < q_0$  时的欠驱动控制问题.

$B$  是列满秩的矩阵 ( $n > p$ ), 空间  $I_n$  可以按行空间划分为  $B$  空间和  $B^\perp$  空间, 用公式表示为

$$BB^+ + B^\perp(B^\perp)^+ = I_n. \quad (5)$$

本文中  $B^\perp$  为

$$B^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (6)$$

因此,  $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$  可以表示为

$$\xi(t) = BB^+\xi(t) + B^\perp(B^\perp)^+\xi(t). \quad (7)$$

定义  $\xi_m(t) \in \mathbb{R}^p$  为匹配的不确定性,  $\xi_u(t) \in \mathbb{R}^n$  为不匹配的不确定性, 可得

$$\begin{cases} \xi_m(t) = B^+\xi(t), \\ \xi_u(t) = B^\perp(B^\perp)^+\xi(t). \end{cases} \quad (8)$$

由式(7)–(8)有

$$\xi(t) = B\xi_m(t) + \xi_u(t). \quad (9)$$

**假设 2**  $\xi_m(t)$  和  $\xi_u(t)$  是光滑和有界的, 表示如下:

$$\begin{cases} 0 \leq \|\xi_m(t)\| \leq \delta_m < \infty, \\ 0 \leq \|\xi_u(t)\| \leq \delta_u < \infty. \end{cases} \quad (10)$$

图1是容错控制的流程图. 其中, 控制器设计和考虑健康因子的控制分配是本文方法的重要组成部分. 对于卫星控制系统, 健康因子  $W(t)$  可以通过动量轮转速数据实时得到, 然后控制分配算法根据健康因子重新分配控制律. 至于其他系统, 可以根据滑模观测器<sup>[2]</sup>等方法计算健康因子. 本文没有深入研究健康因子的辨识算法, 而是讨论了健康因子不准确的情况.

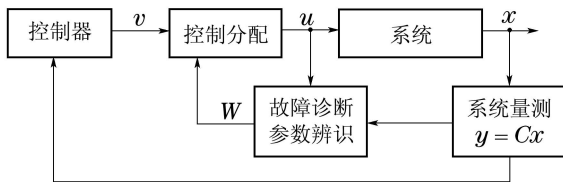


图1 容错控制流程图

Fig. 1 Fault-tolerant control flowchart

Alwi等人<sup>[9]</sup>提出第  $i$  个执行机构健康因子  $w_i$  和估计的健康因子  $\hat{w}_i$  之间的关系为

$$w_i(t) = (1 - \delta_i(t))\hat{w}_i(t), \quad (11)$$

其中:  $\delta_i(t)$  为诊断给出的健康因子的不准确程度,  $\delta_i(t) \in [0, 1]$ . 根据式(11), 当  $\hat{w}_i(t) = 0$ , 不论  $\delta_i(t)$  为

何值, 可以推出  $w_i(t) = 0$ . 而实际当  $\hat{w}_i(t) = 0$  且  $\delta_i(t) \neq 0$  时,  $w_i(t)$  可能不等于0, 此时式(11)不准确.

根据误差形式

$$\delta_i(t) = \hat{w}_i(t) - w_i(t). \quad (12)$$

笔者提出健康因子的表达式为

$$W(t) = \hat{W}(t) - \delta(t), \quad (13)$$

其中  $\delta(t) = \text{diag}\{\delta_1(t) \delta_2(t) \cdots \delta_p(t)\}$ .

将式(13)代入到式(4)可得

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv'(t) + \xi'(t), \quad (14)$$

其中:  $v'(t) = B_0\hat{W}(t)u(t) + B^+\xi_0$ ,  $\xi'(t) = \xi(t) - BB_0\delta(t)u(t)$ .

显而易见, 式(14)和式(4)形式相同. 在下文中, 按匹配的不确定性处理  $\delta(t)$ . 为了表述简单, 下文将变量后面的时间参数 ( $t$ ) 省略, 直接用  $x, v, \delta, W$  等表示.

文献[18–19, 21]采用高阶泰勒公式离散化含不确定性的线性系统. 然而高阶离散化需要未知的不确定性的各阶导数信息, 而这些信息是不可能知道的. 基于此点, 本文采用了欧拉离散化方法, 采样时间为  $T$ , 离散化的系统方程为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma v_k + d_k = \\ &= \Phi x_k + \Gamma(v_k + \xi_{m,k}) + T\xi_{u,k}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中:  $\Phi = I + AT$ ,  $\Gamma = BT$ ,  $d_k = d_{m,k} + d_{u,k} = B\xi_{m,k}T + \xi_{u,k}T$ .

### 3 容错控制方法 (Fault-tolerant control method)

容错控制的流程图如图1所示, 本节详细介绍了控制器和控制分配算法.

#### 3.1 控制器设计 (Controller design)

式(15)中不考虑不确定性, 为

$$x_{0,k+1} = \Phi x_{0,k} + \Gamma v_{0,k}. \quad (16)$$

基于极点配置方法如下设计反馈控制律  $K_0$ :

$$v_{0,k} = -K_0 x_{0,k}. \quad (17)$$

将式(17)代入到式(16)中, 可得

$$x_{0,k+1} = (\Phi - \Gamma K_0)x_{0,k}, \quad (18)$$

其中通过设计  $K_0$  使得  $(\Phi - \Gamma K_0)$  的特征值在单位圆中, 保证系统的稳定性.

定义状态误差为

$$e_k = x_k - x_{0,k}. \quad (19)$$

由式(15)和式(18)相减, 可得

$$e_{k+1} = \Phi e_k + \Gamma(v_{1,k} + \xi_{m,k}) + T\xi_{u,k}, \quad (20)$$

其中  $v_{1,k} = v_k - v_{0,k}$ . 设计控制律  $v_k = v_{0,k} + v_{1,k}$  使得闭环系统稳定, 并消除  $e_k$ . 把式(15)中的不确定

性项也看成是输入, 则式(15)与式(16)可看成一个系统, 输入输出不同. 式(16)是稳定的, 根据线性关系, 式(15)与式(20)的稳定性一致.

离散积分滑模面定义如下:

$$\begin{cases} \sigma_{k+1} = G(e_{k+1} - e_0) + \varepsilon_{k+1}, \\ \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + Ee_k, \end{cases} \quad (21)$$

其中:  $\sigma_{k+1} \in \mathbb{R}^q$ ,  $E = -G(\Phi - I - \Gamma K_0)$ ,  $G \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $G$ 的选取时要使得 $G\Gamma$ 可逆.

由式(21)可得

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1} &= G(e_{k+1} - e_0) + \sigma_k - \\ &G(e_k - e_0) + Ee_k. \end{aligned} \quad (22)$$

将式(20)代入到式(22)中, 可得

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1} &= (G\Phi - G + E)e_k + G\Gamma v_{1,k} + \\ &G\Gamma \xi_{m,k} + G\Gamma \xi_{u,k} + \sigma_k. \end{aligned} \quad (23)$$

因为 $E = -G(\Phi - I - \Gamma K_0)$ , 所以有

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1} &= G\Gamma K_0 e_k + G\Gamma v_{1,k} + G\Gamma \xi_{m,k} + \\ &G\Gamma \xi_{u,k} + \sigma_k. \end{aligned} \quad (24)$$

通过计算 $\sigma_{k+1} = 0$ 可得

$$\begin{aligned} v_{1,k} &= -(G\Gamma)^{-1}[G\Gamma K_0 e_k + G\Gamma \xi_{m,k} + \\ &G\Gamma \xi_{u,k} + \sigma_k]. \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)中,  $\xi_{m,k}$ 和 $\xi_{u,k}$ 未知. 根据文献[18], 不确定性可以按照如下的方法估计:

$$\hat{d}_k = d_{k-1} = x_k - \Phi x_{k-1} - \Gamma v_{k-1}. \quad (26)$$

进而可得

$$\begin{cases} \hat{\xi}_{m,k} = B^+ \hat{d}_k / T, \\ \hat{\xi}_{u,k} = B^-(B^+)^+ \hat{d}_k / T. \end{cases} \quad (27)$$

所以式(25)可写为

$$\begin{aligned} v_{1,k} &= -(G\Gamma)^{-1}[G\Gamma K_0 e_k + \\ &G\Gamma \hat{\xi}_{m,k} + G\Gamma \hat{\xi}_{u,k} + \sigma_k]. \end{aligned} \quad (28)$$

由式(17)和式(28)可得控制律 $v_k$ 为

$$\begin{aligned} v_k &= v_{0,k} + v_{1,k} = \\ &-K_0 x_k - \hat{\xi}_{m,k} - (G\Gamma)^{-1} G\Gamma \hat{\xi}_{u,k} - (G\Gamma)^{-1} \sigma_k. \end{aligned} \quad (29)$$

将式(28)代入到式(24), 可得

$$\sigma_{k+1} = G\Gamma(\xi_{m,k} - \hat{\xi}_{m,k}) + G\Gamma(\xi_{u,k} - \hat{\xi}_{u,k}). \quad (30)$$

由假设2,  $\xi_m$ 和 $\xi_u$ 是连续有界的, 所以 $(\xi_{m,k} - \hat{\xi}_{m,k}) = (\xi_{m,k} - \xi_{m,k-1}) = O(T)$ ,  $(\xi_{u,k} - \hat{\xi}_{u,k}) = (\xi_{u,k} - \xi_{u,k-1}) = O(T)$ .

因为 $\Gamma = BT$ , 所以有

$$\sigma_{k+1} = O(T^2). \quad (31)$$

式(30)后退一步, 可得

$$\begin{aligned} \sigma_k &= G\Gamma(\xi_{m,k-1} - \hat{\xi}_{m,k-1}) + \\ &G\Gamma(\xi_{u,k-1} - \hat{\xi}_{u,k-1}). \end{aligned} \quad (32)$$

将式(32)代入到式(29), 得

$$v_k = -K_0 x_k + Q_{1,k}, \quad (33)$$

其中:  $Q_{1,k} = -\hat{\xi}_{m,k} - (G\Gamma)^{-1} G\Gamma \hat{\xi}_{u,k} - (\xi_{m,k-1} - \hat{\xi}_{m,k-1}) - (G\Gamma)^{-1} G\Gamma(\xi_{u,k-1} - \hat{\xi}_{u,k-1})$ .

将式(33)代入到式(15), 可以得到闭环系统方程

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\Phi - \Gamma K_0) x_k + (I - \\ &\Gamma(G\Gamma)^{-1} G) T \xi_{u,k} + Q_k T, \end{aligned} \quad (34)$$

且

$$\begin{aligned} Q_k &= B(\xi_{m,k} - \hat{\xi}_{m,k}) - B(\xi_{m,k-1} - \hat{\xi}_{m,k-1}) + \\ &\Gamma(G\Gamma)^{-1} G(\xi_{u,k} - \hat{\xi}_{u,k}) - \\ &\Gamma(G\Gamma)^{-1} G(\xi_{u,k-1} - \hat{\xi}_{u,k-1}). \end{aligned} \quad (35)$$

由假设2可得 $Q_k = O(T)$ .

从式(34)可知, 不匹配的不确定性不能被补偿, 它的大小和特性将影响系统的稳定性, 此分析结论和文献[1]结果一致.

下面具体分析匹配不确定性和两种不确定性存在时闭环系统姿态调节精度.

定义 $\Phi_0 = (\Phi - \Gamma K_0)$ ,  $\Phi_1 = (I - \Gamma(G\Gamma)^{-1} G)$ , 式(34)可以写为

$$x_{k+1} = \Phi_0 x_k + \Phi_1 \xi_{u,k} T + Q_k T. \quad (36)$$

式(36)的解为

$$x_k = \Phi_0^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_0^i \Phi_1 \xi_{u,k} T + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_0^i Q_k T. \quad (37)$$

为了简便分析式(37), 定义如下假设.

**假设3** 所有的 $\Phi_0$ 的特征值都是非零和彼此不同的, 并且通过极点配置实现 $|\lambda_i| < 1$ .

由假设3,  $\Phi_0$ 可以表示为

$$\Phi_0 = PJP^{-1}, \quad (38)$$

其中:  $J = \text{diag}\{\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n\}$ ,  $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ .

将式(38)代入到式(37), 可得

$$\begin{aligned} x_k &= PJ^k P^{-1} x_0 + TP \sum_{i=0}^{k-1} J^i P^{-1} \Phi_1 \xi_{u,k} + \\ &TP \sum_{i=0}^{k-1} J^i P^{-1} Q_k. \end{aligned} \quad (39)$$

从式(39)可得

$$\begin{aligned} \|x_k\| &\leq T \left( \sum_{i=0}^{k-1} \|J\|^i \|\Phi_1\| \|\xi_{u,k}\| + \right. \\ &\left. \sum_{i=0}^{k-1} \|J\|^i \|Q_k\| \right). \end{aligned} \quad (40)$$

注意,  $\|J\| = \lambda_1$ ,  $\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\xi_{u,k}\| \leq \delta_u$ .

**假设4**  $\Phi_1 \leq 1$ .

选择合理的 $G$ , 可以实现假设4.

$\max(\|Q_k\|) = Q_{k,\max}$ , 式(40)可以写为

$$\|x_k\| \leq T(\|\xi_{u,k}\| + Q_{k,\max}) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \leq \frac{\delta_u + Q_{k,\max} T}{1 - \lambda_1} T. \quad (41)$$

从式(41)可知,  $x_k$ 的上界由 $\xi_u$ 决定.

讨论 $\xi_u$ 两种情况:

1)  $\xi_{u,k} \in L_2 \cap L_\infty$ .

此时, 当 $k \rightarrow \infty$ ,  $\xi_{u,k} \rightarrow 0$ ,  $Q_k = O(T)$ ,  $x_{k+1} = (\Phi - \Gamma K_0)x_k + O(T^2)$ , 易得系统稳定, 且

$$x_k = O(T^2). \quad (42)$$

$\xi_{u,k} = \bar{0}$ 是这种情况的一个特例, 闭环姿态调节系统最终精度为 $O(T^2)$ .

2)  $\xi_{u,k} \in L_\infty$ .

此时, 由式(41)可知系统有界稳定, 且有

$$\|x_k\| \leq \frac{\delta_u + Q_{k,\max} T}{1 - \lambda_1}. \quad (43)$$

### 3.2 控制分配(Control allocation)

冗余对容错控制是非常重要的, 系统的可重构性取决于系统的冗余程度. 当诊断出各个执行机构的效率因子后, 控制分配可以将虚拟控制律重新分配到各个执行机构上. 控制分配为已知虚拟控制律 $v$ , 求解控制力矩 $u$ 的过程,

$$v = B_0 \hat{W} u. \quad (44)$$

本节采用基于力矩可达集(Attainable Moment Space, AMS)的直接方法求解式(44), 该方法的解空间可以充满整个可达集中. 定义 $F = B_0 \hat{W}$ , 在线诊断获得 $\hat{W}$ 后, 就可以实时得到 $F$ . 基于可达集的解法主要分为两步, 首先建立可达集, 找到所有可达集表面, 然后寻找相交面确定解向量. 原来的算法, 相交面的搜索过程是按照建立的过程排列的, 按照此顺序搜索的时间就可能很长. 为了提高求解速度, 可以将可达集表面预先排队. 基于以上的思路, 控制分配的过程可以总结为:

① 计算AMS.

$F$ 可以按照列向量表示为 $F = (F_1, F_2, \dots, F_q)$ . 对于每两个 $(F_i, F_j)$ , 可以确定一组平行的边界面,  $s_{ij}$ 和 $s_{ji}$ . 所有的边界面组成了边界集合 $\partial\Phi_T$ , 共有 $q \times (q - 1)$ 个平面.

下面介绍如何计算 $s_{ij}$ .

首先, 计算法向量

$$n_{ij} = F_i \times F_j. \quad (45)$$

其次, 确定平面 $s_{ij}$ 的表达式:

$$m_{ij} = \sum_{k=1, k \neq i, j}^q m_{k,\max}, \quad (46)$$

其中

$$m_{k,\max} = \begin{cases} F_k u_{k,\max}, & F_k^T n_{ij} > 0, \\ F_k u_{k,\min}, & F_k^T n_{ij} < 0, \end{cases}$$

$u_{k,\max}$ 和 $u_{k,\min}$ 是第 $k$ 个执行机构的输出力矩的最大值和最小值.

然后,  $s_{ij}$ 的4个顶点坐标表示为

$$v_{ij} = m_{ij} + F_i \begin{bmatrix} u_{i,\min} \\ u_{i,\min} \\ u_{i,\max} \\ u_{i,\max} \end{bmatrix} + F_j \begin{bmatrix} u_{j,\min} \\ u_{j,\max} \\ u_{j,\max} \\ u_{j,\min} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

按照计算 $s_{ij}$ 顶点坐标的方法, 计算出所有边界面的顶点坐标, 就确定了边界AMS所有的边界面.

② 排序.

为了快速确定相交面, 提出将可达集表面按照各个可达集表面法向量 $n_{ij}$ 和虚拟控制律 $v$ 之间的夹角从小到大的顺序排列. 该排序的指标为

$$\mu_{ij} = \frac{n_{ij} v}{|n_{ij}| |v|}, \quad (48)$$

其中 $\mu_{ij}$ 是可达集表面法向量 $n_{ij}$ 和虚拟控制律 $v$ 之间的夹角的余弦值,  $\mu_{ij}$ 越小, 可达集表面法向量 $n_{ij}$ 和虚拟控制律 $v$ 之间的夹角越小.

③ 计算力矩.

对于每个可达集表面, 依次如下计算:

$$\alpha_3 v = \alpha_1 F_i (u_{i,\max} - u_{i,\min}) + \alpha_2 F_j (u_{j,\max} - u_{j,\min}) + vt_{ij,1}, \quad (49)$$

其中:  $\alpha_1, \alpha_2$ 和 $\alpha_3$ 是3个判断参数,  $vt_{ij,1}$ 是 $s_{ij}$ 的第1个顶点坐标.

如果 $\alpha_3 > 0$ ,  $\alpha_1 \in [0, 1]$ ,  $\alpha_2 \in [0, 1]$ , 此时 $s_{ij}$ 就是目标的相交表面.

力矩如下计算:

$$u_b = u_{ij} + \alpha_1 (u_{i,\max} - u_{i,\min}) + \alpha_2 (u_{j,\max} - u_{j,\min}). \quad (50)$$

如果 $\alpha_3 \geq 1$ , 控制量 $u = u_b / \alpha_3$ . 如果 $\alpha_3 < 1$ , 则 $u_b$ 超出了可达集包络, 取 $u = u_b$ , 为执行机构能提供的最大控制力矩. 此时为输出饱和, 控制分配的解落在目标向量和可达集的相交表面上, 指向目标向量方向.

**注1** 本文的动量轮的健康因子可以通过动量轮的转速信息而实时计算出, 此控制分配方法适用于力矩的分配问题.

### 4 仿真(Simulations)

#### 4.1 模型参数(Satellite parameters)

仿真一个含5动量轮卫星,  $I_x = 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $I_y = 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $I_z = 180 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $T_{\text{orbit}} = 10 \text{ h}$ ,  $\omega_0 = 2\pi/3600T_{\text{orbit}}$ ,  $T = 0.01 \text{ s}$ . 5个动量轮安装在正五棱锥的5个棱上, 安装角为  $\theta = 37.6^\circ$ , 安装矩阵为

$$B_0 = \begin{bmatrix} c\theta & c\theta c2\alpha & c\theta c3\alpha & c\theta c4\alpha & c\theta c5\alpha \\ 0 & c\theta s2\alpha & c\theta s2\alpha & c\theta s4\alpha & c\theta s5\alpha \\ s\theta & s\theta & s\theta & s\theta & s\theta \end{bmatrix}, \quad (51)$$

其中:  $s$ 和 $c$ 分别代表 $\sin$ 和 $\cos$ ,  $\alpha = 72^\circ$ .

仿真时基于式(26)和式(27)估计不确定性; 基于式(21)计算滑模参数; 然后就可以计算控制律(29); 求解控制分配过程(44), 就可以计算出控制力矩 $u$ . 下面给出两个仿真算例.

#### 4.2 仿真算例(Simulation results)

下面仿真存在多故障、健康因子不确定性、匹配不确定性和不匹配的不确定性时的卫星系统. 分别讨论两种不匹配的不确定性:  $\xi_{u1} \in L_2 \cap L_\infty$ ,  $\xi_{u2} \in L_2$ .

##### Case 1 匹配的不确定性为

$$\xi_m = [0.05 \sin(-2\pi t) \ 0 \ 0]^T.$$

不匹配的不确定性

$$\xi_{u1} = [0.05e^{-2\pi t} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

$\hat{W} = \text{diag}\{0.8, 1, 0.6, 1, 1\}$ ,  $\delta = \text{diag}\{0.2, 0, 0.1, 0, 0\}$ , 当 $t=3 \text{ s}$ , 发生故障, 此时 $\hat{W} = \text{diag}\{1, 0, 1, 0, 1\}$ ,  $x_0 = [0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $u_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . 采样时间 $T = 0.01 \text{ s}$ . 滑模面中 $G = B^T$ , 极点配置中选择极点为  $p_{\text{ker}} = [0.991 \ 0.992 \ 0.993 \ 0.994 \ 0.995 \ 0.996]$ , 控制力中反馈部分 $K_0$ 的选择采用MATLAB中place命令实现,  $K_0 = \text{place}(\Phi, \Gamma, p_{\text{ker}})$ .

图2为系统状态历程图,  $x_1-x_6$ 分别为 $\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}$ . 可见应用本文方法, 故障和匹配的不确定性没有影响到系统姿态调节. 图3为分配到每个动量轮的力矩的时间历程曲线, 当故障发生后, 动量轮2和4完全故障, 分配到他们的力矩为0, 动量轮1, 3, 5可用, 控制分配可以实现目标控制律.

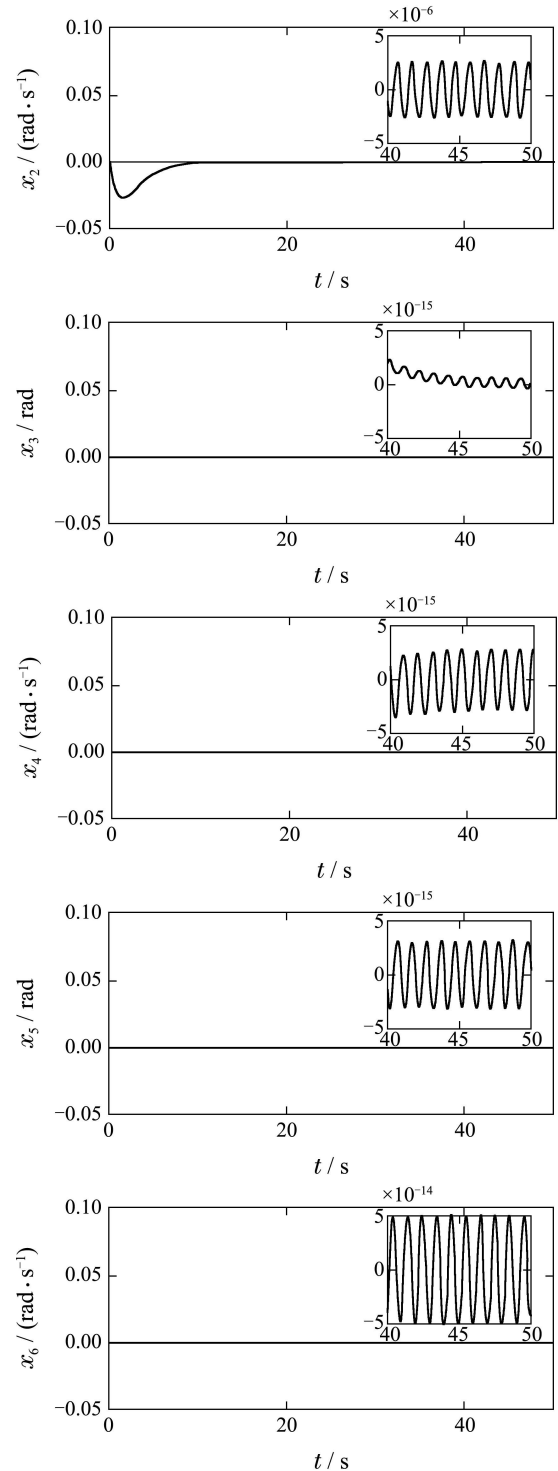
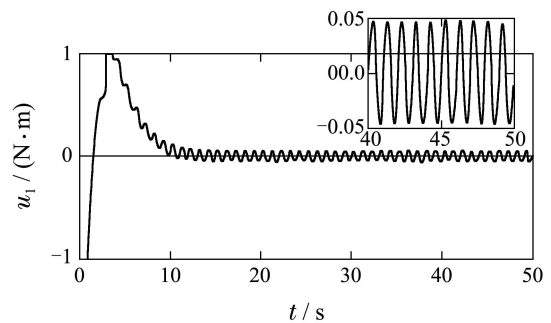
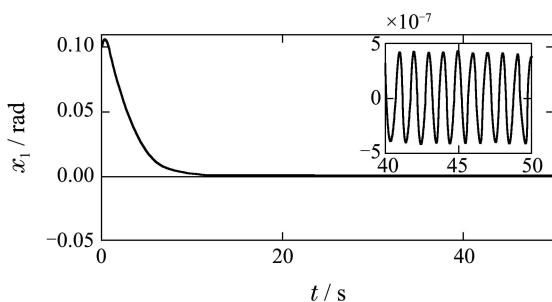


图2 Case 1 的状态历程曲线

Fig. 2 State history of Case 1



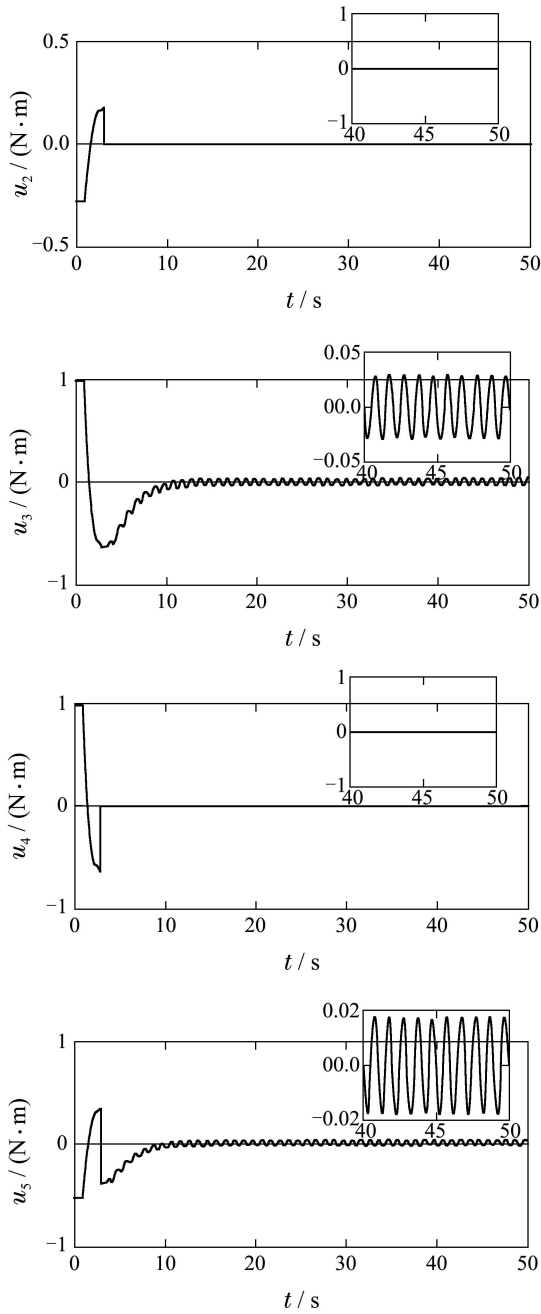


图 3 Case 1 的力矩历程曲线  
Fig. 3 Control history of Case 1

从图2和图3可知, 此时本文方法可以有效处理含健康因子不确定、 $L_2 \cap L_\infty$ 不匹配不确定性的故障系统, 系统稳定. 且最终精度数量级为 $10^{-6}$ , 小于式(43)所示的 $O(T^2) = 10^{-4}$ , 仿真和理论相符.

**Case 2** 其他参数和初始条件都和Case 1相同, 只是不匹配不确定性为 $\xi_{i2} \in L_\infty = [0.05 \sin(-2\pi t) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , 仿真结果如图4和图5所示.

由图4和图5可知, 姿态调节过程中, 两个故障飞轮可以被重构, 但因为存在不匹配的不确定性, 系统最终不能收敛到0. 仿真表明,  $L_\infty$ 的不匹配不确定性、故障、健康因子不准确等同时存在时, 采用本文容错控制方法, 系统有界.

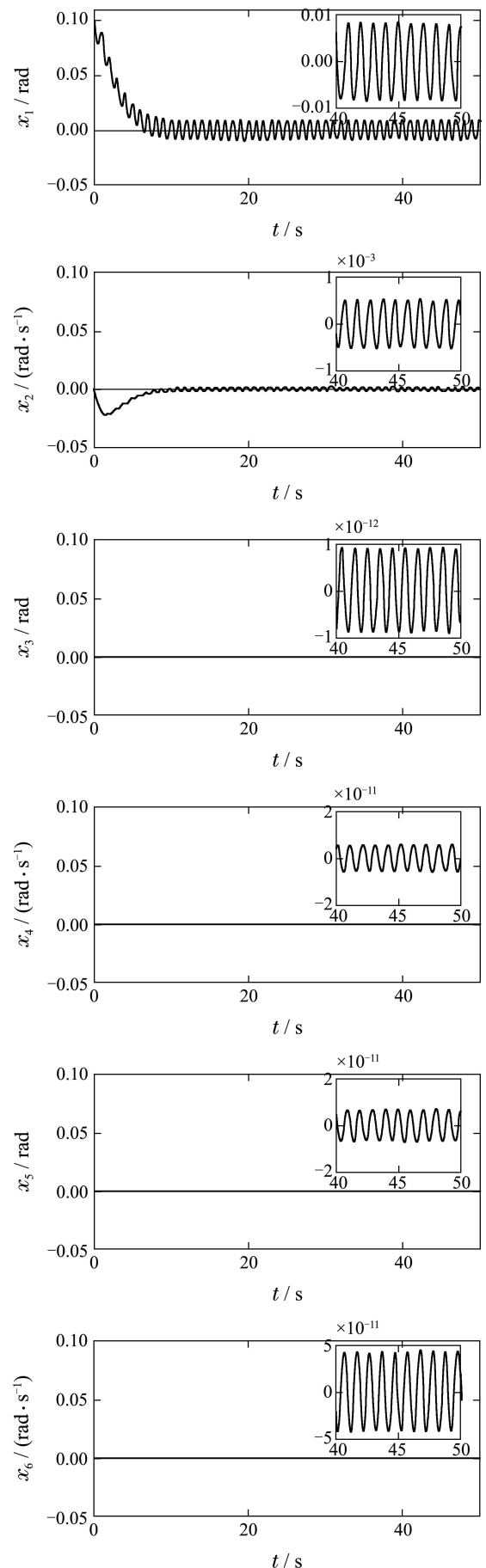


图 4 Case 2 的状态历程曲线  
Fig. 4 State history of Case 2

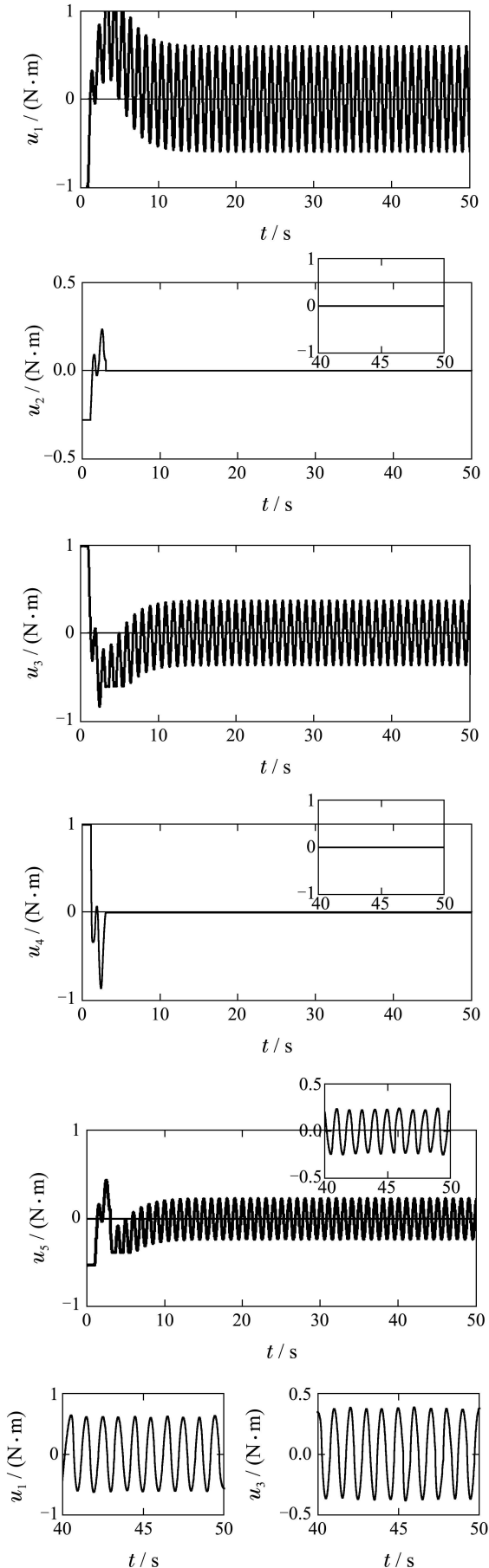


图5 Case 2的力矩历程曲线

Fig. 5 Control history of Case 2

本算例中,  $G = B^T$ , 此时式(34)–(35)中:

$$\Gamma(G\Gamma)^{-1}G = \text{diag}\{0, 1, 0, 1, 0, 1\}. \quad (52)$$

可得  $\Gamma(G\Gamma)^{-1}G\xi_u = 0$ , 所以式(35)为

$$Q_k = B(\xi_{m,k} - \hat{\xi}_{m,k}) - B(\xi_{m,k-1} - \hat{\xi}_{m,k-1}). \quad (53)$$

由假设2, 可得

$$\|Q_k\| \leq 4\delta_m. \quad (54)$$

指出一点, 式(54)的  $4\delta_m$  放大了很多. 在假设2中添加不确定性的一阶导数的界, 则可使得  $\max \|Q_k\|$  更精确.

式(43)可以表示为

$$\|x_k\| \leq \frac{\delta_u + 4\delta_m}{1 - \lambda_1} T = \frac{0.05 + 4 \times 0.05}{0.004} \times 0.01 = 0.6. \quad (55)$$

由图4可知,  $\|x_k\| \leq 0.01 \ll 0.6$ , 满足式(55).

### 4.3 仿真总结(Simulation summary)

图2~5表明, 本文的仿真结果和理论分析结果一致. 连续有界匹配的不确定性可以被估计和补偿, 且采用本文控制器时, 姿态调节系统最终精度为  $O(T^2)$ . 不匹配的不确定性不能被控制律补偿, 闭环系统的稳定性决定于不匹配不确定性自身的特性. 当连续有界不匹配的不确定性属于  $L_2 \cap L_\infty$  空间时, 闭环系统稳定, 最终精度为  $O(T^2)$ .  $L_\infty$  空间的不匹配不确定性存在时, 系统有界, 且  $\|x_k\| \leq \frac{\delta_u + Q_{k,\max}}{1 - \lambda_1} T$ .

## 5 结论(Conclusions)

本文研究考虑多故障、健康因子不准确, 匹配不确定性和不匹配不确定性时卫星控制系统容错控制方法. 设计的容错控制算法主要包含考虑不确定性的离散积分滑模控制器和考虑健康因子的控制分配方法. 面向含匹配和不匹配不确定性的离散多输入多输出系统, 提出了离散积分滑模控制方法, 分析了不确定性存在时闭环系统的稳定性, 且给出了系统状态的稳态界. 对于控制分配过程, 选用了基于可达集的直接方法. 提出了按照可达集表面法向量与目标向量夹角由小到大的顺序搜索相交面的方法, 改进了直接方法, 提高了控制分配求解速度. 基于文中控制器, 存在匹配的不确定性时系统稳定, 精度为  $O(T^2)$ . 含不匹配不确定性时, 系统状态的界为

$$\|x_k\| \leq \frac{\delta_u + Q_{k,\max}}{1 - \lambda_1} T.$$

最后以一个五动量轮卫星为例, 仿真了含健康因子不准确, 匹配不确定性和不匹配不确定性的卫星控制系统容错控制问题, 仿真结果和理论分析结果一致, 表明了本文方法的有效性.



## 参考文献(References):

- [1] ZHANG Y M, JIANG J. Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems [J]. *Annual Reviews in Control*, 2008, 32(2): 229 – 252.
- [2] CHRISTOPHER E, CHEE P T. Sensor fault tolerant control using sliding mode observers [J]. *Control Engineering Practice*, 2006, 14(8): 897 – 908.
- [3] 刘聪, 李颖晖, 朱喜华, 等. 基于自适应滑模观测器的不匹配非线性系统执行器故障重构 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(4): 431 – 437. (LIU Cong, LI Yinghui, ZHU Xihua, et al. Adaptive sliding-mode observer for actuator fault reconstruction in nonlinear system with mismatched uncertainties [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 431 – 437.)
- [4] DURHAM W C. Attainable moments for the constrained control allocation problem[J]. *Journal of Guidance Control, and Dynamics*, 1994, 17(6): 1371 – 1379.
- [5] DURHAM W C. Constrained control allocation: three-moment problem [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1994, 17(2): 330 – 336.
- [6] MARKLEY F L, REYNOLDS R G, LIU F X. Maximum torque and momentum envelopes for reaction-wheel arrays[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2010, 33(5): 1606 – 1614.
- [7] TJÖNNÄS J, JOHANSEN T A. Adaptive control allocation [J]. *Automatica*, 2008, 44(11): 2754 – 2765.
- [8] CASAVOLA A, GARONE E. Adaptive fault tolerant actuator allocation for overactuated plants[C] // *Proceedings of the 2007 American Control Conference*. New York: American Control Conference, 2007: 3985 – 3990.
- [9] ALWI H, EDWARDS C. Fault tolerant control using sliding modes with on-line control allocation [J]. *Automatica*, 2008, 47(7): 1859 – 1866.
- [10] HAMAYUNA M T, EDWARDS C, ALWIA H. Integral sliding mode fault tolerant control incorporating on-line control allocation[C] // *2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems*. Mexico City: International Workshop on Variable Structure Systems, 2010: 100 – 105.
- [11] HAMAYUNA M T, EDWARDS C, ALWIA H. A fault tolerant control allocation scheme with output integral sliding modes [J]. *Automatica*, 2013, 49(6): 1830 – 1837.
- [12] MATTHEWS G P, DECARLO R A. Decentralized tracking for a class of interconnected nonlinear systems using variable structure control [J]. *Automatica*, 1988, 24(2): 187 – 193.
- [13] XU J X, PAN Y J, LEE T H. Analysis and design of integral sliding mode control based on Lyapunov's direct method [C] // *Proceedings of the American Control Conference Denver*. Colorado: American Control Conference, 2003: 192 – 196.
- [14] RUBAGOTTI M, ESTRADA A, CASTANOS F, et al. Integral sliding mode control for nonlinear systems with matched and unmatched perturbations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(11): 2699 – 2704.
- [15] CHOI H H. On the existence of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties [J]. *Automatica*, 35(10): 1707 – 1715.
- [16] CAO W J, XU J X. Nonlinear integral-type sliding surface for both matched and unmatched uncertain systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(8): 1355 – 1360.
- [17] FERNANDO C, LEONID F. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(5): 853 – 858.
- [18] SU W C, DRAKUNOV S B, OZGUNER U. An  $O(T^2)$  boundary layer in sliding mode for sampled-data systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(3): 482 – 485.
- [19] ABIDI K, XU J X, YU X H. On the discrete-time integral sliding-mode control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(4): 709 – 715.
- [20] PAI M C. Robust tracking and model following of uncertain dynamic systems via discrete-time integral sliding mode control [J]. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2009, 7(3): 381 – 374.
- [21] XI Z, HESKETH T. Discrete time integral sliding mode control for systems with matched and unmatched uncertainties [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(5): 889 – 896.

## 作者简介:

段文杰 (1986–), 男, 博士, 主要研究方向为控制系统可重构性评价和设计、容错控制等, E-mail: wenjie\_duan@163.com;

王大轶 (1973–), 男, 研究员, 博士生导师, 主要研究方向为控制系统的故障可诊断性评价与设计、卫星制导、导航与控制等, E-mail: dayiwang@163.com;

刘成瑞 (1978–), 男, 博士后, 高级工程师, 主要研究方向为动态系统可诊断性和可重构性的评价与设计等, E-mail: liuchengrui@gmail.com.