

## 非参数不确定系统状态受限误差跟踪学习控制方法

严求真<sup>1,2</sup>, 孙明轩<sup>1†</sup>

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023; 2. 浙江水利水电学院 信息工程学院, 浙江 杭州 310018)

**摘要:** 针对一类非参数不确定系统, 提出误差跟踪学习控制方法, 同时解决学习控制系统的初值问题和状态约束问题. 利用障碍Lyapunov函数设计控制器, 采用鲁棒方法与学习方法相结合的策略处理非参数不确定性, 将滤波误差约束于预设的界内, 并由此实现对系统状态在各次迭代运行过程中的约束. 文中构造了一种期望误差轨迹, 经过足够多次迭代后, 所提控制方法使得系统误差在整个作业区间以预设精度跟踪期望误差轨迹, 系统状态在部分作业区间精确跟踪参考信号. 仿真结果表明了该控制方案的有效性.

**关键词:** 迭代学习控制; 状态约束; 初值问题; 非参数不确定性

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Error-tracking iterative learning control with state constrained for nonparametric uncertain systems

YAN Qiu-zhen<sup>1,2</sup>, SUN Ming-xuan<sup>1†</sup>

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China;

2. College of Information Engineering, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

**Abstract:** We present an error-tracking iterative learning control method for a class of nonparametric uncertain systems to tackle simultaneously both the initial condition problem and the state-constrained problem. The learning controller is designed by using the barrier Lyapunov function, and the robust learning approach is applied to deal with the nonparametric uncertainties, by which the filtered error is constrained in a pre-specified region, with the system states being constrained. A kind of desired error trajectory is constructed in this paper. It is shown that as the number of iterations increases, the tracking error of the closed-loop system follows the desired error trajectory with the pre-specified accuracy over the entire time interval, and the system states track the reference signal perfectly on the specified interval. Numerical results are presented to demonstrate the effectiveness of the learning control scheme.

**Key words:** iterative learning control; constrained state; initial condition problem; nonparametric uncertainties

### 1 引言(Introduction)

Lyapunov综合方法是设计学习控制器的重要工具之一<sup>[1-2]</sup>. 迄今, 大量相关工作研究线性参数不确定系统的学习控制方法, 通过学习方法估计未知参数, 实现系统状态在整个作业区间上对参考信号的完全跟踪<sup>[3-4]</sup>. 这些工作往往假设系统误差的初值为零, 所考虑的参数不确定性是与迭代次数无关的固定常数或时变常数. 近年来, 人们还考虑利用学习方法估计随迭代次数变化的时变参数<sup>[5]</sup>. 参数不确定性以未知常数向量与已知函数向量相乘的形式呈现, 而非参数不确定性无此方面的要求, 因此, 后者是比前者更为一般的不确定性, 非参数不确定系统学习控制的适用范围较参数不确定系统学习控制广. 非参数不确定性的

处理难度大于参数不确定性, 较早的文献在设计控制器时, 利用关于界函数的反馈项处理非参数不确定性, 近年来的文献结合使用鲁棒方法与学习方法处理非参数不确定性<sup>[6-8]</sup>. 目前, 针对非参数不确定系统的学习控制方法研究还不够深入, 是一项值得继续研究的工作. 近年来, 相关的研究结果还涉及双曲分布参数系统<sup>[9]</sup>和非最小相位系统<sup>[10]</sup>, 以及非严格重复扰动的抑制<sup>[11]</sup>和复杂动态网络自适应同步<sup>[12]</sup>等.

如前所述, 在分析与设计迭代学习控制系统时, 常假设在每次迭代的开始时刻, 系统状态与期望初值完全一致. 然而, 在实际场合, 受复位精度的限制, 初始定位误差总是存在的, 这会降低闭环系统的跟踪精度. 因此, 研究系统初态任意情形下的迭代学习控制方法,

收稿日期: 2014-08-02; 录用日期: 2015-05-06.

†通信作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn; Tel.: +86 571-85290586.

国家自然科学基金项目(60874041, 61174034, 61374103), 浙江省高等学校访问学者专业发展项目(FX2013206)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (60874041, 61174034, 61374103) and University Visiting Scholars Developing Project of Zhejiang Province (FX2013206).

有利于拓宽学习控制方法的应用范围<sup>[13-14]</sup>. 为解决根据Lyapunov方法设计学习控制系统时需面对的误差初值非零问题, 相关文献给出了时变边界层、参考信号初始修正和误差跟踪方法等解决方案. 此外, 在参考信号光滑闭合场合, 也可采用重复学习控制方法设计控制器, 该法在运行过程中勿需停顿及复位<sup>[15-16]</sup>.

在自适应或自适应学习控制算法中, 常使用投影算子与饱和函数对估计量进行限幅. 上述方法能够约束系统的控制输入, 增强系统的鲁棒性. 但是在一些控制场合, 出于人身与设备安全方面的考虑, 需要对运行期间的速度、加速度、位移等系统状态进行约束. 文献[17]考虑单输入单输出严格反馈系统的自适应控制问题, 利用障碍Lyapunov函数设计控制器, 实现控制过程中的输出约束. 文献[18]针对一类同含参数不确定性及非参数不确定性的非线性系统, 提出输出受限迭代学习控制算法. 文献[19]构造形式简单的二次分式型障碍Lyapunov函数, 通过限制误差二次型于预设的界内, 实现对系统状态变量的整体约束.

笔者考虑非参数不确定系统的状态受限误差跟踪学习控制问题, 拟根据障碍Lyapunov函数设计控制器, 采用鲁棒方法与学习方法相结合的策略来处理非参数不确定性, 将滤波误差约束于预设的界内, 并由此实现在各次迭代运行过程中约束系统状态. 经过足够多次迭代后, 系统误差在整个作业区间以预设精度跟踪期望误差轨迹, 系统状态在部分作业区间上精确跟踪参考信号. 构造合适的期望误差轨迹, 是实现本文所提算法的基础. 为此, 将给出一种期望误差轨迹构造方案, 并阐述误差跟踪与状态跟踪之间的关系.

### 2 问题的提出(Problem formulation)

考虑在有限时间区间 $[0, T]$ 上迭代运行的不确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_{n,k} = f(\mathbf{x}_k, t) + g(\mathbf{x}_k, t)u_k, \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $k(= 0, 1, 2, \dots)$ 为重复作业次数,  $\mathbf{x}_k = [x_{1,k} \ x_{2,k} \ \dots \ x_{n,k}]^T \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量,  $u_k \in \mathbb{R}$ 为控制输入,  $f(\mathbf{x}_k, t)$ 与 $g(\mathbf{x}_k, t)$ 为不确定性. 参考信号为 $\mathbf{x}_d = [x_d \ \dot{x}_d \ \ddot{x}_d \ \dots \ x_d^{(n-1)}]^T$ ,  $x_d^{(n)}$ 存在. 系统初值与参考信号在起始时刻的取值不等, 即 $\mathbf{x}_k(0) \neq \mathbf{x}_d(0)$ , 不满足常规迭代学习控制算法所要求的初值条件.

定义误差 $\mathbf{e}_k = [e_{1,k} \ e_{2,k} \ \dots \ e_{n,k}]^T = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_d$ , 由式(1)可得误差动态

$$\begin{cases} \dot{e}_{i,k} = x_{i+1,k} - \dot{x}_d, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{e}_{n,k} = f(\mathbf{x}_k, t) + g(\mathbf{x}_k, t)u_k - x_d^{(n)}. \end{cases} \quad (2)$$

本文的控制目标是, 选择障碍Lyapunov函数设计控制器 $u_k$ , 使得误差 $\mathbf{e}_k$ 在整个作业区间 $[0, T]$ 上以预设精度跟踪期望误差轨迹 $\mathbf{e}_k^*$ , 实现系统状态 $\mathbf{x}_k$ 在部分

作业区间 $[T_1, T]$ 上对 $\mathbf{x}_d$ 的精确跟踪( $0 < T_1 < T$ ). 同时, 在迭代运行过程中, 对系统状态 $\mathbf{x}_k$ 进行约束. 期望误差轨迹 $\mathbf{e}_k^*$ 具有合适的衰减性状, 其具体构造方案见本文第3节. 记产生 $\mathbf{e}_k^*$ 的期望控制为 $u_k^*(t)$ , 它满足

$$\begin{cases} \dot{e}_{i,k}^* = e_{i+1,k}^*, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{e}_{n,k}^* = f(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d, t) + g(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d, t)u_k^* - x_d^{(n)}. \end{cases} \quad (3)$$

因设计控制器需要, 对系统(1)做假设1-3.

**假设 1** 迭代初值 $\mathbf{x}_k(0) \in [\mathbf{x}^0 - \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{x}^0 + \boldsymbol{\epsilon}]$ ,  $\forall k$ .  $\mathbf{x}^0$ 与 $\boldsymbol{\epsilon}$ 是与 $k$ 无关的常向量.

**假设 2** 存在已知的连续函数 $g_m(\mathbf{x}_k, t)$ , 满足  $0 < g_m(\mathbf{x}_k, t) \leq g(\mathbf{x}_k, t)$ .

**假设 3**  $f(\cdot, \cdot)$ 与 $g(\cdot, \cdot)$ 分别满足

$$\begin{aligned} &|f(\boldsymbol{\xi}^1, t) - f(\boldsymbol{\xi}^2, t)| \leq \\ &\|\boldsymbol{\xi}^1 - \boldsymbol{\xi}^2\| \alpha_f(\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, t), \quad \forall \boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2 \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (4)$$

与

$$\begin{aligned} &|g(\boldsymbol{\xi}^1, t) - g(\boldsymbol{\xi}^2, t)| \leq \\ &\|\boldsymbol{\xi}^1 - \boldsymbol{\xi}^2\| \alpha_g(\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, t), \quad \forall \boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2 \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (5)$$

式中:  $\alpha_f(\cdot, \cdot, \cdot)$ ,  $\alpha_g(\cdot, \cdot, \cdot)$ 为非负连续函数.

### 3 期望误差轨迹的构造(Construction of desired error trajectory)

构造合适的期望误差轨迹 $\mathbf{e}_k^*(t)$ , 是设计误差跟踪控制器的基础. 拟构造的期望误差轨迹 $\mathbf{e}_k^*(t)$ 须满足

$$\mathbf{e}_k^*(0) = \mathbf{e}_k(0), \mathbf{e}_k^*(t) = \mathbf{0}, t \in [T_1, T]. \quad (6)$$

此处 $T_1$ 是 $\mathbf{e}_k^*$ 从非 $\mathbf{0}$ 到 $\mathbf{0}$ 的过渡点.

下面给出期望误差轨迹构造方案.

i) 当 $T_1 \leq t \leq T$ 时,

$$e_{1,k}^*(t) = e_{2,k}^*(t) = \dots = e_{n,k}^*(t) = 0. \quad (7)$$

ii) 当 $0 \leq t < T_1$ 时, 选择

$$e_{1,k}^*(t) = a_{0,k} + a_{1,k}t + \dots + a_{2n+1,k}t^{2n+1}, \quad (8)$$

$$e_{i,k}^*(t) = e_{1,k}^{*(i-1)}(t), \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (9)$$

其系数选取为

$$\begin{aligned} a_{0,k} &= e_{1,k}(0), \\ a_{j,k} &= \frac{1}{j!} e_{j+1,k}(0), \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (10)$$

$$(a_{n+1,k}, a_{n+1,k}, \dots, a_{2n+1,k})^T = \Gamma^{-1} \boldsymbol{\omega}. \quad (11)$$

此处,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} T_1^{n+1} & T_1^{n+2} & \dots & T_1^{2n+1} \\ (n+1)T_1^n & (n+2)T_1^{n+1} & \dots & (2n+1)T_1^{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n+1)!T_1 & \left(\prod_{j=3}^{n+2} j\right)T_1^2 & \dots & \left(\prod_{j=n+2}^{2n+1} j\right)T_1^{n+1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= -(\eta(T_1), \dot{\eta}(T_1), \dots, \eta^{(n)}(T_1))^T, \\ \eta(t) &= a_{0,k} + a_{1,k}t + \dots + a_{n,k}t^n. \end{aligned}$$

上文所构造的期望误差轨迹  $\mathbf{e}_k^*$  在  $[0, T]$  上连续, 且  $\dot{\mathbf{e}}_{n,k}^*(t)$  在  $t = T_1$  两侧也连续. 由  $\mathbf{e}_k^*(t)$  的衰减性状可以看出, 若能设计合适的控制律, 实现  $\mathbf{e}_k(t)$  在  $[0, T]$  上完全跟踪  $\mathbf{e}_k^*(t)$ , 那么,  $\mathbf{x}_k(t)$  可在  $[T_1, T]$  上完全跟踪  $\mathbf{x}_d(t)$ . 误差跟踪方法在使用上较参考信号初始方法方便, 这是因为在构造期望误差轨迹时, 只需根据  $\mathbf{e}_k(0)$  与  $T_1$  即可确定相应的期望误差轨迹, 而在构造参考信号过渡接入曲线时, 需考虑的因素包括  $\mathbf{x}_k(0)$  以及在接入点  $T_1$  的  $\mathbf{x}_d(T_1)$  与  $\dot{\mathbf{x}}_d(T_1)$ .

#### 4 控制器设计(Controller design)

定义滤波误差:

$$s_k(t) = c_0 \int_0^t z_{1,k}(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_{i,k} + z_{n,k}, \quad (12)$$

式中:  $\mathbf{z}_k = \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k^* = [z_{1,k} \ z_{2,k} \ \dots \ z_{n,k}]^T$ , 参数  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  使得方程  $\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0$  的所有特征根均具有负实部. 定义

$$s_{\phi k} = s_k - \phi \text{sat}\left(\frac{s_k}{\phi}\right), \quad (13)$$

式中:  $\phi > 0$ ,  $\text{sat}(\cdot)$  的定义见式(30).

为叙述方便, 分别记  $g(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d, t)$ ,  $f(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d, t)$ ,  $g(\mathbf{x}_k, t)$ ,  $f(\mathbf{x}_k, t)$  为  $g_k^*$ ,  $f_k^*$ ,  $g_k$ ,  $f_k$ . 在不引起混淆时, 为叙述简便, 文中将函数的时间变量  $t$  略去.

记  $\mathbf{c} = [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-1}]^T$ , 当  $|s_k| > \phi$  时,

$$\begin{aligned} \dot{s}_{\phi k} &= \dot{s}_k = \mathbf{c}^T \mathbf{z}_k + \dot{\mathbf{e}}_{n,k} - \dot{\mathbf{e}}_{n,k}^* = \\ &\mathbf{c}^T \mathbf{z}_k + f_k + g_k u_k - f_k^* - g_k^* u_k^*. \end{aligned} \quad (14)$$

**引理 1** 当  $|s_k| > \phi$  时,  $s_{\phi k}$  与  $\mathbf{z}_k$  之间满足

$$\int_0^t \|\mathbf{z}_k(\tau)\| |s_{\phi k}(\tau)| d\tau \leq \int_0^t \lambda s_{\phi k}^2(\tau) d\tau, \quad (15)$$

式中:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 + T\|A\|e^{T\|A\|}, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

**证** 当  $|s_k| > \phi$  时, 由式(14)容易得到

$$\dot{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A}\mathbf{z}_k + \mathbf{b}\dot{s}_{\phi k}, \quad (17)$$

式中  $\mathbf{b} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$ , 上式在区间  $[0, t]$  上的定积分为

$$\mathbf{z}_k(t) = \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{z}_k(\tau) d\tau + \mathbf{b}s_{\phi k}(t), \quad (18)$$

对上式两边同取范数, 有

$$\|\mathbf{z}_k(t)\| \leq \int_0^t \|A\| \|\mathbf{z}_k(\tau)\| d\tau + |s_{\phi k}(t)|. \quad (19)$$

根据 Bellman-Gronwall 引理,

$$\|\mathbf{z}_k(t)\| \leq \|A\| e^{T\|A\|} \int_0^t |s_{\phi k}(\tau)| d\tau + |s_{\phi k}(t)|. \quad (20)$$

上式两边同乘  $|s_{\phi k}|$ , 并积分即可得到式(15). 证毕.

选择障碍 Lyapunov 函数

$$V_{1k}(t) = \frac{1}{2} \frac{s_{\phi k}^2}{b_s^2 - s_{\phi k}^2}, \quad (21)$$

其中  $b_s > \phi$ . 将  $V_{1k}(t)$  对时间求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1k}(t) &= \sigma_k s_{\phi k} \dot{s}_k = \\ &\sigma_k s_{\phi k} [\mathbf{c}^T \mathbf{z}_k + f_k - f_k^* + g_k u_k - g_k u_{dk} + \\ &g_k u_{dk} - g_k^* u_{dk} + g_d u_{dk} - g_d u_d + \\ &(g_k^* - g_d) u_{dk} + g_d u_d - g_k^* u_k^*], \end{aligned} \quad (22)$$

式中:  $\sigma_k(t) = b_s^2 / (b_s^2 - s_{\phi k}^2)^2$ ,  $g_d \triangleq g(\mathbf{e}_d + \mathbf{x}_d, t)$ ,  $\mathbf{e}_d = [e_{1,d} \ e_{2,d} \ \dots \ e_{n,d}]^T$  为一组由式(7)-(11)及  $\mathbf{e}_k(0) = \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_d(0)$  所确定的期望误差轨迹;  $u_d$  为产生  $\mathbf{e}_d$  的控制量, 满足

$$\begin{cases} \dot{e}_{i,d} = e_{i+1,d}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{e}_{n,d} = f(\mathbf{e}_d + \mathbf{x}_d, t) + g(\mathbf{e}_d + \mathbf{x}_d, t)u_d - \dot{\mathbf{x}}_d^{(n)}, \end{cases}$$

上述微分方程的初值  $\mathbf{e}_d(0) = \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_d(0)$ ;  $u_{dk}$  为对  $u_d$  的估计. 根据期望误差轨迹的性状,  $g_k^*$ ,  $g_d$ ,  $u_k^*$  和  $u_d$  在  $[0, T_1]$  上均有界,  $u_{dk}$  的有界性也可由饱和函数的有界性确保, 参见式(27), 故  $(g_k^* - g_d) u_{dk} + g_d u_d - g_k^* u_k^*$  在  $[0, T_1]$  上有界. 在  $[T_1, T]$  上,  $(g_k^* - g_d) u_{dk} + g_d u_d - g_k^* u_k^* = 0$ . 记  $(g_k^* - g_d) u_{dk} + g_d u_d - g_k^* u_k^*$  在  $[0, T]$  上的界为  $\rho(t)$ . 由假设 3 知,

$$s_{\phi k} (\mathbf{c}^T \mathbf{z}_k + f_k - f_k^*) \leq |s_{\phi k}| (\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|) \|\mathbf{z}_k\|, \quad (23)$$

$$s_{\phi k} (g_k u_{dk} - g_k^* u_{dk}) \leq |s_{\phi k}| |u_{dk}| \alpha_{gk} \|\mathbf{z}_k\|, \quad (24)$$

这里:  $\alpha_{fk} \triangleq \alpha_f(\mathbf{x}_k, \mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d, t)$ ,  $\alpha_{gk} \triangleq \alpha_g(\mathbf{x}_k, \mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d, t)$ . 将式(23)-(24)代入式(22), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1k}(t) &\leq \\ &\sigma_k |s_{\phi k}| (\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\| + \alpha_{gk} |u_{dk}|) \|\mathbf{z}_k\| + \sigma_k s_{\phi k} \\ &(g_k u_k - g_k u_{dk} + g_d u_{dk} - g_d u_d) + \sigma_k |s_{\phi k}| \rho. \end{aligned} \quad (25)$$

由此, 可设计第  $k$  次迭代时的控制律

$$\begin{aligned} u_k &= \\ u_{dk} &- \frac{1}{g_m} \rho_k \text{sat}\left(\frac{s_k}{\phi}\right) - \frac{\lambda \bar{\sigma}_k s_{\phi k}}{g_m \sigma_k} (\alpha_{m,k} + \|\mathbf{c}\|) - \\ &\frac{\sigma_k s_{\phi k}}{\varepsilon} - \frac{\sigma_k s_{\phi k} (\|\mathbf{c}\| + \alpha_{fk}) \|\mathbf{z}_k\| + 1}{g_m \varepsilon} \end{aligned} \quad (26)$$

以及学习律

$$u_{dk} = \text{sat}_u(\hat{u}_{dk}), \quad \hat{u}_{dk} = \text{sat}_u(\hat{u}_{dk-1}) - \gamma_1 \sigma_k s_{\phi k}, \quad (27)$$

$$\rho_k = \text{sat}_\rho(\hat{\rho}_k), \quad \hat{\rho}_k = \text{sat}_\rho(\hat{\rho}_{k-1}) + \gamma_2 \sigma_k |s_{\phi k}|, \quad (28)$$

式中:  $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$  为增益,  $\varepsilon$  是个较大的正数,  $u_{d-1} = 0, \hat{\rho}_{-1} = 0,$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_k &\triangleq \max_{\tau \in [0, t]} \sigma_k(\tau), \\ \alpha_{m, k} &\triangleq \max_{\tau \in [0, t]} [\alpha_{fk}(\tau) + \alpha_{gk}(\tau)|u_{dk}(\tau)|]. \end{aligned} \quad (29)$$

$\text{sat}_u(\hat{u}), \text{sat}_\rho(\hat{\rho}) \in \text{sat}_a(\hat{a}),$  对于  $\hat{a} \in \mathbb{R},$

$$\text{sat}_a(\hat{a}) \triangleq \begin{cases} \bar{a}, & \hat{a} > \bar{a}, \\ \underline{a}, & \hat{a} < \underline{a}, \\ \hat{a}, & \text{其他}, \end{cases} \quad (30)$$

$\bar{a}$  与  $\underline{a}$  分别为对应的上、下限幅. 当  $\bar{a} = 1$  且  $\underline{a} = -1$  时, 简记  $\text{sat}_a(\hat{a})$  为  $\text{sat}(\hat{a}).$

## 5 收敛性分析(Analysis of convergence)

笔者将系统(1)的收敛性和稳定性结果总结为下述定理.

**定理 1** 在假设1-3下, 由系统(1)和控制律(26)及学习律(27)-(28)组成的闭环系统能够确保在各次迭代运行过程中,  $|s_{\phi k}| < b_s$  成立, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{\phi k} = 0. \quad (31)$$

**证** i) 变量有界性及对系统状态的约束性. 选择

$$V_{2k} = \frac{1}{2} s_{\phi k}^2, \quad (32)$$

根据式(14)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2k} &\leq |s_{\phi k}|(\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|)\|\mathbf{z}_k\| + |s_{\phi k}|g_k^*|u_k^*| + \\ &|s_{\phi k}|g_k\bar{u}_d - \frac{g_k\sigma_k s_{\phi k}^2}{\varepsilon} - \\ &\frac{g_k\sigma_k s_{\phi k}^2((\|\mathbf{c}\| + \alpha_{fk})\|\mathbf{z}_k\| + 1)}{g_m\varepsilon}. \end{aligned} \quad (33)$$

当  $b_s^2/[(b_s^2 - s_{\phi k}^2)^2]|s_{\phi k}| > \varepsilon$  时,

$$\begin{aligned} |s_{\phi k}|(\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|)\|\mathbf{z}_k\| - \\ \frac{g_k\sigma_k s_{\phi k}^2((\|\mathbf{c}\| + \alpha_{fk})\|\mathbf{z}_k\|)}{g_m\varepsilon} \leq 0. \end{aligned} \quad (34)$$

当  $b_s^2/[(b_s^2 - s_{\phi k}^2)^2]|s_{\phi k}| > \varepsilon g_k^*|u_k^*|$  时,

$$|s_{\phi k}|g_k^*|u_k^*| - \frac{g_k\sigma_k s_{\phi k}^2}{g_m\varepsilon} \leq 0. \quad (35)$$

当  $b_s^2/[(b_s^2 - s_{\phi k}^2)^2]|s_{\phi k}| \geq \varepsilon \bar{u}_d$  时,

$$|s_{\phi k}|g_k\bar{u}_d - \frac{g_k\sigma_k s_{\phi k}^2}{\varepsilon} \leq 0. \quad (36)$$

这里,  $\bar{u}_d$  为  $u_{dk}$  的界.  $\omega \triangleq |s_{\phi k}|,$  注意到函数

$$\nu(\omega) = \frac{b_s^2\omega}{(b_s^2 - \omega^2)^2}$$

在  $\omega \in [0, b_s)$  区间内单调递增, 且

$$\lim_{\omega \rightarrow b_s^-} \nu(\omega) = +\infty. \quad (37)$$

因此, 当在  $[0, b_s)$  内的  $\omega$  足够大时, 可使

$$\nu(\omega) > \max(\varepsilon, \varepsilon g_k^*|u_k^*|, \varepsilon \bar{u}_d), \quad (38)$$

此时不等式(34)-(36)均成立, 于是

$$\dot{V}_{2k} < 0. \quad (39)$$

由此可知, 在各次迭代过程中  $|s_{\phi k}| < b_s.$  进而易得系统各信号的有界性.

利用性质(20), 知当  $|s_k| > \phi$  时,

$$\|\mathbf{z}_k(t)\| \leq (t\|A\|e^{T\|A\|} + 1)b_s. \quad (40)$$

因为

$$\|\mathbf{e}_k(t)\| \leq \|\mathbf{z}_k(t)\| + \|\mathbf{e}_k^*(t)\| \quad (41)$$

且

$$\|\mathbf{x}_k(t)\| \leq \|\mathbf{e}_k(t)\| + \|\mathbf{x}_d(t)\|, \quad (42)$$

所以

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_k(t)\| &\leq \|\mathbf{z}_k(t)\| + \|\mathbf{e}_k^*(t)\| + \|\mathbf{x}_d(t)\| \leq \\ &(t\|A\|e^{T\|A\|} + 1)b_s + \|\mathbf{e}_k^*(t)\| + \|\mathbf{x}_d(t)\|. \end{aligned} \quad (43)$$

上式表明, 在由式(1)与式(26)组成的闭环系统中, 系统状态在各次迭代运行过程中均受到相应的约束.

ii) 系统收敛性.

考虑  $|s_k| > \phi$  情形, 此时  $|s_{\phi k}| > 0.$  选择障碍Lyapunov泛函

$$L_k(t) = V_{1k}(t) + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t g_d \tilde{u}_{dk}^2 d\tau + \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t \tilde{\rho}_k^2 d\tau,$$

式中:  $\tilde{u}_{dk} = \hat{u}_{dk} - u_{dk}, \tilde{\rho}_k = \rho - \rho_k.$

当  $k > 0$  时,

$$\begin{aligned} L_k - L_{k-1} &= \\ V_{1k} - V_{1k-1} &+ \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t g_d (\tilde{u}_{dk}^2 - \tilde{u}_{dk-1}^2) d\tau + \\ \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t (\tilde{\rho}_k^2 - \tilde{\rho}_{k-1}^2) d\tau. \end{aligned} \quad (44)$$

由于

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma_k |s_k| (\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\| + |u_{dk}| \alpha_{gk}) \|\mathbf{z}_k\| d\tau &\leq \\ \int_0^t \lambda \bar{\sigma}_k s_k^2 \alpha_{m, k} d\tau, \end{aligned}$$

故由引理1, 式(25)-(26)知

$$\begin{aligned} V_{1k}(t) &\leq \int_0^t \sigma_k s_{\phi k} (g_d u_{dk} - g_d u_d) d\tau + \\ \int_0^t \sigma_k |s_{\phi k}| \rho d\tau - \int_0^t \frac{g_k}{g_m} \sigma_k s_{\phi k} \rho_k \text{sat}\left(\frac{s_k}{\phi}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (45)$$

注意到  $s_{\phi k} \text{sat}(s_k/\phi) = |s_{\phi k}|,$  于是,

$$\begin{aligned} V_{1k}(t) &\leq \int_0^t \sigma_k s_k (g_d u_{dk} - g_d u_d) d\tau + \\ \int_0^t \sigma_k |s_{\phi k}| \tilde{\rho}_k d\tau. \end{aligned} \quad (46)$$

将式(46)代入式(44),

$$L_k - L_{k-1} \leq \int_0^t \sigma_k s_{\phi k} (g_d u_{dk} - g_d u_d) d\tau + \int_0^t \sigma_k |s_{\phi k}| \tilde{\rho}_k d\tau - V_{1k-1} + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t g_d (\tilde{u}_{dk}^2 - \tilde{u}_{dk-1}^2) d\tau + \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t (\tilde{\rho}_k^2 - \tilde{\rho}_{k-1}^2) d\tau. \quad (47)$$

利用式(27),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\gamma_1} (\tilde{u}_{dk} - \tilde{u}_{dk-1}^2) + \sigma_k s_{\phi k} \tilde{u}_{dk} = \\ & \frac{1}{\gamma_1} (u_d - u_{dk})(u_{dk-1} - u_{dk} - \gamma_1 \sigma_k s_{\phi k}) - \\ & \frac{1}{2\gamma_1} (u_{dk} - u_{dk-1})^2 = \\ & \frac{1}{\gamma_1} (u_d - \text{sat}_u(\hat{u}_{dk})) (\hat{u}_{dk} - \text{sat}_u(\hat{u}_{dk})) \leq 0. \end{aligned} \quad (48)$$

结合上述两式, 有

$$L_k - L_{k-1} = \int_0^t \sigma_k |s_{\phi k}| \tilde{\rho}_k d\tau - V_{1k-1} + \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t (\tilde{\rho}_k^2 - \tilde{\rho}_{k-1}^2) d\tau. \quad (49)$$

根据学习律(28),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\gamma_2} (\tilde{\rho}_k^2 - \tilde{\rho}_{k-1}^2) + \sigma_k |s_{\phi k}| \tilde{\rho}_k \leq \\ & - \frac{1}{\gamma_2} (\rho - \rho_k)(\rho_k - \rho_{k-1}) + \sigma_k |s_{\phi k}| (\rho - \rho_k) = \\ & \frac{1}{\gamma_2} (\rho - \text{sat}_\rho(\hat{\rho}_k)) (\rho_k - \text{sat}_\rho(\hat{\rho}_k)) \leq 0. \end{aligned} \quad (50)$$

将式(50)的结果代入式(49), 知  $L_k - L_{k-1} \leq -V_{1k-1}$ . 进而有

$$L_k \leq L_0 - \sum_{i=1}^k V_{1i-1}. \quad (51)$$

前文已经证明了  $L_0$  的有界性. 由数列收敛的必要性质知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{\phi k} = 0. \quad (52)$$

上式蕴含

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |s_k| \leq \phi. \quad (53)$$

采用类似于引理1中的证明方法, 可以推出, 对于任意  $s_k \in \mathbb{R}$ ,

$$\|z_k(t)\| \leq \int_0^t \|A\| \|z_k(\tau)\| d\tau + |s_k(t)| \quad (54)$$

成立. 根据Bellman-Gronwall引理,

$$\|z_k(t)\| \leq \|A\| e^{T\|A\|} \int_0^t |s_k(\tau)| d\tau + |s_k(t)|. \quad (55)$$

由式(52)与式(55)可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k(t)\| \leq (t\|A\|e^{T\|A\|} + 1)\phi. \quad (56)$$

根据前述期望误差轨迹的性质,  $\|e_k^*(t)\|$  在  $[T_1, T]$  上处

处为0, 表明当  $t \in [T_1, T]$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\| \leq (t\|A\|e^{T\|A\|} + 1)\phi. \quad (57)$$

因此可以通过选择合适大小的  $\phi$ , 实现  $\|e_k\|$  在  $[T_1, T]$  上以预设精度收敛于的原点领域内. 证毕.

从上述分析与证明部分可以看出, 算法通过在迭代运行中对  $s_{\phi k}$  的约束, 实现了在迭代运行过程中对系统状态  $x_k$  的约束. 经过足够多次迭代后, 控制器驱使  $e_k$  在区间  $[0, T]$  上精确跟踪对  $e_k^*$ , 实现了  $x_k$  在区间  $[T_1, T]$  上对  $x_d$  的精确跟踪.

### 6 数值算例(Numerical simulation)

考虑如下二阶系统<sup>[18]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k}, \\ \dot{x}_{2,k} = f(x_k, t) + g(x_k, t)u_k. \end{cases} \quad (58)$$

此处,  $f(x_k, t) = -0.1x_{2,k} - x_{1,k}^3 + \cos t$  与  $g(x_k, t) = 1 + 0.01x_{1,k}^2 + 0.005x_{2,k}^2$  为不确定性. 系统初值  $x_{1,k}(0) = -0.3 + 0.05 \text{rand}_1$ ,  $x_{2,k}(0) = 0.1 + 0.01 \text{rand}_2$ ,  $\text{rand}_1$  与  $\text{rand}_2$  均为0与1之间的随机数, 满足假设1. 控制目标是设计迭代学习控制器  $u_k$ , 实现  $x_k = [x_{1,k} \ x_{2,k}]^T$  对参考信号  $x_d = [x_{1d} \ x_{2d}]^T = [12t^2(1-t) \ 24t(1-t) - 12t^2]^T$  的跟踪. 因为  $x_k(0) \neq x_d(0)$ , 所以不宜采用常规方法设计控制器.

按照本文所提的方案构造期望误差轨迹, 选择  $T_1 = 0.2, T = 1$ , 当  $T_1 \leq t \leq T$  时,  $e_{1,k}^*(t) = 0, e_{2,k}^*(t) = 0$ ; 当  $0 \leq t < T_1$  时,

$$\begin{aligned} e_{1,k}^*(t) &= a_{0,k} + a_{1,k}t + a_{2,k}t^2 + a_{3,k}t^3 + \\ & \quad a_{4,k}t^4 + a_{5,k}t^5, \\ e_{2,k}^*(t) &= a_{1,k} + 2a_{2,k}t + 3a_{3,k}t^2 + \\ & \quad 4a_{2,k}t^3 + 5a_{3,k}t^4, \end{aligned}$$

其中:  $a_{0,k} = e_{1,k}(0), a_{1,k} = e_{2,k}(0), a_{2,k} = \frac{1}{2}e_{3,k}(0)$ ,

$$\begin{pmatrix} a_{3,k} \\ a_{4,k} \\ a_{5,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^3 & T_1^4 & T_1^5 \\ 3T_1^2 & 4T_1^3 & 5T_1^4 \\ 6T_1 & 12T_1^2 & 20T_1^3 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} -a_{0,k} - a_{1,k}T_1 - a_{2,k}T_1^2 \\ -a_{1,k} - 2a_{2,k}T_1 \\ -2a_{2,k} \end{pmatrix}.$$

采用控制律(26)及学习律(27)-(28)进行仿真. 取

$$\begin{aligned} g_m(x_k, t) &= 1, \\ \alpha_{fk} &= 0.1 + |x_{1d}^2 + x_{1,k}^2 + x_{1d}x_{1,k}|, \\ \alpha_{gk} &= 0.01|x_{1d} + x_{1,k}| + 0.005|x_{2d} + x_{2,k}|, \end{aligned}$$

分别满足假设2-3. 仿真中, 取  $\phi = 0.001, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = 0.01, \varepsilon = 100, \bar{u} = 80, \underline{u} = -80, \bar{\rho} = 0.2, \underline{\rho} = 0, b_s = 0.35$ . 迭代150次后, 仿真结果如图1-6所示.

从图1-4可以看出, 经过足够多次迭代后,  $e_k$ 在整个作业区间 $[0, 1]$ 上精确跟踪 $e_k^*$ ,  $x_k$ 在部分作业区间 $[0.2, 1]$ 上精确跟踪 $x_d$ . 图5是在第150次迭代过程中的控制量情况. 图6是 $|s_{\phi k}(t)|$ 随迭代次数变化情况,

$$J_\phi \triangleq \max_{t \in [0, T]} |s_{\phi k}(t)|.$$

可以看出, 采用含约束学习控制可实现对 $s_{\phi k}$ 在各次迭代过程中进行约束.

为了对比起见, 采用下述无约束学习控制:

$$u_k = u_{dk} - \frac{1}{g_m} \rho_k \text{sat}\left(\frac{s_k}{\phi}\right) - \frac{\lambda s_{\phi k}}{g_m} (\alpha_{m,k} + \|\mathbf{c}\|) - \frac{s_{\phi k} ((\|\mathbf{c}\| + \alpha_{fk}) \|\mathbf{z}_k\| + 1)}{g_m \varepsilon}, \quad (59)$$

以及学习律

$$u_{dk} = \text{sat}_u(\hat{u}_{dk}), \quad \hat{u}_{dk} = \text{sat}_u(\hat{u}_{dk-1}) - \gamma_1 s_{\phi k}, \quad (60)$$

$$\rho_k = \text{sat}_\rho(\hat{\rho}_k), \quad \hat{\rho}_k = \text{sat}_\rho(\hat{\rho}_{k-1}) + \gamma_2 |s_{\phi k}|, \quad (61)$$

进行仿真, 期望误差轨迹构造方案及参数选取情况同前. 图7是 $|s_{\phi k}(t)|$ 随迭代次数变化情况, 可以看出, 无约束学习控制算法不能够保证 $J_\phi \leq b_s$ .

本例表明, 利用本文所提方法设计学习控制系统, 可将滤波误差约束于预设的界内; 同时, 借助合适的期望误差轨迹, 可获得部分作业区间精确跟踪效果.

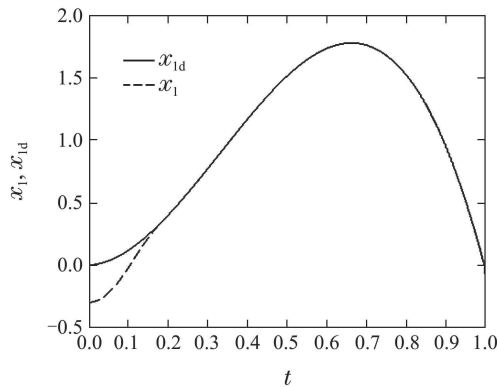


图1 状态 $x_1$ 及其参考轨迹 $x_{1d}$

Fig. 1 State  $x_1$  and the reference trajectory  $x_{1d}$

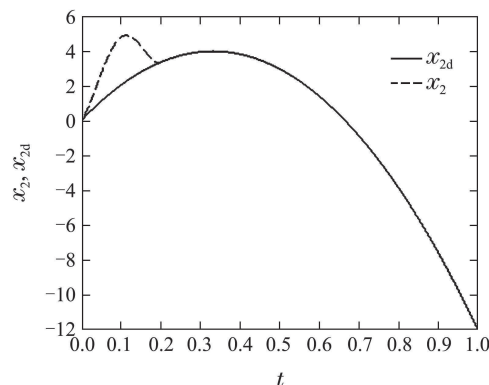


图2 状态 $x_2$ 及其参考轨迹 $x_{2d}$

Fig. 2 State  $x_2$  and the reference trajectory  $x_{2d}$

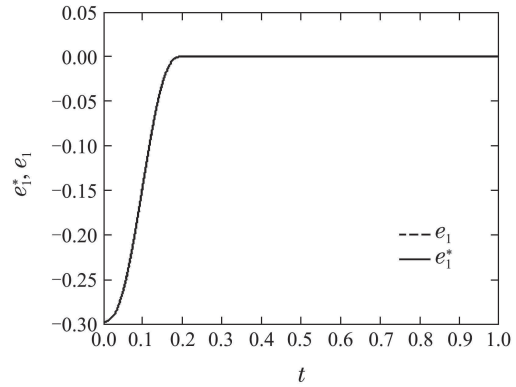


图3  $e_1$ 及其期望 $e_1^*$

Fig. 3 The error  $e_1$  and its desired  $e_1^*$

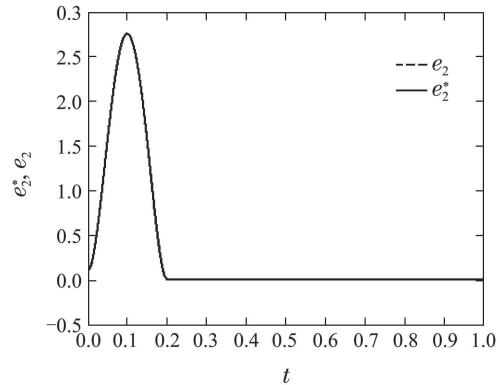


图4  $e_2$ 及其期望 $e_2^*$

Fig. 4 The error  $e_2$  and its desired  $e_2^*$

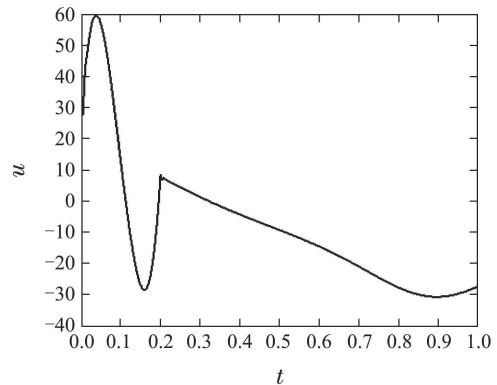


图5 控制输入

Fig. 5 Control input

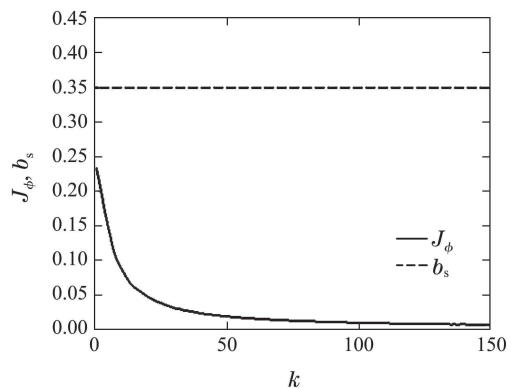
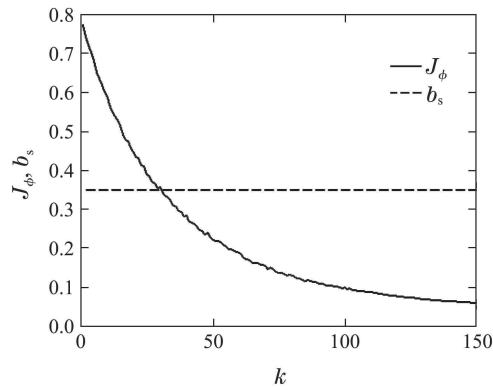


图6  $J_\phi$ 收敛过程

Fig. 6 The convergence performance of  $J_\phi$

图 7  $J_\phi$  收敛过程Fig. 7 The convergence performance of  $J_\phi$ 

## 7 结论(Conclusion)

本文研究非参数不确定系统的学习控制算法, 选择形式简单的障碍Lyapunov函数设计控制器, 使得系统误差在整个作业区间以预设精度跟踪期望误差轨迹, 实现初值大小任意的系统状态在预设的部分作业区间精确跟踪参考信号, 并确保在各次迭代过程中对系统状态进行约束. 本文采用鲁棒方法与学习方法相结合的策略来处理非参数不确定性, 并基于滤波误差反馈设计全饱和学习律. 仿真结果表明, 文中提出的控制方法能有效地解决任意初态下的部分作业区间完全跟踪问题.

## 参考文献(References):

- [1] HAM C, QU Z H, KALOUST J. Nonlinear learning control for a class of nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2001, 37(3): 419 – 428.
- [2] XU J X, TAN Y. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1940 – 1945.
- [3] TAYEBI A. Adaptive iterative learning control for robot manipulators [J]. *Automatica*, 2004, 40(7): 1195 – 1203.
- [4] CHIEN C J, TAYEBI A. Further results on adaptive iterative learning control of robot manipulators [J]. *Automatica*, 2008, 44(3): 830 – 837.
- [5] YIN C, XU J X, HOU Z S. A high-order internal model based learning control scheme for nonlinear systems with time-iteration-varying parameters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(11): 2665 – 2670.
- [6] MARINO R, TOMEI P, VERRELLI C M. Robust adaptive learning control for nonlinear systems with extended matching unstructured uncertainties [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, 22(6): 645 – 675.
- [7] XU J X, YAN R. On repetitive learning control for periodic tracking tasks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(11): 1842 – 1848.
- [8] 陈彭年, 秦化淑. 不确定非线性系统的周期信号自适应跟踪 [J]. *系统科学与数学*, 2009, 29(10): 1343 – 1352. (CHEN Pengnian, QIN Huashu. Adaptive tracking control of periodic signals for a class of uncertain nonlinear systems [J]. *Journal of*

*Systems Science and Mathematical Sciences*, 2009, 29(10): 1343 – 1352.)

- [9] 戴喜生, 田森平. 一阶强双曲分布参数系统的迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(8): 1086 – 1089. (DAI Xisheng, TIAN Senping. Iterative learning control for first order strong hyperbolic distributed parameter systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1086 – 1089.)
- [10] 刘山, 刘杰. 非最小相位系统的扩展Laguerre基函数迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(8): 985 – 992. (LIU Shan, LIU Jie. Extended Laguerre basis function based iterative learning control for non-minimum phase systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 985 – 992.)
- [11] 吕庆, 方勇纯, 任道. 含非严格重复扰动的抗扰迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(9): 1190 – 1197. (LÜ Qing, FANG Yongchun, REN Xiong. Anti-disturbance iterative learning control for nonlinear systems with time-iteration-varying disturbances [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(9): 1190 – 1197.)
- [12] 郭晓永, 李俊民. 一种新的复杂动态网络学习控制的自适应同步算法 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(8): 1017 – 1024. (GUO Xiaoyong, LI Junmin. New adaptive synchronization algorithm for complex dynamical networks via learning control approach [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1017 – 1024.)
- [13] CHIEN C J. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, 12(5): 724 – 732.
- [14] 严求真, 孙明轩. 一类非线性系统的误差轨迹跟踪鲁棒学习控制算法 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(1): 23 – 30. (YAN Qiuzhen, SUN Mingxuan. Error trajectory tracking by robust learning control for nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(1): 23 – 30.)
- [15] DIXON W E, ZERGEROGLU E, DAWSON D M, et al. Repetitive learning control: a Lyapunov-based approach [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2002, 32(4): 538 – 545.
- [16] SUN M X, GE S S, MAREELS I M Y. Adaptive repetitive learning control of robotic manipulators without the requirement for initial repositioning [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2006, 22(3): 563 – 568.
- [17] TEE K P, GE S S, TAY E H. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(4): 918 – 927.
- [18] JIN X, XU J X. Iterative learning control for output-constrained systems with both parametric and nonparametric uncertainties [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2508 – 2516.
- [19] 孙明轩, 张伟博, 严求真. 非参数不确定系统约束迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(4): 479 – 484. (SUN Mingxuan, ZHANG Weibo, YAN Qiuzhen. Constrained iterative learning control of a class of nonparametric uncertain systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 479 – 484.)

## 作者简介:

**严求真** (1972–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: zjyqz@126.com;

**孙明轩** (1961–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn.