

不确定统一混沌系统平衡点的渐近稳定

沈志萍¹, 邬依林^{2,3†}

(1. 河南师范大学 数学与信息科学学院, 大数据统计分析与优化控制河南省工程实验室, 河南 新乡 453007;

2. 广东第二师范学院 计算机科学系, 广东 广州 510310; 3. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 研究不确定统一混沌系统平衡点的渐近稳定问题. 利用滑模控制理论, 给出了此类系统的滑模控制器的设计新方法和控制律算法. 该控制器使得误差空间任一点出发的运动都在有限时间到达滑动模态, 并沿切换面渐近到达原点, 以达到将统一混沌系统控制到平衡点的目的. 与现有文献所得结论相比, 该文所设计的控制器算法具有抖振小、平稳性好和保守性小等优点. 运动方程分析和仿真结果都验证了结论的有效性.

关键词: 统一混沌系统; 滑模控制; 渐近稳定

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Asymptotic stability of equilibrium points of uncertain unified chaotic systems

SHEN Zhi-ping¹, WU Yi-lin^{2,3†}

(1. Henan Engineering Laboratory for Big Data Statistical Analysis and Optimal Control,

School of Mathematics and Information Sciences, Henan Normal University, Xinxiang Henan 453007, China;

2. Department of Computer Science, Guangdong University of Education, Guangzhou Guangdong 510310, China;

3. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: We investigate the asymptotic stability problem of uncertain unified chaotic systems. Using sliding-mode control theory, we develop a new method for designing the sliding-mode controller and its related control law for this type of systems. This controller can make the movement starting from any point in the error space to enter the sliding mode in a finite time and asymptotically reach the origin on the switching surface, thus, driving the uncertain unified chaotic system to the equilibrium point. Compared with the existing controllers, the designed one exhibits many advantages, such as small chattering, good stability and less conservative. The analysis of the motion equation and the simulation results demonstrate that this method is effective.

Key words: unified chaotic systems; sliding mode control; asymptotic stability

1 引言(Introduction)

当代英文中“Chaos”的词意指“混乱无序”,其涵义与科学和工程学中非线性系统理论中所描述的“确定性的随机现象”比较贴近,因而被借用来称呼这些异常现象.从现象看,混沌运动貌似随机过程,而实际上混沌运动与随机过程有着本质的区别,混沌有着如下的特性^[1]:初值敏感性、有界性、随机性、遍历性、普适性、分维性和正的最大Lyapunov指数等.需要指出的是,混沌的识别仍是一个尚未完全解决的课题,识别混沌各种数值特征的适用性、相互关系以及算法的改进等都有待深入研究.

在许多情况下都可以观察到混沌运动的存在.由于混沌信号固有的连续宽带和似噪声等特性,为保密通信提供了高度保密的手段,混沌控制、同步及在保密通信中的应用吸引了众多学者的注意^[1-11].但是,由于混沌系统对初值的极其敏感性和长时间的不可预测性,混沌控制已成为混沌应用的关键环节.自从1987年, V. V. Alekseev等人^[12], 1989年A. Hubler^[13]发表了控制混沌的论文以及1990年E. Ott^[14]等人提出OGY方法以来,国内外已经提出许多不同的混沌控制方法,主要有以下几类:反馈控制法^[15-16]、自适应控制法^[17]、神经网络控制法^[18]和滑模控制^[4, 19]等.

收稿日期: 2014-09-07; 录用日期: 2015-07-14.

†通信作者. E-mail: lyw@gdei.edu.cn; Tel.: +86 20-34115714.

本文责任编辑: 席在荣.

国家自然科学基金项目(61273109, 60774057), 广东第二师范学院教授博士科研专项经费项目(2014ARF25), 河南师范大学博士科研启动经费(5101019170158)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61273109, 60774057), Appropriative Researching Fund for Professors and Doctors, Guangdong University of Education (2014ARF25) and Foundation for Ph.D. of Henan Normal University, China (5101019170158).

2002年, 陈关荣等人提出一个新的混沌系统, 该系统将Lorenz吸引子和Chen吸引子连接起来, Lü系统是它的一个特例, 故称其为统一混沌系统^[20]. 由于统一混沌系统所具有的特殊性质, 例如形式非常简单且仅有一个参数, 可以用能量壁垒原理等进行系统的动力学行为分析: 连接了Lorenz系统和Chen系统, 并且实现了在整个参数谱上从一个系统到另一个系统的连续演变等等. 从一开始对它的控制就引起了不少人的注意. 文献[21]研究了统一混沌系统的反馈控制同步问题; 文献[22]研究了统一混沌系统的投影同步与控制问题; 文献[23]对系统具有未知参数时, 运用滑模变结构控制实现了平衡点的镇定. 文献[24]根据Pontryagin最小值原理为统一混沌系统设计约束控制器, 将统一混沌系统的状态镇定到它的不稳定的平衡点, 并提出了bang-bang控制和逻辑切换相结合的方式以克服bang-bang控制的局限性, 文献[25]根据无源控制理论, 提出了统一混沌系统的无源等效控制方案, 实现了系统不同平衡点的稳定控制. 目前的各种混沌控制方法中没有一种方法是全面的, 或是唯一有效的.

本文利用滑动模态和非线性输入研究了一类具有外部扰动统一混沌系统的渐近稳定控制问题^[20]. 给出滑动模态稳定的充分条件、新的控制律算法和滑模到达时间. 所设计的控制律算法, 与文献[19]所得控制律算法相比, 二者都能够保证系统的运动到达切换面, 从而保证误差系统渐近稳定, 但文献[19]所给的控制律算法, 不能提供到达速度的大小, 快速性无法保证且保守性大, 而本文所给的控制律算法改进了滑模到达运动快速性, 也有效地削弱了滑动模态的抖振, 系统动态性能得到明显改善, 另外该算法也减少了控制器参数设计的保守性. 运动方程分析和仿真结果都证实了这一点.

2 统一混沌系统的控制(Control for a class of unified chaotic system)

考虑如式(1)所示的一类统一混沌系统平衡点的调节问题:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25\alpha + 10)(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = (28 - 35\alpha)x_1 + (29\alpha - 1)x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \frac{8 + \alpha}{3}x_3, \end{cases} \quad (1)$$

其中参数 $\alpha \in [0, 1]$, 对于 $\alpha \in [0, 1]$ 系统(1)均为混沌态, α 由0逐渐增加到1时, 系统(1)也由Lorenz系统逐渐过渡到Chen系统, 按照文献[20]的定义, 当 $\alpha \in [0, 0.8)$ 时, 系统(1)属于广义Lorenz系统, 满足 $a_{12}a_{21} > 0$; 当 $\alpha \in (0.8, 1]$ 时, 系统(1)属于广义Chen系统, 满足 $a_{12}a_{21} < 0$; 而当 $\alpha = 0.8$ 时, 系统(1)满足 $a_{12}a_{21} = 0$, 具有连接广义Lorenz系统和Chen系统的重要作用. 这一系统为混沌控制与同步的研究提供了新的数学模型, 使得基于统一模型的混沌同步在保密通信工程

中得到实际应用, 但仍有很多问题进一步完善, 比如把统一混沌系统同步方法研究与先进控制理论和方法相结合、提高统一混沌系统同步性能研究、基于统一混沌系统通信的非线性电路研究等.

本文的目的是设计控制器, 使具有不确定性外部扰动的受控统一混沌系统的状态收敛到平衡点 (x_1^0, x_2^0, x_3^0) .

设被控系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25\alpha + 10)(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = (28 - 35\alpha)x_1 + (29\alpha - 1)x_2 - x_1x_3 + \Delta f(x_1, x_2, x_3) + \psi(u), \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \frac{8 + \alpha}{3}x_3. \end{cases} \quad (2)$$

假设 Δf 为系统的不确定性, 满足 $|\Delta f| \leq \gamma \|x\|$, γ 为一正实数; 假设 $\psi(u)$ 为非线性控制并满足:

$$\beta_1 u^2 \leq u\psi(u) \leq \beta_2 u^2, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2. \quad (3)$$

例如:

$$\psi(u(t)) = [0.8 + 0.2 \sin u(t)]u(t),$$

其图像如图1所示.

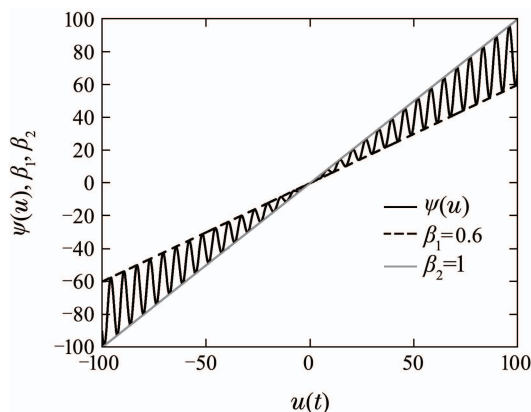


图1 非线性函数 $\psi(u(t)) = [0.8 + 0.2 \sin u(t)]u(t)$

Fig. 1 Nonlinear function $\psi(u(t)) = [0.8 + 0.2 \sin u(t)]u(t)$

设 (x_1^0, x_2^0, x_3^0) 是统一混沌系统(1)的平衡点, 则下式成立:

$$\begin{cases} 0 = (25\alpha + 10)(x_2^0 - x_1^0), \\ 0 = (28 - 35\alpha)x_1^0 + (29\alpha - 1)x_2^0 - x_1^0x_3^0, \\ 0 = x_1^0x_2^0 - \frac{8 + \alpha}{3}x_3^0. \end{cases} \quad (4)$$

记 $e_i = x_i - x_i^0$, $i = 1, 2, 3$, 将式(2)减式(4)得误差系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (25\alpha + 10)(e_2 - e_1), \\ \dot{e}_2 = (28 - 35\alpha - x_3^0)e_1 + (29\alpha - 1)e_2 - e_1e_3 - x_1^0e_3 + \psi(u) + \Delta f(x, t), \\ \dot{e}_3 = e_1e_2 + x_2^0e_1 + x_1^0e_2 - \frac{8 + \alpha}{3}e_3, \end{cases} \quad (5)$$

于是平衡点的调节问题, 就转化为误差系统(5)的渐近

稳定问题. 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

3 滑动模态设计(Sliding mode design)

考虑到系统(2)和(5)中含有不确定项, 本文采用滑动模态控制, 借助滑动模态的不变性来保证 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 的实现. 为证明主要结论, 先给出几个引理.

引理 1 若系统 A 稳定且是对角矩阵, 则存在实数 λ , 使得 $\|e^{At}\| \leq e^{-\lambda t}$.

证 对于对角矩阵 A , 可写为 $A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 其中 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为矩阵 A 的对角线元素, 同时也是矩阵 A 特征根, 记 $\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 则由对角阵的矩阵指数函数性质可得

$$e^{At} = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\},$$

从而

$$\|e^{At}\| = \|\text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}\| \leq e^{\lambda_{\max} t}.$$

令 $\lambda = -\lambda_{\max} > 0$, 则有 $\|e^{At}\| \leq e^{-\lambda t}$. 证毕.

引理 2 若系统 A 稳定且是对角矩阵, 同时

$$\|f(x, t)\| \leq \beta e^{-\zeta t}, \quad \beta > 0, \quad \zeta > 0,$$

则系统

$$\dot{x} = Ax + f(x, t) \quad (6)$$

渐近稳定.

证 解方程(6)得

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}f(x(\tau), \tau)d\tau,$$

从而

$$\|x(t)\| \leq \|e^{At}\| \cdot \|x(0)\| + \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\| \cdot \|f(x(\tau), \tau)\| d\tau.$$

记 $-\lambda$ 为 A 的特征根的最大实部, 由引理 1 可得

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\|e^{-\lambda t} + \frac{\beta}{\lambda - \zeta} e^{-\lambda t} e^{(\lambda - \zeta)\tau} \Big|_0^t = e^{-\lambda t} \|x(0)\| + \frac{\beta}{\lambda - \zeta} (e^{-\zeta t} - e^{-\lambda t}) \rightarrow 0.$$

证毕.

基于上述引理, 给出滑动模态的设计.

定理 1 取切换函数为

$$s(t) = -(1 - \delta)e_1(t) + e_2(t), \quad \delta > 0,$$

则滑动方程渐近稳定.

证 取切换函数

$$s(t) = c_1 e_1(t) + c_3 e_3(t) + e_2(t), \quad (7)$$

其中 c_1, c_3 为待定参数.

在切换面上 $s(t) = 0$, 从而由式(7)可得

$$e_2(t) = -c_1 e_1(t) - c_3 e_3(t). \quad (8)$$

将式(8)代入误差方程(5)的第1和第3个方程, 得滑动方程:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -(25\alpha + 10)(c_1 + 1)e_1 - (25\alpha + 10)c_3 e_3, \\ \dot{e}_3 = -(e_1 + x_1^0)(c_1 e_1 + c_3 e_3) + x_2^0 e_1 - \frac{8+\alpha}{3} e_3, \end{cases}$$

写成矢量形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Upsilon(c_1 + 1) & -\Upsilon c_3 \\ 0 & -\frac{8+\alpha}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ (e_1 + x_1^0)(c_1 e_1 + c_3 e_3) - x_2^0 e_1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

其中 $\Upsilon = (25\alpha + 10)$.

取 $c_1 = -1 + \delta, \delta > 0, c_3 = 0$, 则式(9)变为

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Upsilon\delta & 0 \\ 0 & -\frac{8+\alpha}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ (c_1(e_1 + x_1^0) - x_2^0)e_1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

解式(10)的第1个方程得 $e_1(t) = e_1(0)e^{-(25\alpha+10)\delta t} \rightarrow 0$, 从而 $e_1(t)$ 指数稳定. 进而

$$\begin{aligned} & \|(c_1(e_1(t) + x_1^0) - x_2^0)e_1(t)\| \leq \\ & \|c_1(e_1(t) + x_1^0) - x_2^0\| \cdot \|e_1(t)\| \end{aligned}$$

指数趋于零, 由引理 2 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} [e_1, e_3]^T = 0$, 从而可得滑动模态渐近稳定.

证毕.

4 变结构控制律设计(Variable structure control law design)

定理 1 讨论了系统在切换面上的稳定性, 下面将给出系统控制器设计, 使得误差空间任一点出发的运动都在有限时间内到达切换面.

定理 2 取控制律

$$u = \frac{1}{2}(u^+ + u^-) + \frac{1}{2}(u^+ - u^-) \text{sgn } s(t), \quad (11)$$

其中:

$$u^+ = -\frac{1}{2\beta_1} (|ks| + \epsilon + \Gamma(s, e) + \gamma\|x\|) - \frac{1}{2\beta_1} |\Gamma(s, e) + \gamma\|x\| + |ks| + \epsilon|, \quad (12)$$

$$u^- = \frac{1}{2\beta_1} (|ks| + \epsilon - \Gamma(s, e) + \gamma\|x\|) + \frac{1}{2\beta_1} |-\Gamma(s, e) + \gamma\|x\| + |ks| + \epsilon|, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(s, e) = & -(1 - \delta)(25\alpha + 10)(e_2 - e_1) + \\ & (29\alpha - 1)e_2 - e_1 e_3 - x_1^0 e_3 + \\ & (28 - 35\alpha - x_3^0)e_1. \end{aligned} \quad (14)$$

参数 $k > 0, \epsilon > 0, s(t)$ 为式(7)所示的切换面. 则从误差空间任一点出发的运动, 都能在有限时间到达切换面, 且到达切换面的时间为

$$T \leq \frac{1}{k} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}|s(0)| + 1\right). \quad (15)$$

证 首先证明从误差空间任一点出发的运动, 都能在有限时间到达切换面.

容易验证式(12)和式(13)可重写为

$$u^+ = \min\left\{\frac{1}{\beta_1}(-|ks| - \epsilon - \Gamma(s, e) - \gamma\|x\|), 0\right\}, \quad (16)$$

$$u^- = \max\left\{\frac{1}{\beta_1}(|ks| + \epsilon - \Gamma(s, e) + \gamma\|x\|), 0\right\}. \quad (17)$$

分两种情形考虑:

1) 当 $s(t) > 0$ 时, 由式(11)(16)有 $u = u^+ \leq 0$, 从而可得

$$\beta_1 u^2 \leq u\psi(u) \leq \beta_2 u^2, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2.$$

上式两边同除 $u < 0$, 得 $\beta_2 u \leq \psi(u) \leq \beta_1 u$. 于是由式(5)得

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -(1 - \delta)\dot{e}_1 + \dot{e}_2 = \\ &= -(1 - \delta)(25\alpha + 10)(e_2 - e_1) + \Phi e_1 - e_1 e_3 + \\ &= (29\alpha - 1)e_2 - x_1^0 e_3 + \psi(u) + \Delta f(x, t) \leq \\ &= -(1 - \delta)(25\alpha + 10)(e_2 - e_1) + \Phi e_1 + \beta_1 u + \\ &= (29\alpha - 1)e_2 - e_1 e_3 - x_1^0 e_3 + |\Delta f(x, t)| \leq \\ &= \Gamma(s, e) + \beta_1 u^+ + \gamma\|x\| \leq \\ &= \Gamma(s, e) + \gamma\|x\| - |ks| - \epsilon - \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| = \\ &= -|ks| - \epsilon, \quad s > 0, \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\Phi = (28 - 35\alpha - x_3^0)$.

2) 当 $s(t) < 0$ 时, 由式(11)(17), 有 $u = u^- \geq 0$, 从而 $\psi(u) \geq \beta_1 u$, 可得

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -(1 - \delta)(25\alpha + 10)(e_2 - e_1) + \\ &= (28 - 35\alpha - x_3^0)e_1 + (29\alpha - 1)e_2 + \\ &= \psi(u) + \Delta f(x, t) - e_1 e_3 - x_1^0 e_3 \geq \\ &= -(1 - \delta)(25\alpha + 10)(e_2 - e_1) - e_1 e_3 + \\ &= (28 - 35\alpha - x_3^0)e_1 + (29\alpha - 1)e_2 + \\ &= \beta_1 u - \gamma\|x\| - x_1^0 e_3 = \\ &= \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| + \beta_1 u^- \geq \\ &= \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| + |ks| + \epsilon - \\ &= \Gamma(s, e) + \gamma\|x\| \geq |ks| + \epsilon, \quad s < 0. \end{aligned} \quad (19)$$

由式(18)–(19)可得, 从误差空间任一点出发的运动,

都能在有限时间到达切换面.

其次求解到达切换面的时间.

对于到达时间的计算, 解式(18)–(19)得

$$\begin{cases} \dot{s} \leq -|ks| - \epsilon, & s > 0, \\ \dot{s} \geq |ks| + \epsilon, & s < 0, \end{cases} \quad (20)$$

进而求解式(20)得

$$\begin{cases} s(t) \leq s(0)e^{-kt} - \epsilon \int_0^t e^{-k(t-\tau)} d\tau, \\ \quad s(0) > 0, \quad s(t) \geq 0; \\ s(t) \geq s(0)e^{-kt} + \epsilon \int_0^t e^{-k(t-\tau)} d\tau, \\ \quad s(0) < 0, \quad s(t) \leq 0. \end{cases}$$

记到达切换面的时间为 T , 则由切换面上 $s(t) = 0$, 由上式可得

$$\begin{cases} 0 \leq s(0)e^{-kT} - \frac{\epsilon}{k}(1 - e^{-kT}), \\ \quad s(0) > 0, \quad s(t) = 0; \\ 0 \geq s(0)e^{-kT} + \frac{\epsilon}{k}(1 - e^{-kT}), \\ \quad s(0) < 0, \quad s(t) = 0. \end{cases}$$

由此解得

$$T \leq \frac{1}{k} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}|s(0)| + 1\right).$$

证毕.

注 1 定理2中控制律算法, 与文献[19]所给的控制律算法相比, 虽然都能够保证系统运动能够到达切换面, 从而保证误差系统渐近稳定, 但定理2的控制律算法具有以下优点:

1) 文献[19]所给控制律算法, 只能保证 $s(t)\dot{s}(t) < 0$, 不能提供到达速度的大小, 快速性无法保证; 但本文定理2中的控制律算法可保证

$$\begin{cases} \dot{s} \leq -|ks| - \epsilon, & s > 0, \\ \dot{s} \geq |ks| + \epsilon, & s < 0, \end{cases}$$

到达切换面时间为 $T \leq \frac{1}{k} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}|s(0)| + 1\right)$, 快速性好.

2) 文献[19]的控制律中使用的是 $|\Gamma(s, e)|$, 本文定理2的控制律中使用的是 $\Gamma(s, e)$, 保守性小, 抖振小, 平稳性好.

5 控制律的进一步改进(An improved control law)

从式(20)可以看出, 定理2中的控制律, 只限制了最低到达速度: $|\dot{s}| \geq |ks| + \epsilon$. 没有限制最高到达速度, 这就可能出现, 到达速度过快, 从而使滑动模态产生剧烈抖振. 比如:

当 $s > 0$, 且

$$\begin{cases} \Gamma(s, e) + \gamma\|x\| \ll -|ks| - \epsilon, \\ -|ks| - \epsilon - \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| > 0, \end{cases}$$

(\ll 表示远小于), 由式(11)(16), 有 $u = u^+ = 0$, 进而

$$\dot{s} \leq \Gamma(s, e) + \gamma\|x\| \ll -|ks| - \epsilon, \quad s > 0. \quad (21)$$

类似的, 当 $s < 0$, 且

$$\begin{cases} \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| \gg |ks| + \epsilon, \\ 0 > |ks| + \epsilon - \Gamma(s, e) + \gamma\|x\| \end{cases}$$

时, 由式(11)和式(17), 有 $u = u^- = 0$, 从而

$$\dot{s} \geq \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| \gg |ks| + \epsilon, \quad s < 0, \quad (22)$$

式(21)–(22)表明, 按控制律(11)–(14)设计的控制器, 有可能会

$$\begin{cases} \dot{s} \ll -|ks| - \epsilon, \quad s > 0, \\ \dot{s} \geq |ks| + \epsilon, \quad s < 0, \end{cases}$$

即到达切换面速度很大的情况, 从而导致滑动模态势必产生剧烈的抖振, 系统动态品质差. 为了克服上述缺点, 对定理2的控制律作如下改进, 取

$$\begin{aligned} u_*^+ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)(|ks| + \epsilon + \Gamma(s, e) + \gamma\|x\|) - \\ &\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right)|\Gamma(s, e) + \gamma\|x\| + |ks| + \epsilon|, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} u_*^- &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)(-|ks| - \epsilon + \Gamma(s, e) - \gamma\|x\|) - \\ &\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}\right)|\Gamma(s, e) - \gamma\|x\| - |ks| - \epsilon|. \end{aligned} \quad (24)$$

即给出如下改进控制器的定理, 该定理可改变因到达速度过快, 从而使滑动模态产生剧烈抖振.

定理3 取控制律

$$u = \frac{1}{2}(u_*^+ + u_*^-) + \frac{1}{2}(u_*^+ - u_*^-)\text{sgn } s, \quad (25)$$

则从误差空间任一点出发的运动, 都能在有限时间到达切换面, 且到达切换面的时间为

$$T \leq \frac{1}{k} \ln\left(\frac{k}{\epsilon}|s(0)| + 1\right),$$

同时使得到达切换面的速度不会很大.

证 分4种情形考虑:

1) 当 $s > 0$, $|ks| + \epsilon + \Gamma(s, e) + \gamma\|x\| > 0$ 时, 有

$$u_*^+ = \frac{1}{\beta_1}(-|ks| - \epsilon - \Gamma(s, e) - \gamma\|x\|) < 0,$$

从而由切换面方程可得

$$\begin{aligned} \dot{s} &\leq \Gamma(s, e) + \beta_1 u_*^+ + \gamma\|x\| \leq \\ &\Gamma(s, e) + \gamma\|x\| - |ks| - \epsilon - \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| \leq \\ &-|ks| - \epsilon. \end{aligned} \quad (26)$$

2) 当 $s > 0$, $|ks| + \epsilon + \Gamma(s, e) + \gamma\|x\| < 0$ 时, 有

$$u = u_*^+ = -\frac{1}{\beta_2}(|ks| + \epsilon + \Gamma(s, e) + \gamma\|x\|) > 0.$$

由式(3)可得 $\psi(u) \leq \beta_2 u$, 代入切换面方程可得

$$\dot{s} \leq \Gamma(s, e) + \psi(u) + \gamma\|x\| \leq$$

$$\Gamma(s, e) + \beta_2 u_*^+ + \gamma\|x\| \leq$$

$$\Gamma(s, e) + \gamma\|x\| - |ks| - \epsilon - \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| \leq -|ks| - \epsilon. \quad (27)$$

3) 当 $s < 0$, $-|ks| - \epsilon + \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| > 0$ 时,

有 $u = u_*^- = \frac{1}{\beta_2}(|ks| + \epsilon - \Gamma(s, e) + \gamma\|x\|) < 0$. 由式(3)可得 $\psi(u) \geq \beta_2 u$, 代入切换面方程可得

$$\begin{aligned} \dot{s} &\geq \Gamma(s, e) + \psi(u) - \gamma\|x\| \geq \\ &\Gamma(s, e) + \beta_2 u_*^- - \gamma\|x\| \geq \\ &\Gamma(s, e) - \gamma\|x\| + |ks| + \epsilon - \Gamma(s, e) + \gamma\|x\| \geq \\ &|ks| + \epsilon. \end{aligned} \quad (28)$$

4) 当 $s < 0$, $-|ks| - \epsilon + \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| < 0$ 时,

有 $u_*^- = \frac{1}{\beta_1}(|ks| + \epsilon - \Gamma(s, e) + \gamma\|x\|) > 0$, 从而可得 $\psi(u) \geq \beta_1 u$, 代入切换面方程可得

$$\begin{aligned} \dot{s} &\geq \Gamma(s, e) + \psi(u) - \gamma\|x\| \geq \\ &\Gamma(s, e) + \beta_2 u_*^- - \gamma\|x\| \geq \\ &\Gamma(s, e) - \gamma\|x\| + |ks| + \epsilon - \Gamma(s, e) + \gamma\|x\| \geq \\ &|ks| + \epsilon. \end{aligned} \quad (29)$$

由式(26)–(29)可得定理3的结论成立. 证毕.

两个控制律比较:

从定理2和定理3的证明可以看出: 当

$$\begin{cases} s > 0, \quad -|ks| - \epsilon - \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| < 0, \\ s < 0, \quad -|ks| - \epsilon + \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| > 0 \end{cases}$$

时, 由定理2控制律所得到达速度为

$$\begin{cases} \dot{s} \leq \Gamma(s, e) + \beta_1 u^+ + \gamma\|x\| = -|ks| - \epsilon, \quad s > 0, \\ \dot{s} \geq \Gamma(s, e) + \beta_2 u^- - \gamma\|x\| = |ks| + \epsilon, \quad s < 0. \end{cases}$$

由定理3控制律所得到达速度为

$$\begin{cases} \dot{s} \leq \Gamma(s, e) + \beta_1 u_*^+ + \gamma\|x\| = -|ks| - \epsilon, \quad s > 0, \\ \dot{s} \geq \Gamma(s, e) + \beta_2 u_*^- - \gamma\|x\| = |ks| + \epsilon, \quad s < 0. \end{cases}$$

由上面两式可以看出两个控制律都得出同样的到达速度, 但当

$$\begin{cases} s > 0, \quad \Gamma(s, e) + \gamma\|x\| \ll -|ks| - \epsilon, \\ s < 0, \quad \Gamma(s, e) - \gamma\|x\| \gg |ks| + \epsilon \end{cases}$$

时, 按定理2所给控制律, 可得

$$u = u^- = u^+ = 0.$$

进而将控制律代入切换面计算得

$$\begin{cases} \dot{s} \leq \Gamma(s, e) + \beta_1 u + \gamma\|x\| \ll -|ks| - \epsilon, \quad s > 0, \\ \dot{s} \leq \Gamma(s, e) + \beta_2 u - \gamma\|x\| \gg |ks| + \epsilon, \quad s < 0, \end{cases} \quad (30)$$

而按定理3所给控制律, 此时

$$u = u_*^+ = u_*^- = -\frac{|ks| + \epsilon + \Gamma(s, e) + \gamma\|x\|}{\beta_2} > 0.$$

将控制律代入切换面计算得

$$\begin{cases} \dot{s} \leq \Gamma(s, e) + \beta_2 u_*^+ + \gamma \|x\| = -|ks| - \epsilon, & s > 0, \\ \dot{s} \geq \Gamma(s, e) + \beta_2 u_*^- - \gamma \|x\| = |ks| + \epsilon, & s < 0. \end{cases} \quad (31)$$

从式(30)–(31)可以看出, 改进的控制律可抑制到达切换面速度过快的情况, 通过 $k > 0, \epsilon > 0$ 两参数的适当选取, 既可保证好的快速性, 又可减小抖振, 改善系统的动态品质.

6 示例与仿真(Simulation example)

本节给出仿真说明定理3的有效性, 同时与文献[19]所得控制律算法作对比.

当 $\alpha = 1$, 统一混沌系统(1)代表Chen氏吸引子, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 35(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = -7x_1 + 28x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - 3x_3. \end{cases} \quad (32)$$

利用Simulink仿真, 图2所示其混沌图像, 初值

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1.00, -1.00, -1.01).$$

容易求出系统(1)的3个平衡点:

$$O_1(0, 0, 0), O_2(3\sqrt{7}, 3\sqrt{7}, 21), O_3(-3\sqrt{7}, -3\sqrt{7}, 21).$$

带有扰动的被控系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 35(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = -7x_1 + 28x_2 - x_1x_3 + \Delta f(x, t) + \psi(u), \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - 3x_3, \end{cases} \quad (33)$$

其中外部扰动

$$\Delta f = 0.5 \cos(3\pi t) \|x\|, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

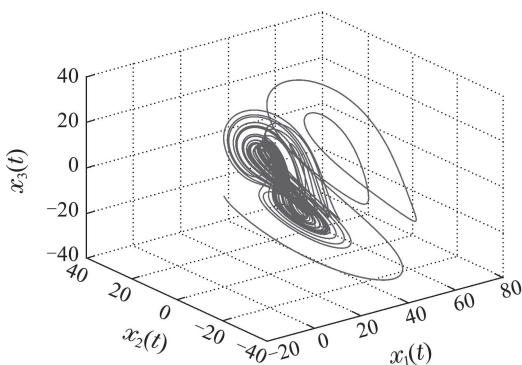


图 2 Chen系统混沌图

Fig. 2 Phase portraits of Chen chaotic system

显然参数 $\gamma = 0.5$, 非线性输入

$$\psi(u(t)) = [0.8 + 0.2 \sin u(t)]u(t).$$

则由式(3)得参数 $\beta_1 = 0.6, \beta_2 = 1.0$, 其仿真结果如图1所示.

只考虑将具有外部扰动的混沌系统(33)控制到平衡点 O_1 , 其它平衡点的仿真与此平衡点类似.

由式(33)和平衡点 O_1 可得误差方程

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = 35(e_2 - e_1), \\ \dot{e}_2 = -7e_1 + 28e_2 - e_1e_3 + \psi(u) + \Delta f(x, t), \\ \dot{e}_3 = e_1e_2 - 3e_3. \end{cases} \quad (34)$$

6.1 利用本文所给控制律仿真(Simulation example using this paper control law)

依据本文定理1可取切换函数

$$s(t) = -(1 - \delta)e_1 + e_2, \quad (35)$$

其中取参数 $\delta = 2$, 根据本文定理3中式(25), 以及式(14)(23)–(24)取控制律:

$$u(t) = \frac{1}{2}(u_*^+ + u_*^-) + \frac{1}{2}(u_*^+ - u_*^-) \operatorname{sgn} s(t). \quad (36)$$

参数取

$$k = 1, \epsilon = 0.5, c_1 = \delta - 1 = 1.$$

6.2 利用文献[19]所给控制律仿真(Simulation example using paper [19] control law)

依据文献[19]中式(5)–(6)取相应的切换面为

$$\begin{cases} s(t) = e_2(t) + \rho(t), \\ \dot{\rho}(t) = 35e_1 + e_1e_3 + 0.5e_2. \end{cases} \quad (37)$$

根据文献[19]定理1中式(11)取控制律为

$$\begin{cases} u(t) = -2\eta \operatorname{sgn} s(t), \\ \eta = |28e_1 + 27e_2| + 0.5\|x\|. \end{cases} \quad (38)$$

利用Simulink仿真, 结果分别如图3–7所示, 其中所有曲线中实线为本文所给控制律算法仿真所得的结果, 虚线为文献[19]所给控制律算法的仿真结果.

即图像中 $e_1(t), e_2(t), e_3(t), s(t), u(t)$ 表示本文所给控制律算法仿真所得的结果, $e'_1(t), e'_2(t), e'_3(t), s'(t), u'(t)$ 表示文献[19]所给控制律算法仿真所得的结果.

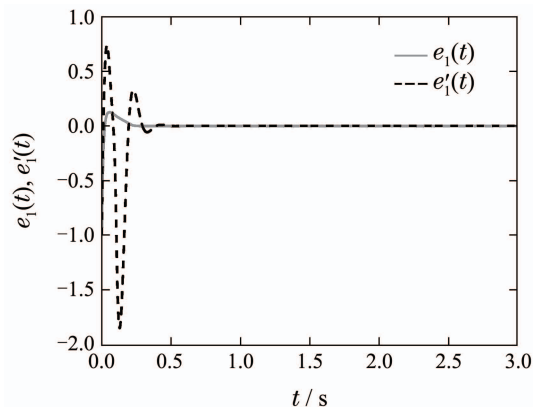


图 3 误差变量 $e_1(t) - t$

Fig. 3 Error variable $e_1(t) - t$

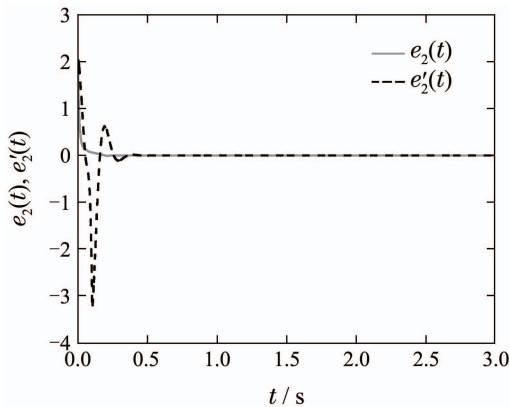
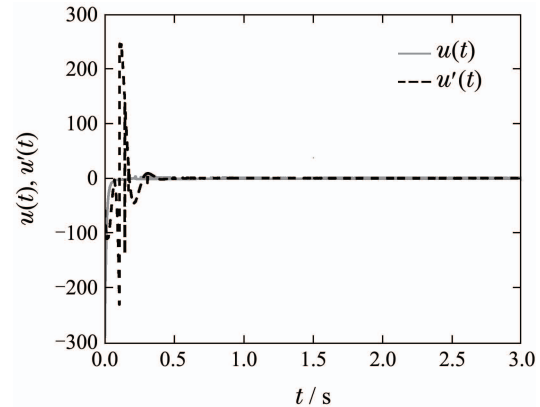
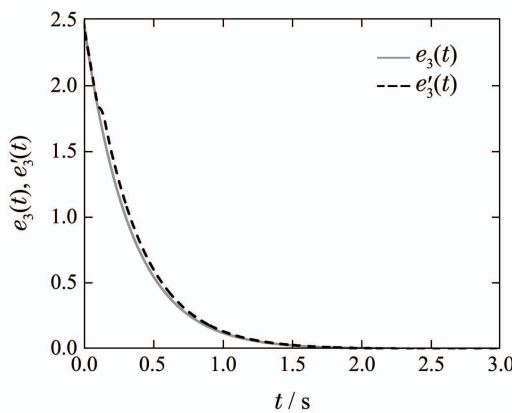
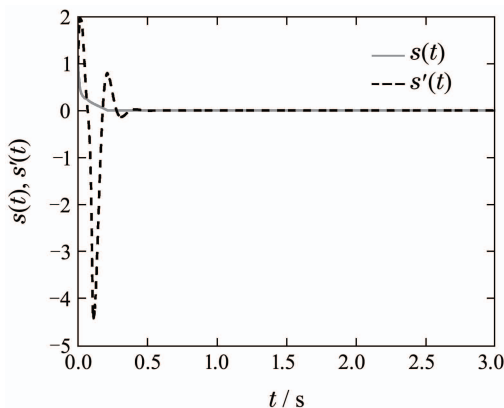
图4 误差变量 $e_2(t) - t$ Fig. 4 Error variable $e_2(t) - t$ 图7 输入变量 $u(t) - t$ Fig. 7 Input variable $u(t) - t$ 图5 误差变量 $e_3(t) - t$ Fig. 5 Error variable $e_3(t) - t$

图3-5是误差曲线,可以看出两个控制器都可以将误差变量很快控制到平衡点附近,但实线部分即本文所给的控制器算法所得的仿真在快速性、平稳性都优于文献[19]所给控制律算法即虚线部分。图6为切换函数关于时间的变化曲线,可以看出本文的方法有效削弱了滑动模态的抖振,远远小于文献[19]滑动模态的抖振。图7为控制函数关于时间的变化曲线,比较可以看出,本文控制律具有较小抖振、平稳性好等优点。

图6 切换面 $s(t) - t$ Fig. 6 Sliding mode surface $s(t) - t$

7 结论(Conclusions)

本文所给的控制律算法很好的实现了具有外部扰动的混沌控制,而且对不确定性有很好的抑制能力,与现有文献所得控制律算法相比,改进了滑模到达运动的快速性,也有效的消弱滑动模态的抖振,另外该算法也减少了控制器参数设计的保守性,运动方程分析和仿真结果都证实了结论的有效性。

参考文献(References):

- [1] MIN Fuhong. *Research some problems in control and synchronization of chaotic systems* [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2007.
(闵富红. 混沌系统同步控制的有关问题研究 [D]. 南京: 南京理工大学, 2007.)
- [2] LI S Y, GE Z M. Fuzzy modeling and synchronization of two totally different chaotic systems via novel fuzzy model [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2011, 41(4): 1015 - 1026.
- [3] YANG X, CAO J, LU J. Synchronization of Markovian coupled neural networks with nonidentical node-delays and random coupling strengths [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, 23(1): 60 - 71.
- [4] YAHYAZADEH M, RANJBAR N, GHADERI R. Synchronization of chaotic systems with known and unknown parameters using a modified active sliding mode control [J]. *ISA Transactions*, 2011, 50(2): 262 - 267.
- [5] FENG X, ZHANG F, WANG W. Global exponential synchronization of delayed fuzzy cellular neural networks with impulsive effects [J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2011, 44(3): 9 - 16.
- [6] LU J, HO D W C, CAO J, et al. Exponential synchronization of linearly coupled neural networks with impulsive disturbances [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22(2): 329 - 335.
- [7] HE W, QIAN F, HAN Q L, et al. Synchronization error estimation and controller design for delayed Lur'e systems with parameter mismatches [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, 23(10): 1551 - 1563.
- [8] ZHOU W, TONG D, GAO Y, et al. Mode and delay dependent adaptive exponential synchronization in pth moment for stochastic delayed neural networks with Markovian switching [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, 23(4): 662 - 668.

- [9] WU Z G, SHI P, SU H, et al. Exponential synchronization of neural networks with discrete and distributed delays under time varying sampling [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, 23(9): 1368 – 1376.
- [10] ZHU Huijian, ZENG Caibin. Scaling and mixed synchronization for different chaotic systems with totally unknown parameters [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(3): 341 – 346.
(朱慧坚, 曾才斌. 参数完全未知的不同混沌系统的尺度与混合同步 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(3): 341 – 346.)
- [11] LI Zhenbo, TANG Jiashi. Chaotic synchronization with parameter perturbation and its secure communication scheme [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(5): 592 – 600.
(李震波, 唐驾时. 参数扰动下的混沌同步控制及其保密通信方案 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(5): 592 – 600.)
- [12] ALEKSEEV V V, LOSKUTOV A Y. Control of a system with a strange attractor through periodic parametric action [J]. *Soviet Physics Doklady*, 1987, 32(4): 1346 – 1348.
- [13] HUBLER A W. Adaptive control of chaotic systems [J]. *Helvetica Physica Acta*, 1989, 62(2): 343 – 346.
- [14] OTT E, GREBOGI C, YORKEJ A. Controlling chaos [J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(11): 1196 – 1199.
- [15] GALLEGO J A. Nonlinear regulation of a Lorenz system by feedback linearization techniques [J]. *Dynamics and Control*, 1994, 4(3): 277 – 298.
- [16] LUO X S, WANG B H, JIANG F. Using random proportional pulse feedback of system variables to control chaos and hyperchaos [J]. *Chinese Physics*, 2001, 10(1): 17 – 20.
- [17] LIU G G, ZHAO Y. Adaptive control on a class of uncertain chaotic systems [J]. *Chinese Physical Letters*, 2005, 22(5): 1069 – 1071.
- [18] LIN C T, JOU C P. Controlling chaos by GA-based reinforcement learning neural network [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1999, 10(4): 846 – 859.
- [19] CHIANG T Y, HUNG M L, YAN J J, et al. Sliding mode control for uncertain unified chaotic systems with input nonlinearity [J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2007, 34(2): 437 – 442.
- [20] LU J H, CHEN G R, CHENG D Z, et al. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(12): 2917 – 2926.
- [21] TAO Chaohai, LU Jun'an, Lü Jinhui. The feedback synchronization of a unified chaotic system [J]. *Acta Physica Sinica*, 2002, 51(7): 1497 – 1501.
(陶朝海, 陆军安, 吕金虎. 统一混沌系统的反馈同步 [J]. 物理学报, 2002, 51(7): 1497 – 1501.)
- [22] LIU Jie, CHEN Shihua, LU Jun'an. Projective synchronization in a unified chaotic system and its control [J]. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52(7): 1595 – 1599.
(刘杰, 陈士华, 陆军安. 统一混沌系统的投影同步与控制 [J]. 物理学报, 2003, 52(7): 1595 – 1599.)
- [23] GUAN X P, HE Y. Stabilizing unstable equilibrium point of unified chaotic systems with unknown parameter using sliding control [J]. *Chinese Physics Letters*, 2004, 21(2): 227 – 229.
- [24] SONG Y Z, ZHAO G Z, QI D L. Some comments on constrained control of chaos [J]. *Physica Letters A*, 2006, 359(6): 624 – 626.
- [25] QI D L, LI X R, ZHAO G Z. Passive control of hybrid chaotic dynamical systems [J]. *Journal of Zhejiang University*, 2004, 38(1): 86 – 89.

作者简介:

沈志萍 (1984–), 女, 博士, 副教授, 主要研究方向为混沌控制、网络化系统分析与设计等, E-mail: zpshen@htu.cn;

邬依林 (1970–), 男, 博士研究生, 教授, 主要研究方向为混沌控制、复杂系统建模、网络化系统分析与设计、智能控制等, E-mail: lyw@gdei.edu.cn.