

## 需求和退货波动环境下库存控制

娄山佐<sup>†</sup>, 田新诚

(山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061)

**摘要:** 随着需求和退货波动的增大, 如何有效控制库存, 成为当前零售企业管理者亟待解决的难题. 在库存水平动态变化表示为Markov调制Lévy过程条件下, 利用水平穿越和多维鞅理论, 分别确定了库存水平分布及循环期望费用和时间函数, 在此基础上, 构建了系统长程平均费用率模型. 最后, 通过仿真试验, 对比了3种订货策略下需求和环境状态变化系统的性能, 并分析了退货对最优控制策略的影响. 进而, 得到一些重要的库存管理启示.

**关键词:** 库存; 退货; 水平穿越; Markov调制; Lévy过程

**中图分类号:** F253.4      **文献标识码:** A

## Inventory control in a fluctuating demand and return environment

LOU Shan-zuo<sup>†</sup>, TIAN Xin-cheng

(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China)

**Abstract:** With the increase of fluctuations in demands and returns, it is now a very difficult problem for retail managers to control their inventory effectively. Under the condition that the inventory level process is expressed as a Markov-modulated Lévy process, the stationary distribution of the inventory level, as well as the expected cycle cost and time functions are derived by utilizing level crossing and multi-dimensional martingale theories. Subsequently, the functions are employed to develop the long-run average cost rate model. Finally, we compare the system performance for three kinds of order policies when the demand rates and the status parameters are varying, and investigate the impact of the returns on the optimal control policy. Consequently, some important management insights are obtained.

**Key words:** inventory; return; level crossing; Markov-modulated; Lévy process

### 1 引言(Introduction)

随着市场竞争的加剧和“七天无理由退货”消费者权益保护法的实施, 我国零售企业面临较大的需求和退货波动. 如去年“双十一”阿里的单日销售额超过350亿元, 同比增长85%. 与此相伴是高达25%的退货率, 部分商家甚至达到40%. 在此环境下, 若采用确定的分布函数描述需求和退货, 无视均值变化, 则会因为方差较大, 不能有效反映它们对库存的影响.

在20世纪60年代, 人们就认识到环境对库存控制的影响<sup>[1]</sup>. 然而, 由于该问题结构复杂和建模困难, 所以, 研究进展很有限<sup>[2]</sup>. 到目前为止, 主要集中在随机需求波动问题. 研究方法是需求分布(或参数)随时间的变化, 与一个表示环境的离散或连续时间Markov链状态转移相对应, 即Markov调制需求过程. 如Song等<sup>[3]</sup>将需求表示为Markov调制Poisson过程基础上, 构建了一个动态规划库存模型. 随后, Brill等<sup>[4]</sup>将该

方法推广到Markov调制常数需求率环境, 并建立一个与环境状态相关的经济订货批量(economic order quantity, EOQ)模型; Zhang等<sup>[5]</sup>还结合了产品的定价策略. 在此基础上, Qi<sup>[6]</sup>又研究随机供应波动问题. 其方法是将供应商服务在供应和中断间转换, 与表示环境Markov链的状态转移相对应. 当状态部分可观时, Arifoglu等<sup>[7]</sup>还采用隐Markov链描述环境. 最近, Kulkarni等<sup>[8]</sup>和Atali等<sup>[9]</sup>又利用该方法解决设备随机故障的生产问题. 尽管针对问题不同, 但上述成果均假设系统无退货且库存是单调变化.

近年来, 为缓解退货对库存的影响, 人们也做了大量工作. 限于篇幅, 仅给出因用户期望不满足而退货的研究成果. 针对退货在数量和时间上的不确定性, Flapper等<sup>[10]</sup>基于退货预测信息, 进行库存控制. Chen等<sup>[11]</sup>和Zhu<sup>[12]</sup>利用产品定价策略, 平衡退货和库存. Shulman等<sup>[13]</sup>还通过向用户收取费用, 缓解退货影响.

收稿日期: 2014-09-09; 录用日期: 2015-01-26.

<sup>†</sup>E-mail: lshanzuo@163.com; Tel.: +86 13295319058.

国家科技重大专项项目(2010ZX04001-161), 国家高技术研究发展计划(“863”计划)项目(2012AA041307), “泰山学者”建设工程专项经费资助. Supported by National Science and Technology Major Project (2010ZX04001-161), National High Technology Research and Development Program of China (“863” Program) (2012AA041307) and Research Fund for the Taishan Scholar Project of Shandong Province of China.

最近, Huang等<sup>[14]</sup>又研究利用二级市场处理多余退货. 另外, 针对退货环境下库存变化非单调的特点, 在采用布朗运动描述库存水平动态变化基础上, Karakayali等<sup>[15]</sup>和Berman等<sup>[16]</sup>分别研究了退货可处理和订单可取消库存问题; Yao<sup>[17]</sup>和Wu等<sup>[18]</sup>给出库存水平控制在某一区间的最优策略. Cadenillas等<sup>[19]</sup>还将库存变化拓展到均值回复过程, 研究库存水平趋近给定目标值问题. 然而, 上述成果均没考虑环境对退货均值的影响.

总之, 利用现有研究成果, 很难有效解决需求和退货波动环境下库存控制问题.

根据新环境下库存运行的特点, 本文在文献[4]基础上, 对其做如下实质推广: 1) 将库存水平随时间变化, 从Markov调制线性函数拓展到Markov调制 Lévy过程; 2) 从库存管理实际出发, 增加存储容量限制. 目的是, 确定出最优库存控制策略. 为此, 本文利用水平穿越和多维鞅理论, 主要研究库存控制模型的构建, 并给出该环境下有关库存管理启示.

### 2 问题的描述(Description of the problem)

一零售商销售某种产品, 并承诺用户不满意可退货. 设退回产品无缺陷, 经检查和重包装等处理后进入库存, 与新产品一样用于满足未来用户需求.

受市场环境影响, 用户需求和退货均发生随机波动. 按习惯表示, 将环境变化对应一个不可约连续时间Markov链  $J = \{J(t), t \geq 0\}$  的状态转移. 这里, 假设  $J$  有 2 个状态, 当  $J(t)$  等于 1(2), 表示时间  $t$  销售形势好(差). 此时, 用户需求率为  $\mu_1(\mu_2)$ ; 退货到达率是参数为  $\lambda_1(\lambda_2)$  的复合Poisson过程. 为得到解析解, 设每批退货数量服从独立的参数为  $\nu_1(\nu_2)$  的指数分布.  $J$  在状态 1(2) 上逗留时间服从均值为  $\gamma_1^{-1}(\gamma_2^{-1})$  的指数分布. 按库存管理一般方法, 设零售商的订货量与环境状态相关, 即当库存水平降到 0 时, 若状态为 1(2), 则订货量为  $q_1(q_2)$ . 设提前期均为 0. 另外, 系统运行期间, 若退货导致库存超出存储容量  $C$ , 则零售商将超出部分打折或转运到其他店销售, 处理时间忽略不计. 设单位退货费(包括产品成本、检查和换包装等费用)及退货处理费分别为  $c_r$  和  $c_d$ ; 单位产品在单位时间库存费为  $c_h$ ; 固定和可变订货费分别为  $c_\pi$  和  $c_o$ . 确定订货量  $q_1$  和  $q_2$ , 使零售商的长程平均总费用率最小.

### 3 模型的建立(Establishment of the model)

据问题描述知, 若初始水平为  $x_0$ , 到下次订货前, 库存水平过程  $X = (X(t))_{t \geq 0}$  为Markov调制Lévy过程, 即

$$X(t) = x_0 - V(t) = x_0 - \sum_{j=1}^2 \int_0^t V_j(\tau) 1_{\{J(\tau)=j\}} d\tau.$$

这里, 对应状态  $j$  的Lévy过程  $V_j(t) = \mu_j t - \sum_{n=1}^{N_j(t)} S_n^j$ . 其

中:  $N_j(t)$  为参数是  $\lambda_j$  的Poisson过程, 表示退货到达批次;  $S_1^j, S_2^j, \dots$  为独立的参数是  $\nu_j$  的指数分布随机变量序列, 表示每批退货数量. 为便于确定退货处理量, 下面, 分析剩余库存空间过程  $W = (W(t))_{t \geq 0}$ . 因超出容量  $C$  的退货被处理了, 故该过程可表示为在 0 点反射Markov调制Lévy过程  $W(t) = W(0) + V(t) + L(t)$ , 这里:  $W(0) = C - x_0$ ,

$$L(t) = - \inf_{\{0 \leq \eta \leq t\}} \{W(0) + V(\eta)\}^-$$

为局部时间过程, 表示到时间  $t$  的退货处理量. 状态  $j$  上局部时间过程可表为  $L_j(t) = \int_0^t 1_{\{J(s)=j\}} dL(s)$ ,  $L(t) = L_1(t) + L_2(t)$ .

据Lévy过程的强Markov性知, 二维过程  $(J, W)$  是Markov过程, 且  $W$  还是一个更新过程. 更新点可选  $J$  为 1 且  $W$  等于  $\bar{q}_1 = C - q_1$  (即零售商在状态 1 完成订货) 对应的点. 循环周期等于相邻更新点间的时间. 过程  $W$  从更新点  $\bar{q}_1$  出发首次到达水平  $C$  (对应库存水平为 0) 时, 根据环境状态不同, 循环有两种情况: 一是若状态为 1, 则零售商订货后  $W$  到达水平  $\bar{q}_1$ , 本次循环完成; 二是若状态为 2, 则零售商订货后  $W$  到达水平  $\bar{q}_2 = C - q_2$ , 然后, 过程  $W$  从水平  $\bar{q}_2$  开始运行, 当它再次到达水平  $C$  时, 若状态仍为 2, 则  $W$  独立于过去从水平  $\bar{q}_2$  重新开始. 如此随机重复运行, 直到到达水平  $C$  时状态为 1, 此情况下, 零售商完成订货后  $W$  到达水平  $\bar{q}_1$ , 本次循环才结束. 图 1 和图 2 分别给出一次循环  $X(t)$  和对应  $W(t)$  的典型样本路径.

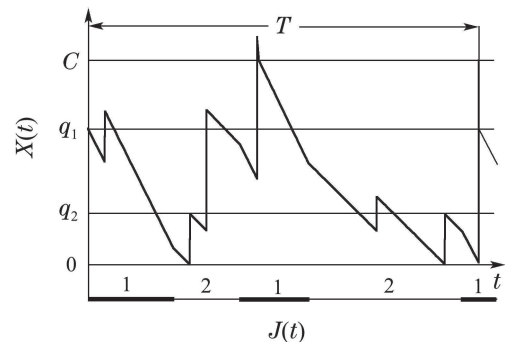


图 1 一次循环  $X(t)$  的典型样本路径  
Fig. 1 A typical sample path of  $X(t)$  in one cycle

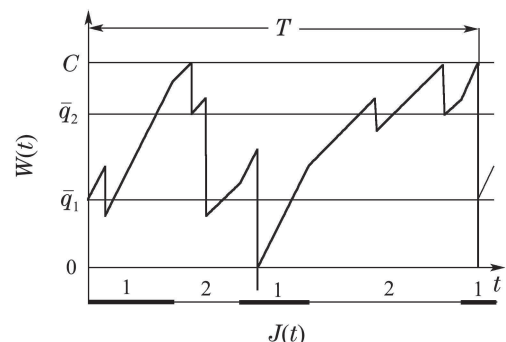


图 2 一次循环  $W(t)$  的典型样本路径  
Fig. 2 A typical sample path of  $W(t)$  in one cycle

定义在状态*j*过程*W*从水平 $\bar{q}_j$ 出发,首次到达水平*C*的时间为 $\tau_j$ ,对应状态为*i*的概率为 $\theta_{ji}$ ,即

$$\tau_j = \inf \{t > 0, W(t) = C | W(0) = \bar{q}_j, J(0) = j\},$$

$$\theta_{ji} = P(J(\tau_j) = i), i, j = 1, 2.$$

据图2知,若定义*W*在完成订货时,从水平 $\bar{q}_2$ 出发,到达水平*C*的运行过程为一个子循环,那么,一次循环可能内嵌多个子循环.若子循环数为*N*,则据Lévy过程的强Markov性知,*N*服从扩展的几何分布,即有 $P(N = 0) = \theta_{11}; P(N = n) = \theta_{12}\theta_{22}^{n-1}\theta_{21}, n = 1, 2, \dots$ .故子循环的期望数 $E[N] = \theta_{12}/\theta_{21}$ .

因此,一次循环的期望时间

$$E[T] = E[\tau_1] + E[\tau_2]E[N] = E[\tau_1] + \frac{\theta_{12}}{\theta_{21}}E[\tau_2].$$

下面,基于更新报酬定理,根据一次循环库存运行情况,构建系统长程平均费用率模型,包括库存、退货、处理和补货费用.

1) 库存费用:显然,*X*亦是更新过程.故据更新过程极限定理知,*X*的平稳密度函数*f*(*x*)存在且唯一.故一次循环库存的期望费用为

$$E[CH] = c_h \int_0^C x f(x) dx E[T].$$

2) 退货费用:因退货到达为复合Poisson过程,故单位时间平均退货量,等于每个状态上平均退货量与该状态的长程时间比例乘积之和,即

$$\frac{\lambda_1}{v_1} \frac{\gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)} + \frac{\lambda_2}{v_2} \frac{\gamma_1}{(\gamma_1 + \gamma_2)}.$$

则一次循环退货的期望费用为

$$E[CR] = c_r \left[ \frac{\lambda_1}{v_1} \frac{\gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)} + \frac{\lambda_2}{v_2} \frac{\gamma_1}{(\gamma_1 + \gamma_2)} \right] E[T].$$

3) 处理费用:因*W*从循环和子循环出发到达水平*C*,在各状态上退货处理量不同.若定义时间 $\tau_j$ 内在状态*i*上退货期望处理量为 $\ell_{ji}$ ,则 $\ell_{ji} = EL_i(\tau_j)$ ,且*i, j = 1, 2*.故一次循环退货的期望处理费用为

$$E[CD] = c_d (E[L(\tau_1)] + E[L(\tau_2)]E[N]) = c_d [\ell_{11} + \ell_{12} + \frac{\theta_{12}}{\theta_{21}}(\ell_{21} + \ell_{22})].$$

4) 补货费用:若子循环数为*N*,那么,包括循环结束时对应状态1的补货,一次循环零售商补货总数为*N + 1*.故一次循环补货的期望费用为

$$E[CO] = c_\pi + c_o q_1 + (c_\pi + c_o q_2)E[N] = c_\pi \left( 1 + \frac{\theta_{12}}{\theta_{21}} \right) + c_o (q_1 + q_2 \frac{\theta_{12}}{\theta_{21}}).$$

因此,系统单位时间的长程平均费用为

$$TC(q_1, q_2) = \frac{E[CH] + E[CR] + E[CD] + E[CO]}{E[T]}.$$

显然,要求最优的 $q_1$ 和 $q_2$ ,需先确定循环期望费用

和时间包含的密度函数*f*(*x*),以及概率 $\theta_{ji}$ 、退货处理量 $\ell_{ji}$ 和时间 $E[\tau_j]$ 函数, *i, j = 1, 2*.

### 4 有关函数的确定(Determination of relevant functions)

下面,分两部分确定上述函数.第1部分基于水平穿越理论,确定库存水平的密度函数;第2部分采用鞅的理论,确定其余函数.

#### 4.1 库存水平平稳分布函数的确定(Determination of the stationary distribution of the inventory level)

##### 4.1.1 分布函数的模型方程(Model equations of the distribution function)

由问题描述知,库存水平 $X(t) \in [0, C]$ .为便于用水平穿越的系统点法确定稳态分布,据系统的状态,将*X*(*t*)分解为 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ .这里,

$$\{X_j(t), t \geq 0\} = \{X(t) \in [0, C], t \geq 0\} \cap \{J(t) = j, t \geq 0\}, j = 1, 2.$$

用*f*(·)表示*X*(*t*)的概率密度函数.相应的, $f_j(\cdot)$ 表示 $X_j(t)$ 的概率密度函数.

利用PASTA原则及水平穿越理论,通过使库存水平的系统点(简称系统点)轨迹,进入和离开在各子空间上选择区域的速率相等,构建一系列平衡方程.

首先,针对 $X_1(t) \in [0, q_2]$ ,构建方程如下:

$$\begin{aligned} &\mu_1 f_1(x) + \gamma_2 \int_0^x f_2(\omega) d\omega = \\ &\mu_1 f_1(0+) + \gamma_1 \int_0^x f_1(\omega) d\omega + \\ &\lambda_1 \int_0^x e^{-v_1(x-\omega)} f_1(\omega) d\omega, x \in (0, q_2). \end{aligned} \quad (1)$$

式(1)左边为系统点进入区间 $[0, x]$ 的总速率.其中第1项表示需求导致系统点从上进入区间 $[0, x]$ 的速率;第2项为状态从2转移到1,造成位于区间 $[0, x]$ 系统点进入的速率.式(1)右边为系统点离开区间 $[0, x]$ 的总速率.其中,第1项表示需求导致库存水平为0时,因订货引发系统点离开区间 $[0, x]$ 的速率;第2项表示状态从1转移到2,造成位于区间 $[0, x]$ 系统点离开的速率;第3项为退货到达引发位于区间 $[0, x]$ 系统点离开的速率.

同理,针对 $X_2(t) \in [0, q_2]$ ,构建方程如下:

$$\begin{aligned} &\mu_2 f_2(x) + \gamma_1 \int_0^x f_1(\omega) d\omega = \\ &\mu_2 f_2(0+) + \gamma_2 \int_0^x f_2(\omega) d\omega + \\ &\lambda_2 \int_0^x e^{-v_2(x-\omega)} f_2(\omega) d\omega, x \in (0, q_2). \end{aligned} \quad (2)$$

其次,针对 $X_1(t) \in [q_2, q_1]$ ,构建方程如下:

$$\mu_1 f_1(x) + \lambda_1 \int_0^{q_2} (e^{-v_1(q_2-\omega)} - e^{-v_1(x-\omega)}) f_1(\omega) d\omega +$$

$$\begin{aligned} &\gamma_2 \int_{q_2}^x f_2(\omega) d\omega = \\ &\mu_1 f_1(q_2) + \gamma_1 \int_{q_2}^x f_1(\omega) d\omega + \\ &\lambda_1 \int_{q_2}^x e^{-v_1(x-\omega)} f_1(\omega) d\omega, \quad x \in (q_2, q_1). \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)左边第1项表示需求导致系统点从上进入区间 $[q_2, x]$ 的速率;第2项表示到达的退货恰好使位于区间 $(0, q_2)$ 系统点,进入区间 $[q_2, x]$ 而没有上穿水平 $x$ 的速率;第3项是状态从2转移到1,造成位于区间 $[q_2, x]$ 系统点进入的速率.式(3)右边第1项表示需求导致系统点从下离开区间 $[q_2, x]$ 的速率;第2项表示状态从1转移到2,造成位于区间 $[q_2, x]$ 系统点离开的速率;第3项表示退货到达,使位于区间 $[q_2, x]$ 系统点离开的速率.

同理,针对 $X_2(t) \in [q_2, q_1]$ ,构建方程如下:

$$\begin{aligned} &\mu_2 f_2(0+) + \lambda_2 \int_0^{q_2} (e^{-v_2(q_2-\omega)} - \\ &e^{-v_2(x-\omega)}) f_2(\omega) d\omega + \mu_2 f_2(x) + \\ &\gamma_1 \int_{q_2}^x f_1(\omega) d\omega = \\ &\mu_2 f_2(q_2) + \gamma_2 \int_{q_2}^x f_2(\omega) d\omega + \\ &\lambda_2 \int_{q_2}^x e^{-v_2(x-\omega)} f_2(\omega) d\omega, \quad x \in (q_2, q_1). \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)左边第1项表示在状态2需求导致库存水平为0,因订货引发系统点进入区间 $[q_2, x]$ 的速率.其余项参考式(3)不难解释,故将其省略.

最后,针对 $X_1(t) \in [q_1, C]$ 和 $X_2(t) \in [q_1, C]$ ,分别构建方程如下:

$$\begin{aligned} &\mu_1 f_1(0+) + \lambda_1 \int_0^{q_1} (e^{-v_1(q_1-\omega)} - \\ &e^{-v_1(x-\omega)}) f_1(\omega) d\omega + \mu_1 f_1(x) + \gamma_2 \int_{q_1}^x f_2(\omega) d\omega = \\ &\mu_1 f_1(q_1) + \gamma_1 \int_{q_1}^x f_1(\omega) d\omega + \\ &\lambda_1 \int_{q_1}^x e^{-v_1(x-\omega)} f_1(\omega) d\omega, \quad x \in (q_1, C], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &\mu_2 f_2(x) + \lambda_2 \int_0^{q_1} (e^{-v_2(q_1-\omega)} - \\ &e^{-v_2(x-\omega)}) f_2(\omega) d\omega + \gamma_1 \int_{q_1}^x f_1(\omega) d\omega = \\ &\mu_2 f_2(q_1) + \gamma_2 \int_{q_1}^x f_2(\omega) d\omega + \\ &\lambda_2 \int_{q_1}^x e^{-v_2(x-\omega)} f_2(\omega) d\omega, \quad x \in (q_1, C]. \end{aligned} \quad (6)$$

#### 4.1.2 求解模型方程(Solution of the equations)

要求 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ ,需将上述积分方程化为微分方程.为此,定义微分算子 $\langle D \rangle = \frac{d}{dx}$ .

分别对式(1)(3)和(5)运用 $\langle D \rangle \langle D + v_1 \rangle$ 得

$$\begin{aligned} &\mu_1 \ddot{f}_1(x) + (\mu_1 v_1 - \gamma_1 - \lambda_1) \dot{f}_1(x) + \\ &\gamma_2 \dot{f}_2(x) - \gamma_1 v_1 f_1(x) + \gamma_2 v_1 f_2(x) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

分别对式(2)(4)和(6)运用 $\langle D \rangle \langle D + v_2 \rangle$ 得

$$\begin{aligned} &\mu_2 \ddot{f}_2(x) + \gamma_1 \dot{f}_1(x) + (\mu_2 v_2 - \gamma_2 - \lambda_2) \times \\ &\dot{f}_2(x) + \gamma_1 v_2 f_1(x) - \gamma_2 v_2 f_2(x) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

令 $g_j(x) = \dot{f}_j(x)$ ,  $j=1, 2$ . 定义 $\mathbf{y}(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ g_1(x) \ g_2(x)]^T$ , 则式(7)–(8)可表示为矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{y}}(x) = A\mathbf{y}(x), \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} A = &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\gamma_1 v_1}{\mu_1} & -\frac{\gamma_2 v_1}{\mu_1} & z_1 & -\frac{\gamma_2}{\mu_1} \\ -\frac{\gamma_1 v_2}{\mu_2} & \frac{\gamma_2 v_2}{\mu_2} & -\frac{\gamma_1}{\mu_2} & z_2 \end{bmatrix}, \\ z_1 = &\frac{-\mu_1 v_1 - \gamma_1 - \lambda_1}{\mu_1}, \quad z_2 = -\frac{\mu_2 v_2 - \gamma_2 - \lambda_2}{\mu_2}. \end{aligned}$$

若 $A$ 为可对角化矩阵,其特征值和对应的特征向量分别为 $\delta_i$ 和 $\phi_i = [\psi_{1i} \ \psi_{2i} \ \psi_{3i} \ \psi_{4i}]^T$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,则齐次微分方程组(9)的通解为

$$\mathbf{y}(x) = \Psi e^{\Delta x} \mathbf{y}(0). \quad (10)$$

这里: $\Psi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4]$ ,  $\Delta = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ 为对角阵, $\mathbf{y}(0)$ 为待定常数列向量.

因此,针对上述3个区间,其解可表示为

$$\bar{\mathbf{f}}(x) = (\Psi)_{\{1,2\}} e^{\Delta x} \mathbf{a}, \quad x \in [0, q_2), \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{f}}(x) = (\Psi)_{\{1,2\}} e^{\Delta x} \mathbf{b}, \quad x \in [q_2, q_1), \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{f}}(x) = (\Psi)_{\{1,2\}} e^{\Delta x} \mathbf{c}, \quad x \in [q_1, C]. \quad (13)$$

这里: $\bar{\mathbf{f}}(x) = [f_1(x) \ f_2(x)]^T$ ;  $(\Psi)_{\{1,2\}}$ 表示由 $\Psi$ 的第1和2行元素构成的 $2 \times 4$ 阶矩阵; $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]^T$ ,  $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4]^T$ 和 $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]^T$ 为3个待定常数列向量.

下面,确定向量 $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ 中包含的12个未知分量值.

首先,将式(11)–(13)代入式(1)–(6),再通过比较 $e^{-v_j x}$  ( $j = 1, 2$ )项的系数,得到下列6个方程:

$$\frac{\psi_{j1} a_1}{\delta_1 + v_j} + \frac{\psi_{j2} a_2}{\delta_2 + v_j} + \frac{\psi_{j3} a_3}{\delta_3 + v_j} + \frac{\psi_{j4} a_4}{\delta_4 + v_j} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\psi_{j1}(a_1 - b_1)}{\delta_1 + v_j} e^{\delta_1 q_2} + \frac{\psi_{j2}(a_2 - b_2)}{\delta_2 + v_j} e^{\delta_2 q_2} + \\ &\frac{\psi_{j3}(a_3 - b_3)}{\delta_3 + v_j} e^{\delta_3 q_2} + \frac{\psi_{j4}(a_4 - b_4)}{\delta_4 + v_j} e^{\delta_4 q_2} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\psi_{j1}(c_1 - b_1)}{\delta_1 + v_j} e^{\delta_1 q_1} + \frac{\psi_{j2}(c_2 - b_2)}{\delta_2 + v_j} e^{\delta_2 q_1} + \\ &\frac{\psi_{j3}(c_3 - b_3)}{\delta_3 + v_j} e^{\delta_3 q_1} + \frac{\psi_{j4}(c_4 - b_4)}{\delta_4 + v_j} e^{\delta_4 q_1} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

其次,据系统点进入和离开区间 $[0, q_2)$ ,  $[0, q_1)$ 和 $[0, C]$ 的速率相等,参照方程(1)–(6),构建平衡方程.在此基础上,将式(11)–(13)代入,可求得仅包含未知

常数的6个方程. 结合式(14)–(16), 共得到12个线性相关方程.

最后, 库存水平分布函数还要满足下列标准条件

$$\int_0^C f(x)dx = \int_0^C f_1(x)dx + \int_0^C f_2(x)dx = 1. \tag{17}$$

将式(11)–(13)代入式(17), 并取代上述任一方程, 可得到仅含未知常数的12个线性无关方程. 求该方程组, 得到12个未知分量值, 即求得库存水平平稳密度函数. 上述方程冗长且繁琐, 考虑空间限制, 将其省略.

### 4.2 其余函数的确定(Determination of other functions)

因库存水平动态变化为Markov调制Lévy过程, 故采用传统方法很难确定待求的函数. Kella-Whitt鞅是解决有关Lévy过程问题很有效工具. 下面, 给出简要说明, 详细了解请参阅文献[20].

设 $V(t)$ 是一个Markov调制Lévy过程,  $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$ 是一个适应于 $V(t)$ 且在有限时间内具有有界的变差过程, 令 $Z(t) = V(t) + Y(t)$ , 则

$$M(\alpha, t) = \int_0^t e^{\alpha Z(s)} \mathbf{1}_{J(s)} ds F(\alpha) + e^{\alpha Z(0)} \mathbf{1}_{J(0)} - e^{\alpha Z(t)} \mathbf{1}_{J(t)} + \alpha \int_0^t e^{\alpha Z(s)} \mathbf{1}_{J(s)} dY(s) \tag{18}$$

是0均值(行)向量鞅. 这里,  $\mathbf{1}_j$ 是第 $j$ 个分量为1, 其余为0的 $n$ 维行向量.  $F(\alpha) = Q + \text{diag}\{\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha)\}$ 为过程 $V(t)$ 的矩阵指数, 其中:  $Q$ 为 $J$ 的状态转移速率矩阵;  $\varphi_j(\alpha)$ 为 $V_j(t)$ 的Lévy指数.

据Perron-Frobenius理论知, 对任一实数 $\alpha$ , 矩阵 $F(\alpha)$ 存在一个实部最大实特征值 $\kappa(\alpha)$ , 其对应右特征向量为 $\mathbf{h}(\alpha)$ , 即 $F(\alpha)\mathbf{h}(\alpha) = \kappa(\alpha)\mathbf{h}(\alpha)$ . 考虑到满足该条件的特征向量有无穷多个, 且它们间仅相差一个倍数, 故可利用 $J$ 的平稳分布 $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1 \ \dots \ \pi_n]$ , 通过 $\boldsymbol{\pi}\mathbf{h}(\alpha) = 1$ 将 $\mathbf{h}(\alpha)$ 标准化.

另外, 定义 $\mathbf{k} = \frac{d}{d\alpha}(\mathbf{h}(\alpha))|_{\alpha=0}$ . 据文献[20]中推论2.5和推论2.8(P313)有

$$\dot{\kappa}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} = \sum_{j=1}^n \pi_j \left( \mu_j - \frac{\lambda_j}{v_j} \right), \tag{19}$$

$$E[V(t)] = \dot{\kappa}(0)E[t] + E[k_{J(0)}] - E[k_{J(t)}]. \tag{20}$$

基于这些结果, 下面, 给出待求函数的明晰形式.

**引理 1** 过程 $W(t)$ 在状态 $j$ 从水平 $\bar{q}_j$ 出发首次到达水平 $C$ 时, 对应状态 $i$ 的概率 $\theta_{ji}$ 和退货处理量 $\ell_{ji}$ , 以及时间 $E[\tau_j]$ 的具体形式分别为

$$[\theta_{j1} \ \theta_{j2} \ \ell_{j1} \ \ell_{j2}]^T = B^{-1}\boldsymbol{\epsilon}, \tag{21}$$

$$E[\tau_j] = \frac{1}{\dot{\kappa}(0)} [q_j - \ell_{j1} - \ell_{j2} - k_j + (k_1\theta_{j1} + k_2\theta_{j2})]. \tag{22}$$

这里:

$$B = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 C} h_1^{[1]} & e^{\alpha_1 C} h_2^{[1]} & -\alpha_1 h_1^{[1]} & -\alpha_1 h_2^{[1]} \\ e^{\alpha_2 C} h_1^{[2]} & e^{\alpha_2 C} h_2^{[2]} & -\alpha_2 h_1^{[2]} & -\alpha_2 h_2^{[2]} \\ e^{\alpha_3 C} h_1^{[3]} & e^{\alpha_3 C} h_2^{[3]} & -\alpha_3 h_1^{[3]} & -\alpha_3 h_2^{[3]} \\ e^{\alpha_4 C} h_1^{[4]} & e^{\alpha_4 C} h_2^{[4]} & -\alpha_4 h_1^{[4]} & -\alpha_4 h_2^{[4]} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = [e^{\alpha_1 \bar{q}_j} h_j^{[1]} \ e^{\alpha_2 \bar{q}_j} h_j^{[2]} \ e^{\alpha_3 \bar{q}_j} h_j^{[3]} \ e^{\alpha_4 \bar{q}_j} h_j^{[4]}]^T,$$

其中 $\alpha_m, h_j^{[m]}$ 和 $k_j (j = 1, 2; m = 1, \dots, 4)$ 均为常数, 其值在证明过程中给出.

**证** 若取 $Y(t) = L(t)$ , 因过程 $L(t)$ 仅在 $W(t) = 0$ 时才增加, 故式(18)可简化为

$$M(\alpha, t) = \int_0^t e^{\alpha W(s)} \mathbf{1}_{J(s)} ds F(\alpha) + e^{\alpha W(0)} \mathbf{1}_{J(0)} - e^{\alpha W(t)} \mathbf{1}_{J(t)} + \alpha \int_0^t \mathbf{1}_{J(s)} dL(s). \tag{23}$$

利用式(23), 对停时 $\tau_j$ 应用最优抽样定理得

$$E \int_0^{\tau_j} e^{\alpha W(s)} \mathbf{1}_{J(s)} ds F(\alpha) + E e^{\alpha W(0)} \mathbf{1}_{J(0)} - E e^{\alpha W(\tau_j)} \mathbf{1}_{J(\tau_j)} + \alpha E \int_0^{\tau_j} \mathbf{1}_{J(s)} dL(s) = 0. \tag{24}$$

首先, 根据问题的描述, 不难求得

$$Q = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_2 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_j(\alpha) = \log E e^{\alpha V_j(t)} = \mu_j \alpha - \frac{\lambda_j \alpha}{v_j + \alpha},$$

其中 $j = 1, 2$ . 故矩阵指数

$$F(\alpha) = \begin{bmatrix} -\gamma_1 + \mu_1 \alpha - \frac{\lambda_1 \alpha}{v_1 + \alpha} & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_2 + \mu_2 \alpha - \frac{\lambda_2 \alpha}{v_2 + \alpha} \end{bmatrix}.$$

根据 $\det(F(\alpha)) = 0$ , 求得4个根 $\alpha_m$ 及满足 $F(\alpha_m)\mathbf{h}^{[m]} = 0$ 的右列向量 $\mathbf{h}^{[m]} = [h_1^{[m]} \ h_2^{[m]}]^T, m = 1, \dots, 4$ .

其次, 取式(24)中 $\alpha = \alpha_m$ 且右乘 $\mathbf{h}^{[m]}$ , 可得

$$e^{\alpha_m \bar{q}_j} h_j^{[m]} - e^{\alpha_m C} (\theta_{j1} h_1^{[m]} + \theta_{j2} h_2^{[m]}) + \alpha_m (\ell_{j1} h_1^{[m]} + \ell_{j2} h_2^{[m]}) = 0, \ m = 1, \dots, 4. \tag{25}$$

最后, 求解式(25)构成的方程组, 即得式(21).

**注 1** 若令 $\mathbf{1} = [1, 1]^T$ . 因 $F(0) = Q$ , 故据 $J$ 为不可约常返的Markov链知,  $F(0)$ 的特征值不大于0. 又因 $Q\mathbf{1} = 0$ , 所以,  $\kappa(0) = 0$ 是 $\det(F(\alpha)) = 0$ 的一个根, 且对应特征向量 $\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{1}$ . 不妨设这个根为 $\alpha_1$ , 那么, 对应它的右列向量 $\mathbf{h}^{[0]} = \mathbf{1}$ . 将其代入式(25), 有 $\theta_{j1} + \theta_{j2} = 1$ .

下面, 确定期望时间 $E[\tau_j]$ .

首先, 据 $W(t) = W(0) + V(t) + L(t)$ 和 $E[L(\tau_j)] = \sum_{j=1}^2 \ell_{ji}$ , 可求得

$$E[V(\tau_j)] = E[W(\tau_j)] - \bar{q}_j - E[L(\tau_j)] = q_j - \ell_{j1} - \ell_{j2}. \tag{26}$$

其次, 借鉴文献[21]的方法, 确定向量  $\mathbf{k}$ . 根据

$$\kappa(\alpha)\mathbf{h}^{(\alpha)} = F(\alpha)\mathbf{h}^{(\alpha)}, \quad (27)$$

对式(27)两边关于  $\alpha$  求导, 并令  $\alpha = 0$ , 可得

$$\dot{\kappa}(0)\mathbf{h}^{(0)} + \kappa(0)\mathbf{k} = (\Lambda(\mu) - \Lambda(\frac{\lambda}{v}))\mathbf{h}^{(0)} + Q\mathbf{k}. \quad (28)$$

这里:  $\Lambda(\mu) = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2\}$ ,  $\Lambda(\frac{\lambda}{v}) = \text{diag}\{\frac{\lambda_1}{v_1}, \frac{\lambda_2}{v_2}\}$ .

另据

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{h}^{(\alpha)} = \mathbf{1}, \quad (29)$$

对式(29)两边关于  $\alpha$  求导, 并令  $\alpha = 0$  得

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (30)$$

若令  $\mathbf{0} = [0 \ 0]^T$ , 利用  $\kappa(0) = 0$ ,  $\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{1}$ , 并将式(28)减去  $\mathbf{1}\boldsymbol{\pi}\mathbf{k} = \mathbf{0}$ , 可求得

$$\mathbf{k} = (Q - \mathbf{1}\boldsymbol{\pi})^{-1}(\dot{\kappa}(0)\mathbf{I} - \Lambda(\mu) + \Lambda(\frac{\lambda}{v}))\mathbf{1}. \quad (31)$$

这里  $\mathbf{I}$  表示单位矩阵.

最后, 据式(19)–(20)(26)(31), 可得式(22).

### 5 仿真及分析(Simulation and analysis)

利用上面得到的函数, 构建系统长期平均费用率优化模型如下:

$$\min TC(q_1, q_2) = \frac{E[CH] + E[CR] + E[CD] + E[CO]}{E[T]},$$

$$\text{s.t. } q_1 < C, q_2 < C.$$

显然, 它是带约束条件的非线性优化模型. 因无法判断目标函数凹凸性或单调性, 这里, 利用 MATLAB 非线性优化软件包, 确定最优解  $q_1^*$  和  $q_2^*$ .

为便于分析, 用  $\rho$  表示退货率, 即单位时间平均退货量与需求量之比. 显然,  $\rho$  小于 1. 因无标准数据可供使用, 给出参数的基本值:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 300, \mu_2 = 50, v_1 = 0.2, v_2 = 0.2, \\ C &= 150, \gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.1, c_h = 3, \\ c_d &= 15, c_r = 6, c_\pi = 50, c_o = 5, \rho = 0.2. \end{aligned}$$

首先, 分析需求和环境状态变化对系统的影响. 针对下列 3 种订货策略: 1) 订货策略与环境状态有关; 2) 订货策略与环境状态无关, 即  $\bar{q}^* = q_1^* = q_2^*$ . 将式(1)–(6)适当合并, 容易构建模型, 并求得订货量  $\bar{q}^*$  和费用  $\overline{TC}^*$ . 限于篇幅, 不再赘述; 3) EOQ 订货策略  $\hat{q}^*$ . 这里

$$\hat{q}^* = \sqrt{\frac{2c_\pi D}{c_h}},$$

其中  $D$  为长期期望净需求率, 即

$$D = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}(\mu_1 - \frac{\lambda_1}{v_1}) + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}(\mu_2 - \frac{\lambda_2}{v_2}).$$

将  $\hat{q}^*$  代入 2) 的模型中, 可求得对应费用  $\widehat{TC}^*$ . 在其他参数取基本值条件下, 表 1 给出对应的最优结果. 这里,

$$\bar{\Delta} = \frac{\overline{TC}^* - TC^*}{TC^*} \times 100\%, \hat{\Delta} = \frac{\widehat{TC}^* - TC^*}{TC^*} \times 100\%.$$

表 1 不同订货策略下需求率和状态参数变化对应的最优结果

Table 1 Optimal results for different order policies when the demand rates and the status parameters vary

$\mu_1$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$q_1^*$	$q_2^*$	$TC^*$	$\bar{q}^*$	$\overline{TC}^*$	$\bar{\Delta}$	$\hat{q}^*$	$\widehat{TC}^*$	$\hat{\Delta}$
100	0.10	0.01	51.20	36.52	401.08	38.14	403.80	0.67	38.14	403.80	0.67
100	0.01	0.10	51.59	36.61	650.93	50.45	653.47	0.39	50.45	653.47	0.39
200	0.10	0.01	71.42	36.52	454.28	41.19	462.24	1.75	41.19	462.24	1.75
200	0.01	0.10	72.86	36.56	1182.09	70.49	1190.33	0.69	70.50	1190.33	0.69
300	0.10	0.01	86.49	36.51	506.16	44.04	523.05	3.33	44.04	523.05	3.33
300	0.01	0.10	89.05	36.51	1699.73	85.94	1712.54	0.75	85.99	1712.54	0.75
400	0.10	0.01	98.58	36.51	557.36	46.71	582.33	4.48	46.71	582.33	4.48
400	0.01	0.10	101.92	36.46	2210.50	98.59	2228.66	0.82	99.09	2229.96	0.88
500	0.10	0.01	107.51	36.51	608.15	49.24	639.19	5.10	49.24	639.19	5.10
500	0.01	0.10	110.47	36.43	2717.44	107.90	2741.58	0.88	110.65	2746.73	1.07
600	0.10	0.01	112.95	36.50	658.73	51.64	698.67	6.06	51.64	698.67	6.06
600	0.01	0.10	115.03	36.41	3222.58	113.37	3256.26	1.04	121.11	3271.59	1.52
700	0.10	0.01	116.06	36.50	709.20	53.94	754.83	6.43	53.94	754.83	6.43
700	0.01	0.10	117.55	36.39	3726.92	116.41	3766.51	1.06	130.73	3799.50	1.94
800	0.10	0.01	117.98	36.50	759.62	56.14	812.71	6.98	56.14	812.71	6.98
800	0.01	0.10	119.11	36.38	4230.86	118.26	4276.54	1.07	139.70	4372.30	3.34
900	0.10	0.01	119.26	36.50	810.01	58.26	867.34	7.07	58.26	867.34	7.07
900	0.01	0.10	120.17	36.37	4734.58	119.49	4785.25	1.07	148.12	5206.31	9.96

据表1知: 1) 随 $\mu_1$ 的增加, 或者, 状态1的长程时间比例( $\gamma_2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ )增大, 订货量 $q_1^*$ 和费用 $TC^*$ 均逐渐增加, 而订货量 $q_2^*$ 保持几乎不变; 2) 状态无关订货策略的费用 $\overline{TC}^*$ , 均大于对应状态相关订货策略的费用 $TC^*$ , 并且, 需求率 $\mu_1$ 越大, 即 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ 相差越大, 其费用变化率 $\Delta$ 也越大, 尤其是, 在状态1的长程时间比例较小环境(因该情况下, 系统库存和订货费用所占比例较低). 文献[4]在需求波动环境下得到同样结论, 本文将它推广到更一般的需求和退货波动环境; 3) 文献[4]证明了在需求波动环境下状态无关最优订货策略与EOQ订货策略(此情况下, 需求率为长程期望需求率)相同. 表1给出, 只有在需求率 $\mu_1$ 或状态1的长程时间比例较小情况下它们才相同, 否则, EOQ订货量 $\hat{q}^*$ 均大于状态无关订货量 $\bar{q}^*$ , 相应的费用 $\widehat{TC}^*$ 也大于 $\overline{TC}^*$ . 究其原因是, 在

需求率 $\mu_1$ 或状态1的长程时间比例较小情况下, 由于订货量 $\hat{q}^*$ 与存储容量 $C$ 相差较大, 退货引发库存超出容量限制的概率很小, 所以, 订货量 $\hat{q}^*$ 和 $\bar{q}^*$ 非常接近. 但当需求率 $\mu_1$ 较大且在状态1上的长程时间比例较高时, 此情况下订货量较多. EOQ订货策略因没考虑退货波动引发库存超出容量限制, 所以, 其订货量 $\hat{q}^*$ 大于 $\bar{q}^*$ , 结果是, 由于退货处理费用的增加, 导致其费用 $\widehat{TC}^*$ 大于 $\overline{TC}^*$ . 并且, 随着需求率 $\mu_1$ 和状态1的长程时间比例进一步增大, 费用 $\widehat{TC}^*$ 显著增加, 这可以根据 $\hat{\Delta}$ 比 $\bar{\Delta}$ 的增速快得到证实. 其次, 分析退货变化对系统的影响. 由于针对单位时间固定的退货量, 退货又分为批次小批量大和批次大批量小两种类型. 为了全面分析退货数量和类型对系统的影响. 在其它参数取基本值情况下, 图3给出退货率 $\rho$ 和退货批量 $1/v_1$ 变化, 对应的试验结果.

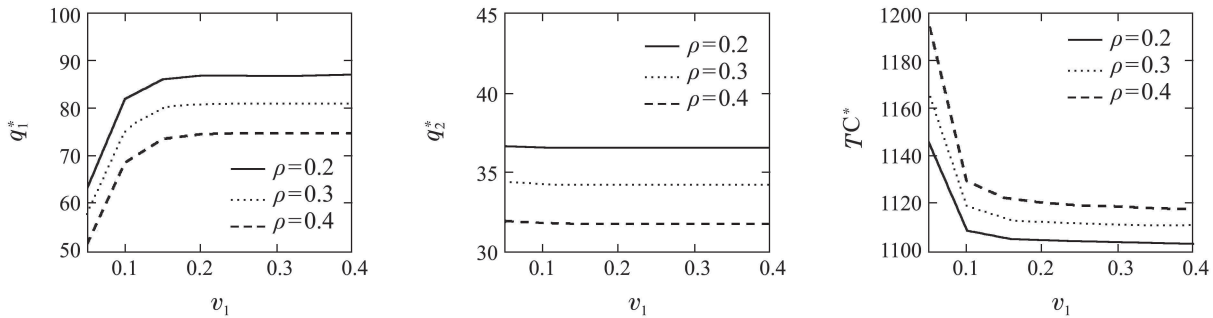


图3 退货率和退货批量变化对应的最优结果

Fig. 3 Optimal results for varying the return rates and the return batches

据图3知, 当 $1/v_1$ 固定时, 随 $\rho$ 的增加, 订货量 $q_1^*$ 和 $q_2^*$ 逐渐降低, 费用 $TC^*$ 趋于增大; 当 $\rho$ 固定时, 随 $1/v_1$ 的减小,  $q_1^*$ 逐渐增加后趋于稳定,  $q_2^*$ 几乎不变, 而 $TC^*$ 的变化趋势与 $q_1^*$ 恰好相反, 即逐渐下降后趋于稳定. 究其原因是, 当退货批量 $1/v_1$ 固定(当然 $1/v_2$ 也固定)时, 随退货率 $\rho$ 的增加, 退货批次 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 逐渐增大, 也就是, 净需求率趋于减少, 所以, 订货量 $q_1^*$ 和 $q_2^*$ 逐渐降低. 又因库存费用的减少不抵退货费用的增加, 故系统费用 $TC^*$ 趋于增大. 当退货率 $\rho$ 固定时, 因需求率 $\mu_1$ 固定(当然 $\mu_2$ 也固定), 所以, 净需求率不变. 这时, 随 $1/v_1$ 的减小, 状态1上的退货类型趋于批次大批量小. 在这种情况下, 到达退货超出容量限制被处理的概率逐渐降低, 因此, 订货量 $q_1^*$ 不断增加. 费用 $TC^*$ 也因退货处理费用的降低而趋于减小. 当 $1/v_1$ 小到一定程度时, 到达退货超出容量限制被处理的概率非常小, 因而, 订货量 $q_1^*$ 和费用 $TC^*$ 保持几乎不变. 又因状态1上退货类型变化, 不影响状态2上退货处理的概率, 故 $q_2^*$ 保持几乎不变.

另外, 在退货率 $\rho$ 和退货批次 $\lambda_1$ 固定情况下, 若需求率 $\mu_1$ 和单位时间平均退货量 $\lambda_1/v_1$ 同时发生变化, 那么, 随 $\mu_1$ 的增加, 一方面引起净需求率增大(因 $\rho$ 小于1), 故订货量 $q_1^*$ 逐渐增加; 另一方面又导致退货批量 $1/v_1$ 增大, 从而, 造成库存超出存储容量限制的概率不断提高, 故 $q_1^*$ 增加的趋势减缓, 直至保持几乎不变. 费用 $TC^*$ 也随净需求率的增大而增加. 与图3相似, 因状态2上订货量不受状态1上退货批量变化影响, 故 $q_2^*$ 保持几乎不变. 限于篇幅, 试验结果省略.

最后, 因退货为不可控的, 且用户需求均要满足, 故退货费 $c_1$ 和可变订货费 $c_o$ 变化, 对 $q_1^*$ 和 $q_2^*$ 无影响. 库存费 $c_h$ 、固定订货费 $c_\pi$ 和处理费 $c_d$ , 对系统的影响, 符合人们预期, 即当 $c_h$ 增加时,  $q_1^*$ 和 $q_2^*$ 均减小;  $c_\pi$ 增加时,  $q_1^*$ 和 $q_2^*$ 均增大; 而 $c_d$ 增加时,  $q_1^*$ 减小,  $q_2^*$ 几乎不变(因该状态上退货处理概率很小). 并且, 随上述参数增大, 费用 $TC^*$ 均增加. 考虑空间限制, 计算结果省略.

## 6 结论(Conclusions)

由于需求和退货波动环境下库存变化, 不但失去单调性, 而且不能用确定的随机过程描述. 从而, 造成利用传统方法很难构建模型. 因此, 该环境下库存控制问题, 在理论上还缺乏必要研究.

本文在将库存水平动态变化表示为Markov调制Lévy过程基础上, 利用水平穿越理论和多维Kella-Whitt鞅方法, 主要研究了单位时间系统长程平均费用模型的构建, 并利用该模型, 通过仿真试验, 得到下列重要的库存管理启示: 1) 针对3种订货策略, 状态相关订货策略优于状态无关订货策略, 而状态无关订货策略又优于EOQ订货策略(此情况下的需求率为长程期望净需求率); 2) 需求率和环境状态变化, 主要影响该状态上的最优订货量, 对其它状态上的最优订货量影响很小; 3) 采用EOQ订货策略, 可以替代系统最优订货策略. 但当需求率相差较大时, 会造成费用较大增加; 4) 退货率固定条件下, 随着退货批量的增加, 最优订货策略和系统费用均发生较大变化.

在此基础上, 还可拓展研究: 1) 提前期不为0情况下库存控制问题. 该问题不但要确定订货量, 而且, 还要确定订货水平; 2) 除指数分布外, 退货批量还可为更一般分布, 如超指数分布或阶段分布等. 通过进一步研究, 以期更好满足实际需求.

## 参考文献(References):

- [1] KARLIN S. Dynamic inventory policy with varying stochastic demands [J]. *Management Science*, 1960, 6(3): 231 – 258.
- [2] TUNC H, KILIC O A, TARIM S A, et al. The cost of using stationary inventory policies when demand is non-stationary [J]. *Omega*, 2011, 39(4): 410 – 415.
- [3] SONG J S, ZIPKIN P. Inventory control in a fluctuating demand environment [J]. *Operations Research*, 1993, 41(2): 351 – 370.
- [4] BRILL P H, CHAOUCH B A. An EOQ model with random variations in demand [J]. *Management Science*, 1995, 41(5): 927 – 936.
- [5] ZHANG J L, CHEN J, ZHANG X S. Coordinating pricing and inventory control in a fluctuating environment [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2010, 26(2): 187 – 204.
- [6] QI L. A continuous-review inventory model with random disruptions at the primary supplier [J]. *European Journal of Operational Research*, 2013, 225(1): 59 – 74.
- [7] ARIFOGLU K, ÖZEKICI S. Inventory management with random supply and imperfect information: a hidden Markov model [J]. *International Journal of Production Economics*, 2011, 134(1): 123 – 137.
- [8] KULKARNI V, YAN K Q. Production-inventory systems in stochastic environment and stochastic lead times [J]. *Queueing System*, 2012, 70(3): 207 – 231.
- [9] ATALI A, ÖZER Ö. Stochastic multi-item inventory systems with Markov-modulated demands and production quantity requirements [J]. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2012, 26(2): 263 – 293.
- [10] FLAPPER S D P, GAYON J P, VERCRAENE S. Control of a production-inventory system with returns under imperfect advance return information [J]. *European Journal of Operational Research*, 2012, 218(2): 392 – 400.
- [11] CHEN J, BELL P C. Coordinating a decentralized supply chain with customer returns and price-dependent stochastic demand using a buy-back policy [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 212(2): 293 – 300.
- [12] ZHU S X. Joint pricing and inventory replenishment decisions with returns and expediting [J]. *European Journal of Operational Research*, 2012, 216(1): 105 – 112.
- [13] SHULMAN J D, COUGHLAN A T, SAVASKAN R C. Managing consumer returns in a competitive environment [J]. *Management Science*, 2011, 57(2): 347 – 362.
- [14] HUANG X M, GU J W, CHING W K, et al. Impact of secondary market on consumer return policies and supply chain coordination [J]. *Omega*, 2014, 45(3): 57 – 70.
- [15] KARAKAYALI I, AKCALI E, CETINKAYA S, et al. Capacitated replenishment and disposal planning for multiple products with resalable returns [J]. *Annals of Operations Research*, 2013, 203(1): 325 – 350.
- [16] BERMAN O, PERRY D, STADJE W. An  $(s, r, S)$  diffusion inventory model with exponential lead time and order cancellations [J]. *Stochastic Models*, 2008, 24(2): 191 – 211.
- [17] YAO D C. Optimal policy for Brownian inventory models with general convex inventory cost [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2013, 29(1): 187 – 200.
- [18] WU J C, CHAO X L. Optimal control of a Brownian production/inventory system with average cost criterion [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2014, 39(1): 163 – 189.
- [19] CADENILIAS A, LAKNER P, PINEDO M. Optimal control of a mean-reverting inventory [J]. *Operations Research*, 2010, 58(6): 1697 – 1710.
- [20] ASMUSSEN S. *Applied Probability and Queues* [M]. New York: Springer, 2003.
- [21] ASMUSSEN S, KELLA O. A multi-dimensional martingale for Markov additive processes and its applications [J]. *Advance in Applied Probability*, 2000, 32(2): 376 – 393.

## 作者简介:

**娄山佐** (1964–), 男, 副教授, 主要研究方向为复杂系统建模与仿真、库存控制、优化算法和随机网络分析等, E-mail: Lshanzuo@163.com;

**田新诚** (1965–), 男, 教授, 主要研究方向为运动控制、机电一体化以及智能控制和优化, E-mail: txch@sdu.edu.cn.