

基于非线性牵制控制的分数阶混沌网络聚同步

刘景琳, 冯明库[†]

(广东技术师范学院 电子与信息学院, 广东 广州 510665)

摘要: 针对分数阶混沌复杂网络, 提出一种非线性牵制控制策略实现网络聚同步. 根据网络结点的不同属性, 只对群间节点施加非线性控制, 然后基于分数阶系统稳定性理论, 给出了实现聚同步的充分条件. 数值仿真验证了该聚同步方案的有效性和正确性, 同时深入讨论了控制增益和耦合强度等对聚同步的影响.

关键词: 聚同步; 分数阶系统稳定性理论; 复杂网络; 牵制控制

中图分类号: O415.5 文献标识码: A

Cluster synchronization in fractional-order chaotic network via nonlinear pinning control

LIU Jing-lin, FENG Ming-ku[†]

(School of Electronic & Information, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou Guangdong 510665, China)

Abstract: For a fractional-order complex chaotic network, we propose a nonlinear pinning control strategy to make the network achieve cluster synchronization. According to the different property of the nodes, nonlinear controllers are applied to inter-act node only. Then, based on the stability theory of fractional-order systems, a sufficient condition for the stability of cluster synchronization is derived. A numerical simulation is carried out to validate the effectiveness and correctness of the proposed scheme. Furthermore, the influence on the cluster synchronization by control gain and coupling strength is also discussed.

Key words: cluster synchronization; the stability theory of fractional-order systems; complex network; pinning control

1 引言(Introduction)

在过去的10多年里, 由于在物理、传染病控制、通信、工程等领域的潜在应用, 复杂网络的同步已引起了众多学者的研究兴趣^[1-3]. 截至今日, 研究者相继提出了各种同步方案, 例如完全同步^[4]、相同步^[5]、投影同步^[6-7]、有限时间同步^[8]、滞后同步^[9]、聚同步^[10]等.

作为网络的一种特殊同步形式, 聚同步在生物学、通信工程和社交网络中的研究得到了越来越多的关注^[11-12]. 聚同步最早的研究对象是自然物理现象中的耦合振荡器和耦合映象格子^[13-14]. 马、刘给出了一种耦合方案对相互连接的混沌网络中多个任意选定的群实现了聚同步^[15]. 在文献[16], 通过牵制控制, 对驱动线性耦合网络同步于网络某一群的同步模式进行了讨论. 文献[17]根据网络中边的局部信息, 提出了一种新的自适应策略来实现复杂网络聚同步. 一个分布式控制策略在文献[18]中完成了复杂网络聚同步. 文献[19]对混合耦合时滞神经网络展示了聚同步.

分数阶微分运算尽管早在17世纪已提出, 但是直到近来在机械、物理、工程、信息科学、材料学等科学领域发现存在分数阶现象后, 其理论及应用研究才引起关注. 很多学者正致力于研究物理、工程等领域(诸如粘滞现象、电极反应、电磁波)的分数阶系统, 并且发现许多分数阶系统能呈现混沌或超混沌现象. 这类系统包括: 分数阶Chua's系统、分数阶Duffing系统、分数阶Arneodo系统^[20]、分数阶Lü系统、分数阶Chen系统、分数阶Rössler系统和分数阶Lorenz系统等.

尽管如上文所述已有许多复杂网络同步方案的结论, 但针对结点为分数阶微分系统的复杂网络的聚同步研究还较少. 众所周知, 整数阶复杂网络是分数阶复杂网络的特殊情况, 研究分数阶复杂网络更具价值和实际意义. 如文献[21]研究了耦合分数阶系统的星状网络同步问题. 文献[22]对一个加权复杂网络实现了广义混沌同步. 主网络和响应网络通过OPCL方案, 实现了两个分数阶耦合复杂网络的外部同步^[23]. 然而

收稿日期: 2014-10-08; 录用日期: 2015-04-23.

[†]通信作者. E-mail: fengmk@163.com.

广东省科技计划项目(2011B080701092, 2012B091100441), 国家自然科学基金项目(61271117)资助.

Supported by Science and Technology Program of Guangdong Province (2011B080701092, 2012B091100441) and National Natural Science Foundation of China (61271117).

已有的分数阶复杂网络同步的文献多是对全部结点或多数结点施加控制, 而牵制控制只对网络中少数结点施加输入控制就可达到有效控制整个网络的目标^[16], 因此, 本文将依据结点在网络中信息传递作用分为内群点和群间点, 并只对群间点通过设计非线性牵制控制器实现分数阶复杂网络的聚同步. 同时, 基于分数阶系统稳定性理论, 给出实现分数阶网络聚同步的充分条件. 结点为Arneodo系统的数值仿真验证了聚同步方案的有效性和正确性, 同时探讨了控制增益、耦合强度等对聚同步效果的影响.

2 模型及预备知识(Model and preliminaries)

分数阶微分的定义有几种, 本文采用常用的Caputo定义^[24], 其数学表达式如下:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(l)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-l}} d\tau, \quad (1)$$

式中: D^α 表示分数阶微分的Caputo定义, $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数, $l-1 < \alpha < l$, l 为整数.

考虑一般意义上由 N 个同类结点构成的复杂网络, 其每个结点是一个 n 维动力系统:

$$D^\alpha x_i(t) = Ax_i(t) + f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma x_j(t) + u_i, \quad (2)$$

式中: $i = 1, 2, \dots, N$, $\alpha \in (0, 1]$, $x_i(t) = (x_{i1}(t) \ x_{i2}(t) \ \dots \ x_{in}(t))^T \in \mathbb{R}^n$ 是结点 i 的状态向量, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示系统在原点的雅可比矩阵, $f(x_i(t))$ 是其非线性部分. 第 i 个结点的状态为 $D^\alpha x_i(t) = Ax_i(t) + f(x_i(t))$. $c > 0$ 是耦合强度. 矩阵 $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是内耦合矩阵, $u_i \in \mathbb{R}^n$ 是本文接下来将要设计的控制器. $G = (g_{ij})_{N \times N}$ 是外耦合矩阵, 代表了网络的拓扑结构, 矩阵元素 g_{ij} 定义如下: 当结点 j 和结点 i 有连接时 ($j \neq i$), $g_{ij} = 1$; 否则 $g_{ij} = 0$. 矩阵 G 的对角线元素满足下述耗散条件:

$$g_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

假定复杂网络(2)有 m 个群. 若结点 i 属于第 j 个群, 本文记作 $\sigma_i = j$. 集合 ϕ_j 表示第 j 个群中所有结点组成的集合, 则 $\bigcup_{i=1}^m \phi_i = \{1, 2, \dots, N\}$. $\tilde{\phi}_j$ 是第 j 群中与外界有联系的所有结点的集合. 为方便起见, 当结点 i 属于 $\tilde{\phi}_j$ 时本文称之为群间点, 当结点 i 属于 $\phi_j - \tilde{\phi}_j$ 时本文称之为内群点.

设 $s_{\sigma_i}(t)$ 是群 σ_i 内一孤立结点的状态向量, 满足

$$D^\alpha s_{\sigma_i}(t) = As_{\sigma_i}(t) + f(s_{\sigma_i}(t)), \quad \sigma_i = 1, 2, \dots, m.$$

由此本文定义误差变量为

$$e_i(t) = x_i(t) - s_{\sigma_i}(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

$s_{\sigma_i}(t)$ 可以是一个平衡点、周期轨道或混沌吸引子. 因

此, 本文称复杂网络(2)对任意初始值实现了 m 群同步, 假若满足下述条件:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad \sigma_i = \sigma_j, \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| \neq 0, \quad \sigma_i \neq \sigma_j, \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

式(5)–(7)意味着第 σ_i 内的结点同步到 $s_{\sigma_i}(t)$, 而不同群内的结点不同步.

下面给出几个引理, 以便后面的定理证明.

引理 1^[25] 对任一自治分数阶线性系统

$$D^\alpha x_i(t) = Hx_i(t), \quad (8)$$

式中: $x(0) = x_0$, $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, 系统(8)是:

1) 渐进稳定的, 当且仅当对矩阵 H 的任意特征值 λ , $|\arg(\lambda_i(H))| > \alpha\pi/2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 都成立.

2) 稳定的, 当且仅当对矩阵 H 的任意特征值 λ , $|\arg(\lambda_i(H))| \geq \alpha\pi/2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 都成立.

引理 2^[9] 假定矩阵 $G \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 满足下述条件:

1) $g_{ij} \geq 0$ ($i \neq j$), $g_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$.

2) G 是不可约的, 则有: ① G 有一个 0 特征值, 其余特征值的实部均严格为负. ② G 有一个对应于特征值 0 的全 1 右特征向量 $(1, 1, \dots, 1)^T$. ③ 若 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T$ 是 G 对应于特征值 0 的左特征向量, 则对于所有的 $i = 1, 2, \dots, N$, 均有 $\xi_i > 0$ 成立.

引理 3^[9] 假定矩阵 G 如引理 2 所定义, 对角阵 $K = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ 且 $k_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), 则矩阵 $G - K$ 的所有特征值是负的.

引理 4^[26] 存在正的常量 L , 则有不等式 $\|f(y) - f(x)\| \leq L\|y - x\|$ 成立, 其中 x 和 y 为时变向量.

3 主要结论(Main results)

利用式(4), 复杂网络(2)的误差系统可表示为

$$D^\alpha e_i(t) = Ax_i(t) + f(x_i(t)) - As_{\sigma_i}(t) - f(s_{\sigma_i}(t)) + c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma x_j(t) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

结论 1 由耗散矩阵 G 的定义知下式显然成立:

$$c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma s_{\sigma_j}(t) = 0, \quad i \in \phi_i - \tilde{\phi}_i. \quad (10)$$

因此, 控制器 u_i 可设计如下:

$$u_i = \begin{cases} -f(x_i(t)) + f(s_{\sigma_i}(t)) - ck_i e_i(t) - c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma s_{\sigma_j}(t), & i \in \tilde{\phi}_{\sigma_i}, \\ 0, & i \in \phi_{\sigma_i} - \tilde{\phi}_{\sigma_i}. \end{cases} \quad (11)$$

式中 $k_i > 0$ 是控制增益,可调整同步速度.

结论 2 应当指出, u_i 是一个牵制控制器.

定理 1 对于给定的分数阶数 $\alpha \in (0, 1]$, 复杂网络(2)在牵制控制器(11)的作用下能实现聚同步当且仅当

$$|\arg(\lambda_i(\Omega + c(G \otimes \Gamma)))| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (12)$$

式中: $\Omega = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_N\} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$, $A_i = A - ck_i I_n (i \in \tilde{\phi}_{\sigma_i})$, 且 $\Lambda_i = A - l_i I_n (i \in \phi_{\sigma_i} - \tilde{\phi}_{\sigma_i})$.

证 由式(9)和式(11), 得

$$\begin{aligned} D^\alpha e_i(t) &= Ae_i(t) - ck_i e_i(t) + \\ & c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma x_j(t) - c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma s_{\sigma_j}(t) = \\ & Ae_i(t) - ck_i e_i(t) + c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma e_j(t) = \\ & (A - ck_i I_n) e_i(t) + c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma e_j(t), \quad i \in \tilde{\phi}_{\sigma_i}. \quad (13) \end{aligned}$$

由式(9)–(11)和引理4, 得

$$\begin{aligned} D^\alpha e_i(t) &= Ax_i(t) + f(x_i(t)) - As_{\sigma_i}(t) - \\ & f(s_{\sigma_i}(t)) + c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma x_j(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Ax_i(t) - As_{\sigma_i}(t) + f(x_i(t)) - f(s_{\sigma_i}(t)) + \\ & c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma x_j(t) - c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma s_{\sigma_j}(t) \leq \\ & Ae_i(t) - l_i e_i(t) + c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma e_j(t) = \\ & (A - l_i I_n) e_i(t) + c \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma e_j(t), \quad i \in \phi_{\sigma_i} - \tilde{\phi}_{\sigma_i}. \quad (14) \end{aligned}$$

令 $e = (e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T)^T \in \mathbb{R}^{nN}$, 则

$$\begin{aligned} D^\alpha e(t) &= \Omega e(t) + c(G \otimes \Gamma) e(t) = \\ & [\Omega + c(G \otimes \Gamma)] e(t). \quad (15) \end{aligned}$$

上式中: $\Omega = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_N\} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$, $A_i = A - ck_i I_n (i \in \tilde{\phi}_{\sigma_i})$, 且 $\Lambda_i = A - l_i I_n (i \in \phi_{\sigma_i} - \tilde{\phi}_{\sigma_i})$.

假设选择合适的控制增益 $k_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 由引理3, 可以保证 $\Omega + c(G \otimes \Gamma)$ 的所有特征值满足 $|\arg(\lambda_i(\Omega + c(G \otimes \Gamma)))| > \alpha\pi/2$. 根据引理1, 复杂网络(2)就能实现聚同步. 证毕.

4 数值仿真实验(Numerical simulation)

在数值仿真实验中, 本文选择含有3个群24个结点的复杂网络, 3个群的大小分别为 $N_1 = 6, N_2 = 8, N_3 = 10$. 结点是分数阶Arneodo混沌系统. 复杂网络的外耦合矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

分数阶Arneodo系统的微分方程为^[20]

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = x_2, D^\alpha x_2 = x_3, \\ D^\alpha x_3 = -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1^3. \end{cases} \quad (16)$$

当系统参数 $\beta_1 = -5.5, \beta_2 = 3.5, \beta_3 = 1, \beta_4 = -1$ 和 $\alpha = 0.98$ 时, 系统(16)出现如图1所示的混沌吸引子. 系统(16)有3个平衡点, 分别是

$$\begin{aligned} s_{\sigma_1}(t) &= (0, 0, 0), s_{\sigma_2}(t) = (\sqrt{\beta_1/\beta_4}, 0, 0), \\ s_{\sigma_3}(t) &= (-\sqrt{\beta_1/\beta_4}, 0, 0). \end{aligned}$$

现在本文定义下述式子来度量网络的同步效果:

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{i=1}^N (x_i(t) - x_{\sigma_i}(t)), \\ E_{12}(t) &= \sum_{i=1}^6 \frac{x_i(t)}{6} - \sum_{j=7}^{14} \frac{x_j(t)}{8}, i \in \phi_1, j \in \phi_2, \\ E_{13}(t) &= \sum_{i=1}^6 \frac{x_i(t)}{6} - \sum_{j=15}^{24} \frac{x_j(t)}{10}, i \in \phi_1, j \in \phi_3, \\ E_{23}(t) &= \sum_{i=7}^{14} \frac{x_i(t)}{8} - \sum_{j=15}^{24} \frac{x_j(t)}{10}, i \in \phi_2, j \in \phi_3. \end{aligned}$$

上式中: $E(t)$ 代表整个网络的聚同步的总误差值, $E_{12}(t), E_{13}(t), E_{23}(t)$ 分别代表两个群间的同步误差值. 依据聚同步的定义^[11-12]知, 当时间 $t \rightarrow \infty$, 若 $E(t)$ 趋向于0, 而 $E_{12}(t), E_{13}(t), E_{23}(t)$ 不趋向于0, 而趋向于某一常数, 则本文的复杂网络实现了聚同步.

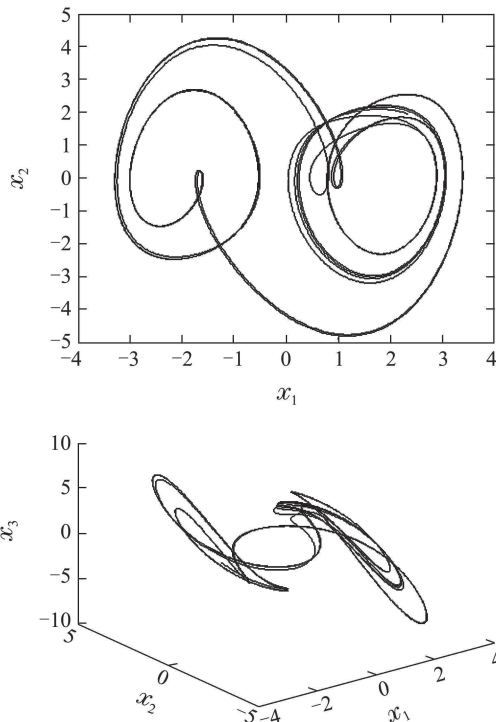


图 1 分数阶Arneodo系统的混沌吸引子, $\alpha = 0.98$
Fig. 1 Chaotic attractors of fractional-order Arneodo system with $\alpha = 0.98$

初始条件 x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} 分别选为 $4 \times \sin(0.5i - \pi/3), 5 \times \sin(0.5i + \pi/3), 6 \times \sin(0.5i), i = 1, 2, \dots, 24$. 控制增益 $k_i = 10 (i \in \{1, 2, 3, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 22\}), k_i = 0 (i \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 18, 19, 20, 21, 23, 24\})$. 方便起见, 本文选矩阵 Γ 为单位阵. 当 $\alpha = 0.98$, 图2显示了同步误差 $E(t)$ 随时间趋向于0, 而 $E_{12}(t), E_{13}(t), E_{23}(t)$ 并没有, 也就是说本文的复杂网络实现了聚同步. 图3是网络每个结点的3个变量随时间的变化曲线. 从图3可以看出3个群内的结点分别趋向于Arneodo系统的3个平衡点.

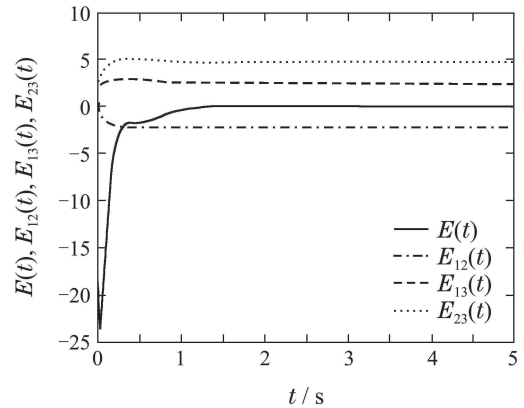


图 2 同步误差随时间的变化曲线

Fig. 2 The time evolution of synchronization errors

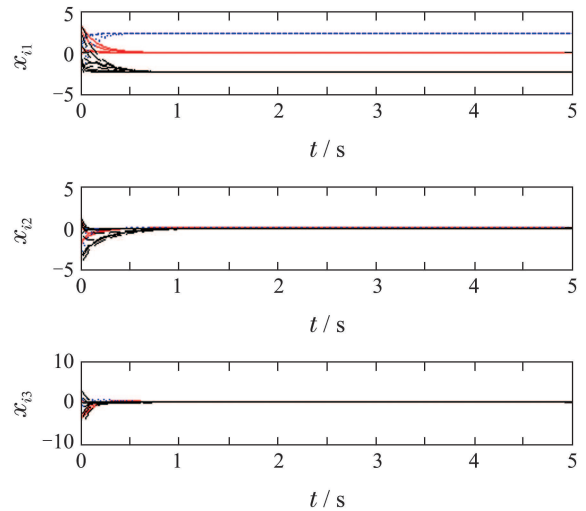


图 3 网络各结点的三变量随时间的变化曲线 ($i = 1, 2, \dots, 24$)

Fig. 3 The time evolution of three variables of each node in the network ($i = 1, 2, \dots, 24$)

结论 3 依据定理1, 假若合理选取控制增益 k_i 值, 复杂网络的聚同步可以实现并可调整其同步速度. 这里本文固定分数阶阶数 $\alpha = 0.98$, 耦合强度 $c = 5$, 只改变控制增益 k_i 值. 当 $k_i = 1$, 可以观察到同步现象. 图4(a)–4(d)展示了当增大 k_i 值时, 系统误差 $E(t)$ 趋向于0. 从图4很容易看出, k_i 值越大, 同步效

果越好.

结论 4 固定分数阶阶数 $\alpha = 0.98$, 控制增益 $k_i = 10$, 只改变耦合强度 c 值. 通常, 对于确定拓扑结构的复杂网络, 耦合强度越大, 到达聚同步的时间越短. 如图5所示, 当 $c = 1$ 时, 分数阶复杂网络(2)

还未达到聚同步(图5(a)), 但随着耦合强度变大, 该复杂网络不但实现了聚同步, 而且实现聚同步的时间越来越短.

结论 5 事实上, 分数阶的阶数对聚同步也有很大影响, 如图6所示. 限于篇幅, 这里本文省略讨论.

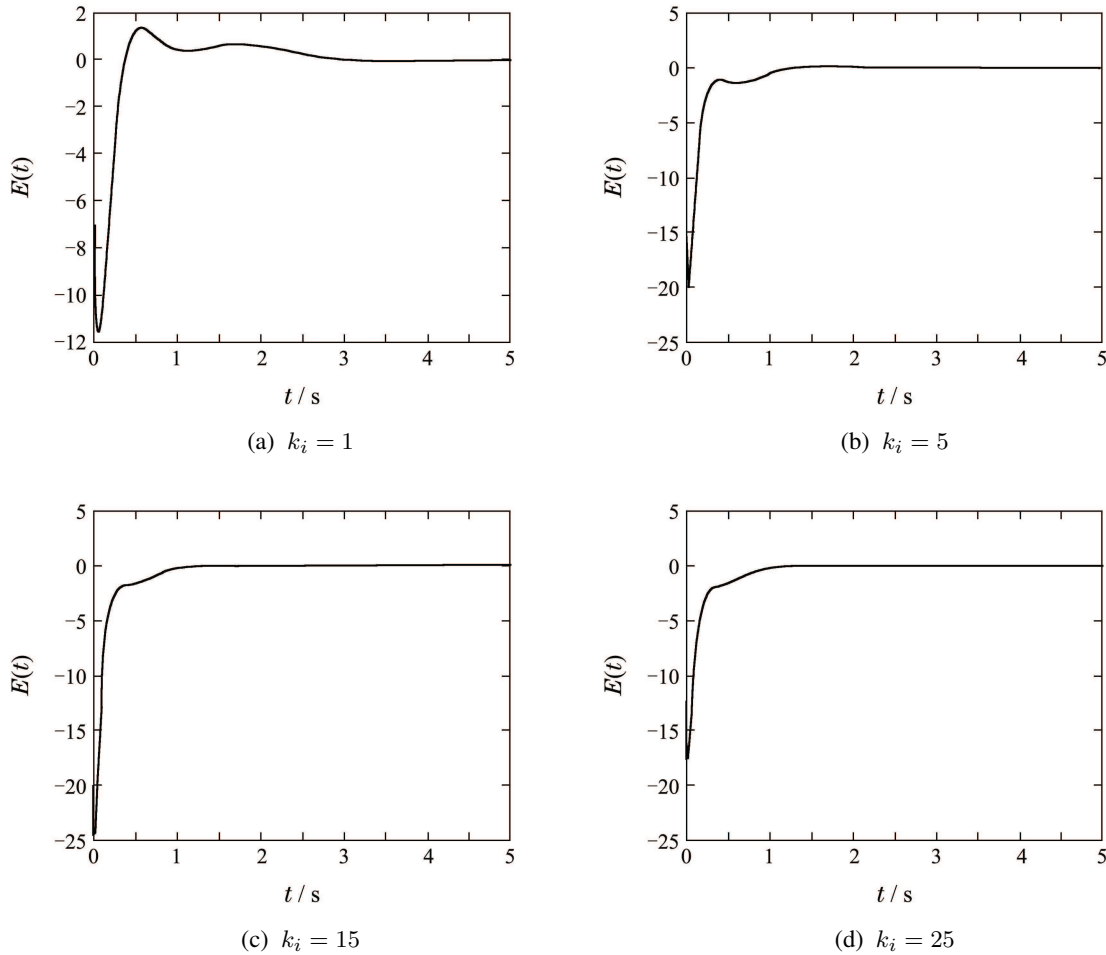
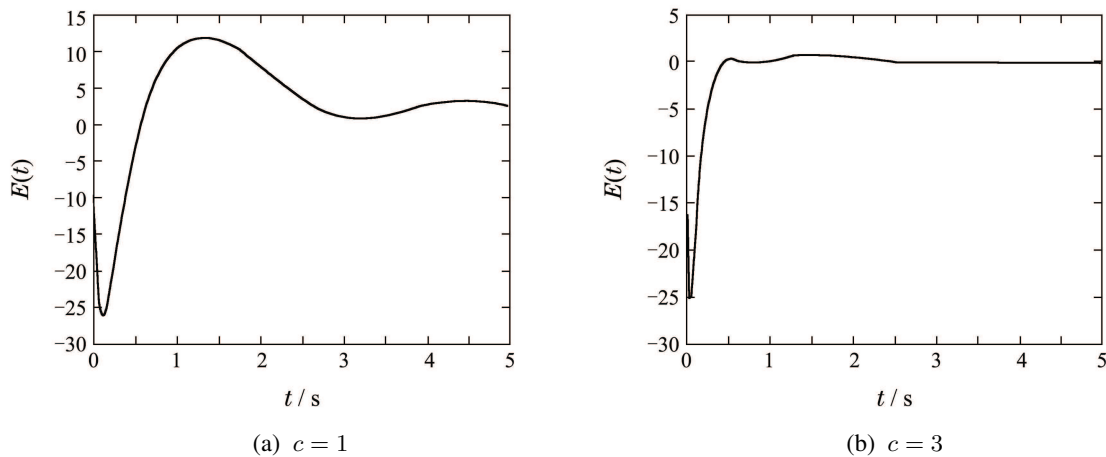


图 4 同步误差 $E(t)$ 在不同控制增益 k_i 下随时间的变化曲线

Fig. 4 The time evolution of synchronization errors $E(t)$ with different feedback gain k_i



(a) $c = 1$

(b) $c = 3$

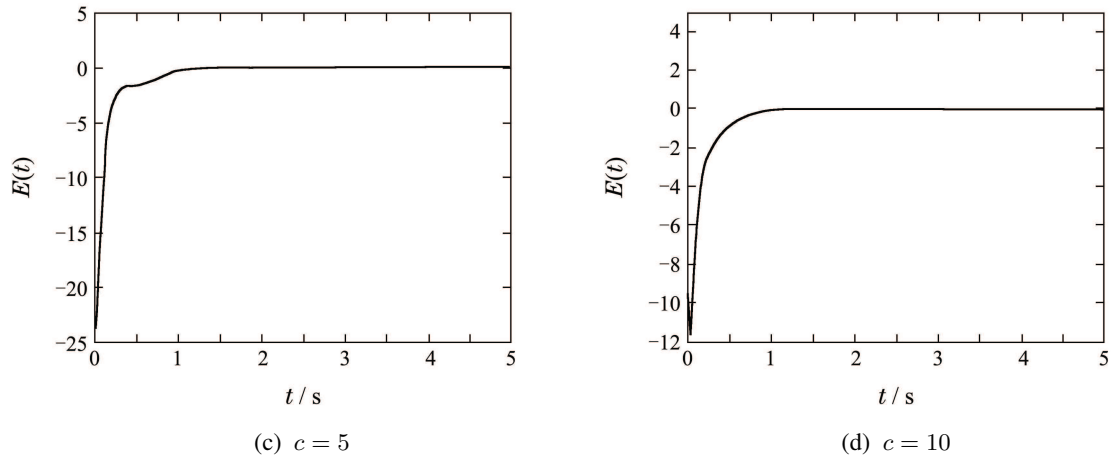
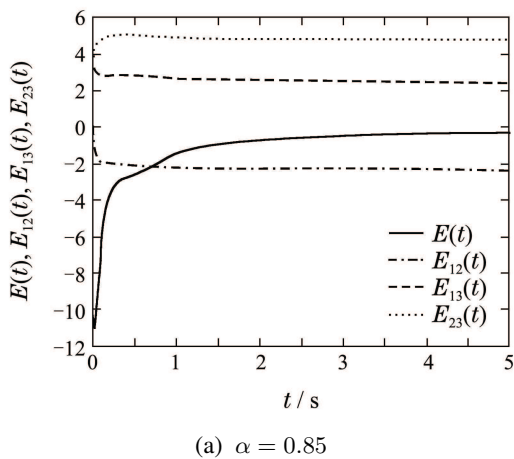
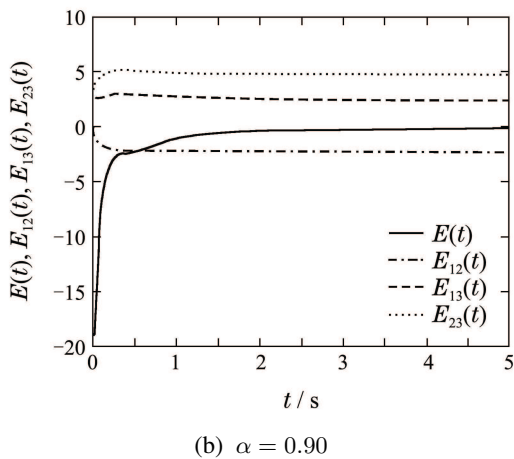


图 5 同步误差 $E(t)$ 在不同耦合强度 c 下随时间的变化曲线

Fig. 5 The time evolution of synchronization errors $E(t)$ with different coupling strength c



(a) $\alpha = 0.85$



(b) $\alpha = 0.90$

图 6 同步误差 $E(t), E_{12}(t), E_{13}(t), E_{23}(t)$ 在不同分数阶数 α 下随时间的变化曲线

Fig. 6 The time evolution of synchronization errors $E(t), E_{12}(t), E_{13}(t), E_{23}(t)$ with different fractional order α

5 结论(Conclusions)

本文根据网络中节点的不同属性, 只对少量群间点施加非线性控制器, 利用节点之间的耦合关系

再对其他未被直接牵制的结点施加虚拟控制, 从而实现了分数阶复杂混沌网络的聚同步. 此种牵制控制属于特定牵制控制策略, 至于按结点度数大小施加特定牵制控制或对网络结点随机施加牵制控制策略下混沌复杂网络的聚同步效果如何将另文讨论. 分数阶Arneodo混沌系统复杂网络的数值仿真实验验证了所给聚同步方案的有效性和正确性, 进而深入探讨了控制增益、耦合强度和分数阶阶数对聚同步效果的影响. 不同结点的分数阶复杂网络在外界干扰下的聚同步及其投影聚同步将是本文下一步研究的方向.

参考文献(References):

- [1] BOCCALETTI S, LATORA V, MORENO Y, et al. Complex networks: structure and dynamics [J]. *Physics Reports*, 2006, 424(4/5): 175 – 308.
- [2] 曹宇, 井元伟. 带有非线性感染率的SIRS模型的建立与稳定性分析 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(2): 229 – 232. (CAO Yu, JING Yuanwei. Modeling and stability analysis for SIRS model with nonlinear infection rate [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(2): 229 – 232.)
- [3] GUO W, AUSTIN F, CHEN H. Global synchronization of nonlinearly coupled complex networks with non-delayed and delayed coupling [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(6): 1631 – 1639.
- [4] LI R, CHU T. Complete synchronization of Boolean networks [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, 23(5): 840 – 846.
- [5] YU H, WANG J, DENG B, et al. Chaotic phase synchronization in small-world networks of bursting neurons [J]. *Chaos*, 2011, 21(1): 013127.
- [6] WU X, LU H. Generalized projective synchronization between two different general complex dynamical networks with delayed coupling [J]. *Physics Letters A*, 2010, 374(38): 3932 – 3941.
- [7] FENG C, XU X, WANG S, et al. Projective-anticipating, projective, and projective-lag synchronization of time-delayed chaotic systems on random networks [J]. *Chaos*, 2008, 18(2): 023117.

- [8] 唐传胜, 戴跃洪, 甄文喜. 非均匀气隙永磁同步电机的有限时间混沌同步 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(3): 404 – 408.
(TANG Chuansheng, DAI Yuehong, ZHEN Wenxi. Finite-time chaotic synchronization of permanent magnet synchronous motor with nonsmooth air-gap [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(3): 404 – 408.)
- [9] GUO W. Lag synchronization of complex networks via pinning control [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, 12(5): 2579 – 2585.
- [10] CHEN L, CHAI Y, WU R, et al. Cluster synchronization in fractional-order complex dynamical networks [J]. *Physics Letters A*, 2012, 376(35): 2381 – 2388.
- [11] GUO L, NIAN X, ZHAO Y, et al. Cluster synchronisation of Lur'e dynamical networks [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2012, 6(16): 2499 – 2508.
- [12] MA Z, ZHANG S, JIANG G, et al. Effect of the coupling matrix with a weight parameter on synchronization pattern in a globally coupled network [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 74(1/2): 55 – 64.
- [13] ZHANG Y, HU G, CERDEIRA H, et al. Partial synchronization and spontaneous spatial ordering in coupled chaotic systems [J]. *Physical Review E*, 2001, 63(2): 026211.
- [14] BELYKH V, BELYKH I, MOSEKILDE E. Cluster synchronization modes in an ensemble of coupled chaotic oscillators [J]. *Physical Review E*, 2001, 63(3): 036216.
- [15] MA Z, LIU Z, ZHAN G. A new method to realize cluster synchronization in connected chaotic networks [J]. *Chaos*, 2006, 16(2): 023103.
- [16] WU W, ZHOU W, CHEN T. Cluster synchronization of linearly coupled complex networks under pinning control [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 2009, 56(4): 829 – 839.
- [17] LU X, QIN B. Adaptive cluster synchronization in complex dynamical networks [J]. *Physics Letters A*, 2009, 373(40): 3650 – 3658.
- [18] LU X, QIN B, LU X. New approach to cluster synchronization in complex dynamical networks [J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2009, 51(3): 485 – 489.
- [19] CAO J, LI L. Cluster synchronization in an array of hybrid coupled neural networks with delay [J]. *Neural Networks*, 2009, 22(4): 335 – 342.
- [20] LU J. Chaotic dynamics and synchronization of fractional-order Arneodo's systems [J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2005, 26(4): 1125 – 1133.
- [21] WANG J, ZHANG Y. Network synchronization in a population of star-coupled fractional nonlinear oscillators [J]. *Physics Letters A*, 2010, 374(13/14): 1464 – 1468.
- [22] WU X, LAI D, LU H. Generalized synchronization of the fractional-order chaos in weighted complex dynamical networks with nonidentical nodes [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(1/2): 667 – 683.
- [23] MOHAMMAD M, JOAQUIN M, MOHAMMAD T, et al. Robust outer synchronization between two complex networks with fractional order dynamics [J]. *Chaos*, 2011, 21(3): 033121.
- [24] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations* [M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [25] MATIGNON D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing [C] // *Computational Engineering in Systems and Application Multiconference*. Lille, France: IEEE, 1996: 963 – 968.
- [26] DIETHELM K, FORD N. Analysis of fractional differential equations [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, 265(2): 229 – 248.

作者简介:

刘景琳 (1964–), 女, 副教授, 目前研究方向为混沌理论及电子技术应用, E-mail: liujinglin1964@126.com;

冯明库 (1970–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为非线性系统理论、混沌理论及混沌保密通信等, E-mail: fengmk@163.com.