第 32 卷第 8 期
2015 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 32 No. 8
Aug. 2015

DOI: 10.7641/CTA.2015.50049

# 四旋翼无人机三维航迹规划及跟踪控制

方 旭, 刘金琨†

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

**摘要**: 无人机航迹规划是指根据地形和威胁分布, 规划出满足任务要求的合理航迹. 为了满足三维空间快速规划的需求, 提出了一种基于人工势场的三维航迹规划方法. 首先, 定义了目标和威胁物的虚拟力函数, 推导出了三维空间参数约束方程, 并采用联合威胁概念解决三维空间局部极小和振动问题; 其次, 引入空间圆弧插补技术生成光滑航迹; 此外，为方便跟踪控制，提出了航迹时域化方法; 最后, 利用动态系统全局渐近稳定定理, 设计具有全局Lipschitz的闭环系统, 实现了具有内外环严格稳定性的双环轨迹跟踪控制. 仿真结果验证了航迹规划和跟踪算法的有效性.

**关键词**:人工势场; 航迹规划; 空间圆弧插补; 渐近稳定; 控制算法; 四旋翼无人机

**中图分类号**: TP11 **文献标识码**: A

# Three-dimension path planning and trajectory tracking control for quadrotor unmanned aerial vehicle

FANG Xu, LIU Jin-kun†

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** Path planning of unmanned aerial vehicle (UAV) is to design a reasonable path which satisfies task requirements according to the distribution of terrains and threats. In order to meet three-dimension rapid path planning requirements, a three-dimension path planning method based on artificial potential filed is proposed. Firstly, the virtual force functions of goal and threats are defined, and three-dimension parameter constraint equations are deduced. The concept of combination of threats is proposed by us to deal with the space local minimal problem and the oscillation problem. Secondly, space circle interpolation is introduced to generate the smooth path. Besides, the time domain method for planning the smooth path is employed because it is convenient to UAV path tracking control. Finally, By virtue of global asymptotic stability theory, a closed-loop system that is global Lipschitz is designed, which guarantees the strict overall stability tracking control in the internal and the external loop. Simulations results validate the designed performance of path planning method and tracking control.

**Key words:** artificial potential field; path planning; space circle interpolation; asymptotic stability; control algorithms; quadrotor unmanned aerial vehicles

## 1 引言(Introduction)

最新科技在算法、传感器和电池技术的发展使得无人机在军事和商业上的应用成为一种可行的选择. 然而, 现有的大多数无人机仍然采用远程操控和跟踪预定的航迹[1]. 高度自动化的无人机应该根据不同环境灵活制定飞行航迹, 当前多数的路径规划方法主要是应用于移动机器人避障和无人机等领域, 且集中于二维空间的路径搜索和规划. 无人机具有6个自由度和4个输入, 是典型的非线性欠驱动系统[2], 当前无人机的跟踪控制主要利用时标分离假设, 内外环分开设计, 保证内环姿态子系统收敛速度远远大于外环位置子系统, 缺乏对系统整体稳定性的分析.

在路径规划方面, 常用的路径规划算法如下: 路标法是通过一系列的路径点和边界条件形成的可行路径, 在曲线生成方面包括Voronoi图[3]和PRM估计规划算法[4], 但是在用于三维空间路径规划时, 需要将平面图的概念和规则进行推广; 智能算法通过生成随机路径点[5], 并根据目标函数进行筛选, 规划出最优路径, 智能算法在最优解附近收敛速度会变慢, 并可能陷入局部最小; 而常用的A搜索算法[6]根据当前点判别函数进行路径选择, 简单易操作, 但用于三维空间时计算量较大.

已有的无人机航迹规划研究大多是假想在平坦的空间中进行航迹规划为前提的, 其本质仍然是二维空

收稿日期: 2015−01−18; 录用日期: 2015−06−03.
†通信作者. E-mail: ljk@buaa.edu.cn; Tel.: +86 10-82315354.
高等学校博士学科点专项科研基金(20121102110008)资助.
Supported by Research Fund for Doctoral Program of Higher Education of China (20121102110008).

间搜索. 如文献[7]采用的是稀疏A算法进行三维规划, 将三维航迹规划分解为二维平面规划和高度规划两个单独部分, 缺少对三维空间$z$轴方向的充分利用, 本质仍然是二维平面规划方法.

人工势场法[8]主要运用于移动机器人避障, 通过设计目标和障碍的势能函数, 使机器人处于人工势场中, 同时受到目标点的引力和障碍物的斥力, 选取合适的势能函数参数和移动步长, 根据合力生成一系列路径点, 最终完成路径规划, 人工势场法计算量较小且设计步骤简易, 非常适合三维空间路径规划.

与其他已有人工势场法三维规划文献最大的不同是, 首先, 本文充分考虑三维空间威胁物垂直方向空间的影响, 而不是将垂直方向上的规划分离出来, 例如文献[9], 其文章中的参数约束方程是二维的, 局部极小和震荡问题的解决也是二维常用方法; 文献[10]并没有给出三维空间局部极小问题解决的方法. 其次, 本文给出三维空间参数约束方程, 为人工势场法参数的选取提供了理论支撑. 然后, 本文给出了三维空间局部极小和震荡的解决办法, 并提出联合威胁共同质心点方法的概念.

另外, 考虑到现有的路径规划算法得到的轨迹大多是由连接一系列路径点的直线段形成, 在路径点处并不光滑, 不利于无人机的跟踪控制[11]. 因此必须对已有的直线段路径进行光滑处理, 常用的方法有三维B样条插补算法, 但B样条插补算法生成的曲线弧度不易调节, 本文通过引入空间圆弧插补技术来生成光滑轨迹, 并给出完整的理论应用和证明, 相邻两条直线段间的空间圆弧能够有效的调节. 最后, 为方便跟踪控制, 提出了航迹时域化方法. 利用动态系统全局渐近稳定定理, 设计具有全局Lipschitz的闭环系统, 实现了具有内外环严格稳定性的双环轨迹跟踪控制.

## 2 无人机动态模型、作战环境及人工势场 (Dynamic model, combat circumstance and artificial potential field of UAV)

如图1为飞行器UAV受力图, 其中$Oxyz$为惯性坐标系, 飞行器由4个螺旋桨控制位置和欧拉角, $\ell$为飞行器半臂长, $F_i(i=1,2,3,4)$是螺旋桨推力形成的扭转力矩. 利用欧拉–拉格朗日方法推导出UAV的动力学方程, 其简化表达式如下:

$$\ddot{p} = -gf + \mathit{\Gamma}_1 R, \tag{1}$$

$$J\ddot{\mathit{\Theta}} = -C\dot{\mathit{\Theta}} + \mathit{\Gamma}_2, \tag{2}$$

其中: $f=[0\ \ 0\ \ 1]^{\mathrm{T}}, \mathit{\Gamma}_1=u_1, \mathit{\Gamma}_2=[u_2\ \ u_3\ \ u_4]^{\mathrm{T}}, u_i$ $(i=1,2,3,4)$作为输入, 其与扭转力矩的关系如公式(4), $p=[x\ \ y\ \ z]^{\mathrm{T}}$为位置信息, $\mathit{\Theta}=[\phi\ \ \theta\ \ \varphi]^{\mathrm{T}}$分别为滚转角、俯仰角和偏航角, g为重力加速度, 辅助惯性矩阵$J$为对称正定时变阵, $C$为科氏力矩阵, 且$\dfrac{\dot{J}}{2}-C$为反对称矩阵, 取$s(\cdot)$和$c(\cdot)$表示正余弦函数, 则$R$阵满足

$$R = \begin{bmatrix} c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ c_\phi c_\theta \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

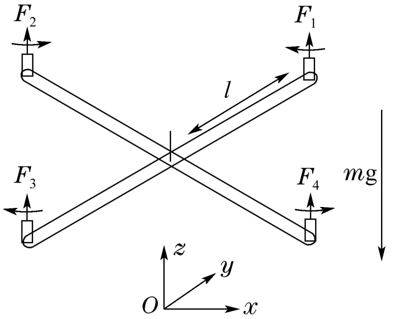



图 1 无人机UAV结构

Fig. 1 Structure of UAV

无人机在执行任务的过程中会面临来自敌方的高炮导弹和雷达探测威胁, 火力和雷达装备的防御范围是全方位的, 因此一般使用圆球或圆柱体来近似表示. 为了更好的将人工势场法运用到无人机航迹规划中, 需要对无人机的空间威胁物进行理论处理[10].

**假设 1**　雷达、地面炮弹和防空导弹等威胁使用圆球或圆柱体来近似, 其几何中心和半径作为威胁物的主要参数, 威胁物可以相互渗透和叠加, 空间威胁物视为斥力体, 对无人机产生的斥力使其避开威胁.

**假设 2**　无人机用球体来表示, 质心为圆心, 最大特征尺寸为直径. 其与威胁物或目标点的距离为两球体质心之间的距离, 球体半径主要用于判断是否能避障. 当几何尺寸相差较大时, 无人机当成质点进行处理.

**定义 1**　三维空间中目标点对无人机的吸引力$F_{\mathrm{att}}$大小为

$$|F_{\mathrm{att}}| = k_{\mathrm{a}} \cdot \mathrm{Va}/d^2, \tag{5}$$

其中: $d=\|p-p_{\mathrm{g}}\|$, $p(x,y,z)$为当前点坐标, $p_{\mathrm{g}}$为目标点坐标, $k_{\mathrm{a}}$为引力系数, Va为任务价值, 引力方向由无人机质心指向目标点.

**定义 2**　三维空间中威胁物对无人机的斥力$F_{\mathrm{rep}}$大小为

$$|F_{\mathrm{rep}}| = k_{\mathrm{r}} \cdot LV \cdot \mathrm{e}^{\left(\beta - \frac{d_{\mathrm{r}}}{r}\right)}. \tag{6}$$

当威胁物可以穿越时$\beta=1$, 威胁物不可穿越时$\beta=0$; $LV$为威胁等级, 等级越高, 斥力越大, $d_{\mathrm{r}}$为

当前点与威胁物质心之间的距离, $r$为球体或圆柱体半径. 当威胁物为球体时, 斥力方向由球心指向无人机质心, 当威胁物为圆柱体时, 在圆柱体高度上下范围内, 斥力由圆柱轴线上一点水平指向无人机, 当不在高度范围内时, 斥力为0.

## 3 三维空间参数约束方程(Constraint equations in three-dimensional space)

为了保证无人机航迹规划的顺利进行, 必须选择适当的参数, 否则航迹规划可能无法到达终点. 本节推导出了三维空间航迹规划参数的约束方程.

**定理 1** 在基于人工势场法的无人机航迹规划中, 若无人机航迹规划参数满足以下不等式:

$$\begin{cases} k_{\mathrm{a}} > -\|F_{\mathrm{r}}\|\cos\chi\cdot\dfrac{d^2}{\mathrm{Va}}, \chi > \pi/2, \\ \delta < 2\lambda(1+\alpha)\dfrac{\|F_{\mathrm{a}}\|}{d}[(x-x_{\mathrm{g}})^2+(y-y_{\mathrm{g}})^2], \end{cases} \tag{7}$$

则无人机能完成飞行任务, 满足到达条件$d < \Delta d$. 如图2所示. 设$p(x,y,z)$点为当前点, 目标点为$G(x_{\mathrm{g}}, y_{\mathrm{g}}, z_{\mathrm{g}})$,

$$d = [(x-x_{\mathrm{g}})^2+(y-y_{\mathrm{g}})^2+(z-z_{\mathrm{g}})^2]^{-1/2},$$

设向量$F_{\mathrm{a}}$为引力, 向量$F_{\mathrm{r}}$为斥力合力, $\delta$为步长, $\chi$为引力和斥力合力的向量夹角, 引力$F_{\mathrm{a}}$在$x, y$方向的分量为

$$F_{\mathrm{ax}} = \frac{x_{\mathrm{g}}-x}{d}\|F_{\mathrm{a}}\|,\ F_{\mathrm{ay}} = \frac{y_{\mathrm{g}}-y}{d}\|F_{\mathrm{a}}\|,$$

设斥力在$x, y$方向分量

$$F_{\mathrm{rx}} = \alpha_{\mathrm{x}}F_{\mathrm{ax}},\ F_{\mathrm{ry}} = \alpha_{\mathrm{y}}F_{\mathrm{ay}},$$

$\alpha_{\mathrm{x}}, \alpha_{\mathrm{y}}$为比例系数, $\alpha = \min(\alpha_{\mathrm{x}}, \alpha_{\mathrm{y}})$.

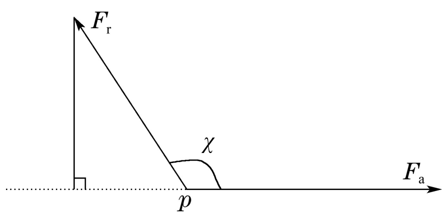



图 2 无人机$p$点的受力图

Fig. 2 The force diagram in position $p$

**证** 1) 向量$F_{\mathrm{r}}$在向量$F_{\mathrm{a}}$方向上的分力为$\|F_{\mathrm{r}}\|\cdot\cos\chi$, 由$F_{\mathrm{r}}\cdot F_{\mathrm{a}} = \|F_{\mathrm{r}}\|\cdot\|F_{\mathrm{a}}\|\cos\chi$, 可得$\|F_{\mathrm{r}}\|\cos\chi = F_{\mathrm{r}}\cdot F_{\mathrm{a}}/\|F_{\mathrm{a}}\|$. 为了保证无人机向靠近目标点的方向飞行, 当$\chi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$时, 无人机能飞向目标点; 当$\chi > \dfrac{\pi}{2}$时, 则必须满足$|\|F_{\mathrm{r}}\|\cos\chi| < \|F_{\mathrm{a}}\|$, 才能保证无人机飞向目标点, 此时由式(5)可得$|\|F_{\mathrm{r}}\|\cos\chi| < k_{\mathrm{a}}\cdot\mathrm{Va}/d^2$, 即$k_{\mathrm{a}} > -\|F_{\mathrm{r}}\|\cos\chi\cdot d^2/\mathrm{Va}$.

2) 在保证无人机飞向目标点的情况下, 还需保证每前进一段距离, 与目标点更接近. 设$p(x,y,z)$点为当前点, 目标点为$G(x_{\mathrm{g}}, y_{\mathrm{g}}, z_{\mathrm{g}})$, 因为无人机在完成任务的过程中需要爬升和下降, 因此与目标点接近的判别指标设定为$\kappa^2 = (x-x_{\mathrm{g}})^2+(y-y_{\mathrm{g}})^2$, 若规划航迹以步长$\delta$沿合力方向前进, 下一步规划后, 到达$p_{\mathrm{next}}(x_{\mathrm{n}}, y_{\mathrm{n}}, z_{\mathrm{n}})$点, 满足

$$x_{\mathrm{n}} = x+\delta\cdot\lambda\cdot(F_{\mathrm{ax}}+F_{\mathrm{rx}}),$$
$$y_{\mathrm{n}} = y+\delta\cdot\lambda\cdot(F_{\mathrm{ay}}+F_{\mathrm{ry}}),$$

其中

$$\lambda = [(F_{\mathrm{ax}}+F_{\mathrm{rx}})^2+(F_{\mathrm{ay}}+F_{\mathrm{ry}})^2+(F_{\mathrm{az}}+F_{\mathrm{r}z})^2]^{-1/2},$$

此时判别指标

$${\kappa_{\mathrm{n}}}^2 = (x_{\mathrm{n}}-x_{\mathrm{g}})^2+(y_{\mathrm{n}}-y_{\mathrm{g}})^2,$$

可得

$$(x_{\mathrm{n}}-x_{\mathrm{g}})^2 = (x-x_{\mathrm{g}})^2+2\delta\lambda(x-x_{\mathrm{g}})(F_{\mathrm{ax}}+F_{\mathrm{rx}})+\delta^2\lambda^2(F_{\mathrm{ax}}+F_{\mathrm{rx}})^2,$$
$$(y_{\mathrm{n}}-y_{\mathrm{g}})^2 = (y-y_{\mathrm{g}})^2+2\delta\lambda(y-y_{\mathrm{g}})(F_{\mathrm{ay}}+F_{\mathrm{ry}})+\delta^2\lambda^2(F_{\mathrm{ay}}+F_{\mathrm{ry}})^2.$$

则

$${\kappa_{\mathrm{n}}}^2-\kappa^2 \leqslant \delta^2-2\delta\lambda(1+\alpha)\frac{\|F_{\mathrm{a}}\|}{d}[(x-x_{\mathrm{g}})^2+(y-y_{\mathrm{g}})^2].$$

因此, 若满足

$$\delta < 2\lambda(1+\alpha)\frac{\|F_{\mathrm{a}}\|}{d}[(x-x_{\mathrm{g}})^2+(y-y_{\mathrm{g}})^2],$$

则有${\kappa_{\mathrm{n}}}^2-\kappa^2 < 0$, 即保证无人机每进行一步规划, 更接近目标点, 直至到达目标点. 式(7)在$\alpha > -1$时有解, 即斥力合力在$x, y$方向上的分量小于引力分量, 目标可到达.

## 4 三维空间震荡和局部极小问题(Vibration and local minimal problem in 3-D space)

在三维航迹规划过程中, 由于威胁物和无人机特殊的位置, 可能会出现局部极小和震荡问题. 即无人机在当前点出现引力和斥力相互抵消的情况, 或者在某两点间来回震荡, 这时可以增大引力系数或者减小威胁度较小物体的斥力系数, 使无人机走出当前局部极小或震荡区域, 朝着目标点前进.

在三维空间中还可能出现如图3所示的局部极小现象, 当无人机到达$P$点, 遇到前方相邻紧密的威胁物集群, 并且受到的引力和斥力在一个水平面上时, 无人机可能会进入威胁物凹槽, 出现局部极小现象. 本文采用联合威胁的概念来解决这个问题, 即当两个威胁物质心之间距离小于设定的判定距离$d_{\mathrm{judge}}$时, 则将两个物体联合起来, 看成一个物体, 多个物体的联合也类似. 联合物体取一个共同的质心, 质心的计算方法如图4所示, 先取相邻质心线段(线段$O_1O_2$,

$O_2O_3, O_3O_4, O_4O_5$) 的中点构成线段$s_1s_2$, $s_2s_3$, $s_3s_4$. 再分别取$s_1s_2$, $s_2s_3$, $s_3s_4$的中点进行连接, 构成线段$s_{12}s_{23}$, $s_{23}s_{34}$, 依此方法继续下去, 最后得到共同质心点$s$, 此时联合威胁物对无人机的斥力合力由共同质心点对无人机的斥力替代.

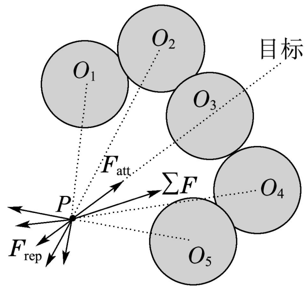



图 3 威胁物集群

Fig. 3 Adjacent threats

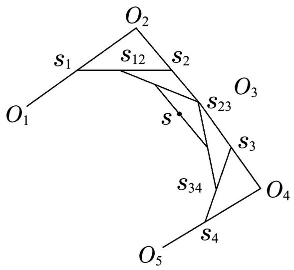



图 4 共同质心点计算

Fig. 4 The computation of common center of mass

对于这种凹槽式联合威胁物, 并且受到的引力和斥力在一个水平面上时, 可通过适当减小引力系数或设定较大的共同质心点斥力系数使无人机先远离联合威胁物, 再飞向目标点. 另一种方案是将共同质心点$s(x, y, z)$下移一定距离$\Delta z$得到新质心点$s^*(x, y, z-\Delta z)$, 新质心点产生的斥力在$z$轴有分量, 此时引斥力的合力可使无人机向上飞行越过联合威胁物.

## 5 空间圆弧插补优化航迹(Path optimization based on space circle interpolation)

在得到一系列航迹点后, 多数文献直接用直线段连接航迹点生成航迹曲线, 但这种方法生成的曲线是不光滑的, 不利于无人机的跟踪控制. 因此, 本文受到机械数控平台圆弧插补技术的启发, 引入空间圆弧插补技术对无人机航迹曲线进行"光滑"处理, 这种方法可自由调节转弯半径和转弯点, 因此比三维B样条插值更有优势.

### 5.1 空间圆弧插补(Space circle interpolation)

空间圆弧插补可以通过旋转变换等效到二维平面上来.

**定理 2** 在空间直角坐标系中, 设圆弧的起点和终点为$P_s$和$P_t$, 圆心为$P_o$, 半径为$r$, 圆心角为$\theta$. 则

$$(P_s-P_o)(P_t-P_o)^T = r^2\cos\theta. \tag{8}$$

**证** 由余弦定理 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$, $(P_s–P_o)$与$(P_t–P_o)$ 的夹角为 $\theta$, $\|P_s–P_o\|^2=r^2$, $\|P_t-P_o\|^2=r^2$, 可得

$$(P_s-P_o)(P_t-P_o)^T = \\ \|P_s-P_o\|\cdot\|P_t-P_o\|\cdot\cos\theta = r^2\cos\theta.$$

**定理 3** 在二维平面$X$-$Y$上, 以$X$轴为起点, 半径为$r$, 圆心角为$\theta$的逆圆弧到空间起点和终点为$P_s$和$P_t$, 圆心为$P_o$, 半径为$r$, 圆心角为$\theta$的空间圆弧的旋转矩阵$M$为

$$M = [W\ \ Q\ \ P_o],$$

其中

$$W = \frac{P_s-P_o}{r}, Q = \frac{P_t-P_o-(P_s-P_o)\cos\theta}{r\sin\theta}.$$

若当前二维平面上的任意一点$P_\alpha = [r\cos\alpha\ \ r\sin\alpha]$, $\alpha\in[0,\theta]$, 则此点对应的空间圆弧点$P_{l\alpha}$坐标为$P_{l\alpha} = M*[r\cos\alpha\ \ r\sin\alpha\ \ 1]^T$, 容易发现, $\alpha=0$时$P_{l\alpha}$对应起点$P_s$, $\alpha=\theta$时$P_{l\alpha}$对应终点$P_t$.

**证** 对于二维平面上的任意一点$P_\alpha$有$P_{l\alpha}$在对应的空间圆弧上, 即证明$\|P_{l\alpha}-P_o\|^2=r^2$.

$$\|P_{l\alpha}-P_o\|^2 = \|M\cdot[r\cos\alpha, r\sin\alpha, 1]^T - P_o\|^2 = \\ \|(P_s-P_o)\cos\alpha + \frac{P_t-P_o-(P_s-P_o)\cos\theta}{\sin\theta}\sin\alpha\|^2,$$

其中

$$\|P_t-P_o-(P_s-P_o)\cos\theta\|^2 = \\ \|P_t-P_o\|^2 + \|P_s-P_o\|^2\cos^2\theta - \\ 2(P_t-P_o)(P_s-P_o)^T\cos\theta.$$

由定理2化简可得

$$\|P_t-P_o-(P_s-P_o)\cos\theta\|^2 = \\ r^2 - r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta.$$

另外, 由于

$$(P_s-P_o)(P_t-P_o-(P_s-P_o)\cos\theta)^T = \\ (P_s-P_o)(P_t-P_o)^T - \|P_s-P_o\|^2\cos\theta,$$

同样化简可得

$$(P_s-P_o)(P_t-P_o-(P_s-P_o)\cos\theta)^T = 0.$$

因此

$$\|P_{l\alpha}-P_o\|^2 = \\ \|P_s-P_o\|^2\cos^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}r^2\sin^2\theta = r^2. \tag{9}$$

### 5.2 空间圆弧插补在航迹规划中的应用(The application of space circle interpolation in path planning)

如图5所示, 设由人工势场法得到的相邻航迹

点$A,B,C$坐标为$P_{\rm A},P_{\rm B},P_{\rm C}$, 沿直线$BA,BC$取相等线段$d_{\rm BD}=d_{\rm BE}$, 则$D$点坐标$P_{\rm D}=P_{\rm B}+l(P_{\rm B}-P_{\rm A})/\|P_{\rm B}-P_{\rm A}\|$, $E$点坐标$P_{\rm E}=P_{\rm B}+l(P_{\rm B}-P_{\rm C})/\|P_{\rm B}-P_{\rm C}\|$, $l$为线段长度比例系数. 取$DE$中点$F$, 连接$BF$, 可知$BF$与$DE$垂直, $F$点坐标$P_{\rm F}=\dfrac{1}{2}(P_{\rm D}+P_{\rm E})$. 由$F$点分别向$BD,BE$作垂线交于$G$点和$H$点, 可知$d_{\rm FH}=d_{\rm FG}$, $G$点坐标为$P_{\rm G}=P_{\rm B}+d_{\rm BG}(P_{\rm B}-P_{\rm A})/\|P_{\rm B}-P_{\rm A}\|$, $H$点坐标为$P_{\rm H}=P_{\rm B}+d_{\rm BH}(P_{\rm B}-P_{\rm C})/\|P_{\rm B}-P_{\rm C}\|$, 这样空间圆弧起点为$G$点, 终点为$H$点, 圆心为$F$点, 半径为线段长$r=d_{\rm FH}$, 圆心角为$\theta=2\gamma$, 按照第5.1节的方法进行空间圆弧插补.

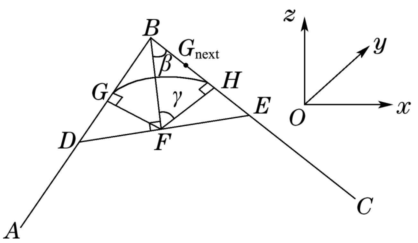



图 5 空间圆弧插补的应用

Fig. 5 Application of space circle interpolation

直线$BA$与$BC$的向量夹角为

$$2\beta=\arccos\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|},$$

圆心角$2\gamma=\pi-2\beta$, 线段$BF$长度为$d_{\rm BF}=\|P_{\rm B}-P_{\rm F}\|$, 则圆弧半径$d_{\rm FH}=d_{\rm BF}\cdot\sin\beta$, 线段$d_{\rm BH}=d_{\rm BF}\cdot\cos\beta$, 计算可得

$$d_{\rm BH}=l\cos^2\beta,\ r=l\sin\beta\cos\beta. \tag{10}$$

此公式证明见附录, 因此可以通过调节长度比例系数$l$来控制空间圆弧半径和转弯点, 但要保证当前圆弧的终点$H$不跨过下一圆弧的起点$G_{\rm next}$, 即出现$d_{\rm BH}>d_{{\rm BG}_{\rm next}}$的现象, 设航迹规划步长为$d_{\rm BA}=\delta_1,d_{\rm BC}=\delta_2$, 满足条件$d_{\rm BG}\leqslant\dfrac{\delta_1}{2},d_{\rm BH}\leqslant\dfrac{\delta_2}{2}$就能避免"跨过现象", 也可根据实际需要设计$d_{\rm BG},d_{\rm BH}$, 满足$d_{\rm BH}\leqslant d_{{\rm BG}_{\rm next}}$即可, 由公式(10)可知转弯点和半径设计与步长$\delta$无关, 步长$\delta$只用于限定$l$取值范围, 有利于有效利用式(7)完成航迹规划.

### 5.3 航迹时域化(Real-time path planning method)

为了便于检验无人机跟踪控制器的效果, 需将得到的三维航迹时域化, 设计控制律跟踪三维航迹. 航迹时域化的本质是规划无人机完成每段航迹所需的时间, 与速度和航迹长度有关.

1) 直线段航迹时域化设直线段航迹两端端点分别为$A$和$B$, 其三维坐标为$P_{\rm A}$和$P_{\rm B}$, 则线段$AB$的长度为$d_{\rm AB}=\|P_{\rm A}-P_{\rm B}\|$, 设无人机以速度$v$匀速飞行, 则完成这段航迹的时间为$T_{\rm AB}=\dfrac{d_{\rm AB}}{v}$. 若无人机到达$A$点的时刻为$t_{\rm A}$, 那么直线段航迹时域方程为

$$p=P_{\rm A}+\frac{v(t-t_{\rm A})}{d_{\rm AB}}(P_{\rm B}-P_{\rm A}),$$
$$t_{\rm A}\leqslant t\leqslant T_{\rm AB}+t_{\rm A}. \tag{11}$$

2) 圆弧段航迹时域化设空间圆弧段航迹两端端点分别为$A$和$B$, 其三维坐标为$P_{\rm A}$和$P_{\rm B}$, 根据空间圆弧插补第5.1节可知, 空间圆弧上的点与二维平面圆弧上的点有对应关系, 相互之间的转换由旋转矩阵$M$来完成. 设无人机以角速度$w$匀速飞行, 则完成这段圆弧航迹的时间为$T_{\rm AB}=\dfrac{\theta}{w}$. 若无人机到达$A$点的时刻为$t_{\rm A}$, 那么圆弧段航迹时域方程为

$$p=M\cdot[r\cos(w(t-t_{\rm A}))\ \ r\sin(w(t-t_{\rm A})),1]^{\rm T},$$
$$t_{\rm A}\leqslant t\leqslant T_{\rm AB}+t_{\rm A}. \tag{12}$$

## 6 全局渐近稳定跟踪控制(Global asymptotic stability tracking control)

位置子系统(1)只有一个控制输入, 姿态子系统(2)有3个控制输入, 且不包含位置子系统的变量. 在位置子系统中通过设计虚拟输入$U=\varGamma_1R$得到$u_1$和中间指令$\phi_{\rm d},\theta_{\rm d}$, 加上任意指定的$\varphi_{\rm d}$, 得到姿态子系统中间指令$\varTheta_{\rm d}=[\phi_{\rm d}\ \ \theta_{\rm d}\ \ \psi_{\rm d}]^{\rm T}$, 然后设计控制律$\varGamma_2$使姿态角跟踪中间指令. 因此可以设计控制律使系统跟踪位置和偏航角, 同时保证俯仰角和滚转角有界. 设位置跟踪信号为$p_{\rm d}$, 且$\dot p_{\rm d},\ddot p_{\rm d}$有界, 则位置跟踪误差为$e_{\rm p}=p-p_{\rm d}$, $\ddot e_{\rm p}=-{\rm g}f+\varGamma_1R-\ddot p_{\rm d}$, 取$\lambda_i(i=1,2)$为正定对角阵, $l_i(i=1,2)>0$, 设计位置控制律为

$$\varGamma_1R=-\lambda_1\tanh(l_1e_{\rm P}+l_2\dot e_{\rm P})-$$
$$\lambda_2\tanh(l_2\dot e_{\rm P})+{\rm g}f+\ddot p_{\rm d}. \tag{13}$$

**定理 4** 考虑位置子系统(1), 设计位置控制律(13)使位置子系统全局渐近稳定, 且虚拟控制输入$\varGamma_1R$有上界.

**证** 设$\lambda_i={\rm diag}\{\lambda_{i1},\lambda_{i2},\lambda_{i3}\}$, $e_{\rm P}=[e_{\rm P1}\ \ e_{\rm P2}\ \ e_{\rm P3}]^{\rm T}$, 选取李雅普诺夫函数$V_1$如下:

$$V_1=\sum_{i=1}^{3}\lambda_{1i}\ln(\cosh(l_1e_{{\rm P}i}+l_2\dot e_{{\rm P}i}))+$$
$$\frac{l_1}{2}\dot e_{\rm P}^{\rm T}\dot e_{\rm P}+\sum_{i=1}^{3}\lambda_{2i}\ln(\cosh(l_2\dot e_{{\rm P}i})). \tag{14}$$

对$V_1$求导可得

$$\dot V_1=\sum_{i=1}^{3}\lambda_{1i}(l_1\dot e_{{\rm P}i}+l_2\ddot e_{{\rm P}i})^{\rm T}\tanh(l_1e_{{\rm P}i}+l_2\dot e_{{\rm P}i})+$$
$$l_1\dot e_{\rm P}^{\rm T}\ddot e_{\rm P}+\sum_{i=1}^{3}\lambda_{2i}l_2\ddot e_{{\rm P}i}^{\rm T}\tanh(l_2\dot e_{{\rm P}i})=$$
$$-\sum_{i=1}^{3}l_2(\lambda_{1i}\tanh(l_1e_{{\rm P}i}+l_2\dot e_{{\rm P}i})+$$
$$\lambda_{2i}\tanh(l_2\dot e_{{\rm P}i}))^2-\sum_{i=1}^{3}l_1\lambda_{2i}\dot e_{{\rm P}i}^{\rm T}\tanh(l_2\dot e_{{\rm P}i})<0.$$

因此位置子系统全局渐近稳定, 由Babalat定理知, 当$t\to\infty$时, $e_{\rm P}\to 0$. 这个控制律最大的特点在于能保证虚拟输入$\varGamma_1R$有界, 对使整个系统全局渐近稳定起到重要作用. 由式(13)得

$$\varGamma_1R\leqslant-\sum_{i=1}^{2}\max\{\lambda_{i1},\lambda_{i2},\lambda_{i3}\}+{\rm g}+\|\ddot{p}_{\rm d}\|. \quad (15)$$

令虚拟控制输入$\varGamma_1R=[u_{\rm x}\ u_{\rm y}\ u_{\rm z}]^{\rm T}$, 展开$\varGamma_1R$可得

$$\begin{bmatrix}u_{\rm x}\\u_{\rm y}\\u_{\rm z}\end{bmatrix}=u_1\begin{bmatrix}c_{\phi_{\rm d}}s_{\theta_{\rm d}}c_{\psi_{\rm d}}+s_{\phi_{\rm d}}s_{\psi_{\rm d}}\\c_{\phi_{\rm d}}s_{\theta_{\rm d}}s_{\psi_{\rm d}}-s_{\phi_{\rm d}}c_{\psi_{\rm d}}\\c_{\phi_{\rm d}}c_{\theta_{\rm d}}\end{bmatrix}. \quad (16)$$

通过设定跟踪任意的偏航角$\varphi_{\rm d}$, 可得期望的俯仰角度$\theta_{\rm d}$, 滚转角度$\theta_{\rm d}$, 输入$u_1$如下:

$$\begin{cases}\theta_{\rm d}=\arctan(\dfrac{u_{\rm x}c_{\psi_{\rm d}}+u_{\rm y}s_{\psi_{\rm d}}}{u_{\rm z}}),\\ \phi_{\rm d}=\arctan(c_{\theta_{\rm d}}\dfrac{u_{\rm x}s_{\psi_{\rm d}}-u_{\rm y}c_{\psi_{\rm d}}}{u_{\rm z}}),\\ u_1=\dfrac{u_{\rm z}}{a_1c_{\phi_{\rm d}}c_{\theta_{\rm d}}}.\end{cases} \quad (17)$$

为保证不出现奇异现象, $u_{\rm z}$不能为零, 由式(13)可知参数$\lambda_{13},\lambda_{23}$需满足约束条件

$$\lambda_{13}+\lambda_{23}<{\rm g}+\|\ddot{p}_{\rm d}\| \quad (18)$$

设姿态子系统跟踪误差为$\varTheta_{\rm e}=\varTheta-\varTheta_{\rm d}$, 则$J\ddot{\varTheta}_{\rm e}=-C\dot{\varTheta}+\varGamma_2-J\ddot{\varTheta}_{\rm d}$, 滑模面$s=\dot{\varTheta}_{\rm e}+\lambda_3\varTheta_{\rm e}$, $\lambda_3>0$, $\dot{\varTheta}_{\rm r}=\dot{\varTheta}_{\rm d}-\lambda_3\varTheta_{\rm e}$, 选取李雅普诺夫函数$V_2=\dfrac{1}{2}s^{\rm T}Js$, 结合$J$和$C$的性质, $\dfrac{\dot{J}}{2}-C$为反对称矩阵, 对$V_2$求导可得

$$\dot{V}_2=\frac{1}{2}s^{\rm T}\dot{J}s+s^{\rm T}Js=s^{\rm T}(\varGamma_2-C\dot{\varTheta}_{\rm r}-J\ddot{\varTheta}_{\rm r}). \quad (19)$$

取姿态子系统控制律

$$\varGamma_2=C\dot{\varTheta}_{\rm r}+J\ddot{\varTheta}_{\rm r}-\lambda_4s. \quad (20)$$

$\lambda_4>0$, 可得$\dot{V}_2=-\lambda_4s^{\rm T}s$, 因此, 姿态子系统全局渐近稳定, 由Babalat定理知, 当$t\to\infty$时, $\varTheta_{\rm e}\to 0$. 整个系统双闭环稳定性分析如下: 如果$\phi,\theta$与$\phi_{\rm d},\theta_{\rm d}$不一致, 必然对位置子系统造成扰动误差, 带有扰动项的位置子系统误差方程为

$$\begin{aligned}\ddot{e}_{\rm p}=&-\lambda_1\tanh(l_1e_{\rm P}+l_2\dot{e}_{\rm P})-\lambda_2\tanh(l_2\dot{e}_{\rm P})+\\&\varGamma_1R(\varTheta)-\varGamma_1R(\varTheta_{\rm d}).\end{aligned} \quad (21)$$

由前面位置子系统控制律设计和式(15)可知, 虚拟输入$\varGamma_1R$有界, 若$\|\varGamma_1\|=\|u_{\rm p}\|$, 则$\|\varGamma_1R(\varTheta)-\varGamma_1R(\varTheta_{\rm d})\|\leqslant 2\|u_{\rm p}\|$有界, 位置子系统(21)等式右边满足全局Lipschitz条件, 在任意初始状态, 系统轨迹在任何有限时间内有界, 因此中间指令信号$\varTheta_{\rm d}$有界. 由于$\|(R(\varTheta)-R(\varTheta_{\rm d}))\|\leqslant 2\sqrt{2}\|\varTheta_{\rm e}\|$, 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1\leqslant&2\sqrt{2}\|\varTheta_{\rm e}\|\|u_{\rm p}\|(l_1\|\dot{e}_{\rm P}\|+\\&l_2\sum_{i=1}^{2}\max\{\lambda_{i1},\lambda_{i2},\lambda_{i3}\})-\\&\sum_{i=1}^{3}l_2(\lambda_{1i}\tanh(l_1e_{{\rm P}i}+l_2\dot{e}_{{\rm P}i})+\\&\lambda_{2i}\tanh(l_2\dot{e}_{{\rm P}i}))^2-\sum_{i=1}^{3}l_1\lambda_{2i}\dot{e}_{{\rm P}i}^{\rm T}\tanh(l_2\dot{e}_{{\rm P}i}).\end{aligned}$$

根据文献[12]中定理3.1的稳定性分析方法, 由于$\varTheta_{\rm e}$渐近收敛, 对于任意$\delta_1>0$, 存在一个有限时间$T_{\delta_1}$, 使得$e_{\rm P}<\delta_1$. 则对于任意$\delta_2>0$, 存在一个有限时间$T_{\delta_2}$, 当$\dot{e}_{\rm P}\geqslant\delta_2$, 使得$\dot{V}_1<0$成立. 因此$e_{\rm P},\dot{e}_{\rm P}$在有限时间内收敛到半径为$\delta_2$的紧集内, 并保持在该紧集内. 又因为$t\to\infty$时, $\varTheta_{\rm e}\to 0$, 因此$t\to\infty$时, $e_{\rm P},\dot{e}_{\rm P}\to 0$.

## 7 仿真实验与分析(Simulation and analysis)

本节的仿真结果是在三维环境下进行的, 充分实现了人工势场法在三维空间的应用. 图6显示了无人机在静态威胁物的环境下的航迹规划, 人工势场法能有效的避开威胁物, 且能在相邻威胁物之间选择安全区域通过.

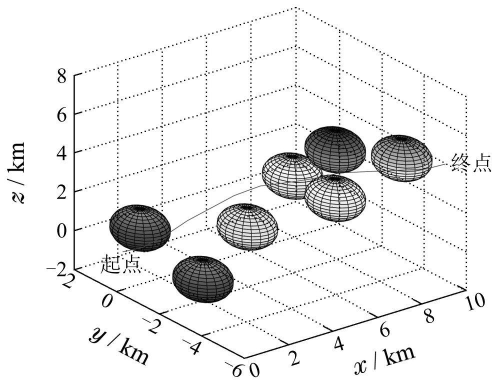



图 6 无人机航迹规划

Fig. 6 Path planning of UAV

图7–9显示了面临局部极小和震荡情况时的解决方法. 图7为使用常规方法的规划航迹, 很明显, 航迹将会陷入威胁物集群形成的凹槽中, 进入危险区域; 图8为在$P$点发现威胁物集群时, 通过适当减小引力系数或设定较大的共同质心点斥力系数使无人机先远离联合威胁物, 再飞向目标点; 图9采取共同质心点下移的方法, 使无人机向上飞行越过联合威胁物. 图10给出了原始生成的航迹和利用空间圆弧插补技术处理原始航迹后形成的光滑航迹.

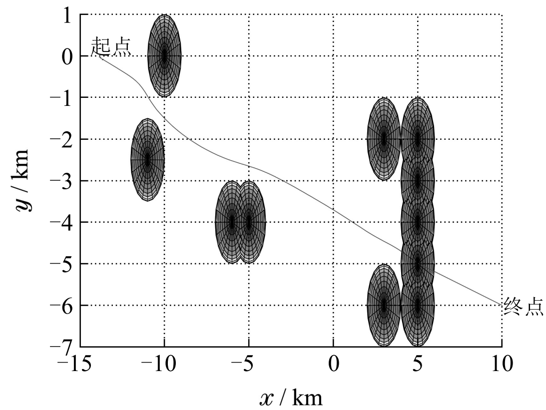



图 7 空间局部极小

Fig. 7 Space local minimal

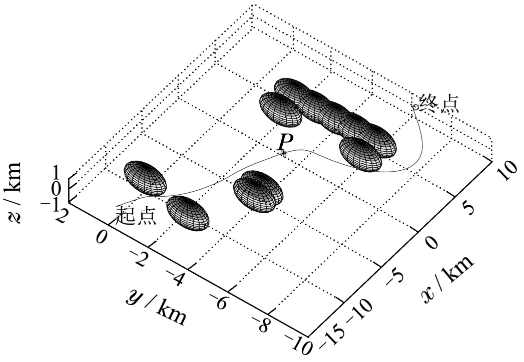



图 8 改变虚拟力系数

Fig. 8 Change of force coefficient

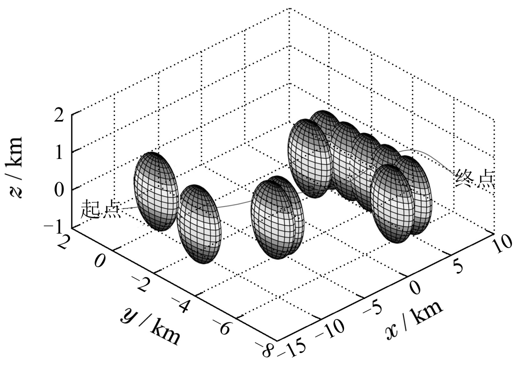



图 9 下移共同质心点

Fig. 9 Move down common center of mass

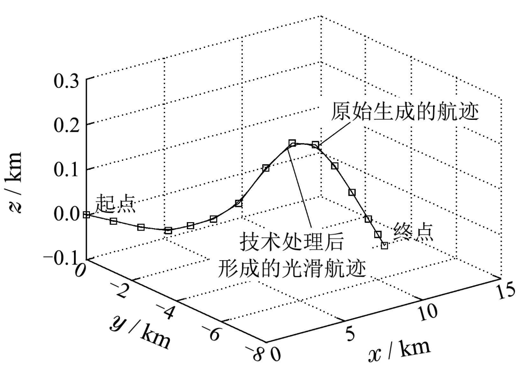



图 10 空间圆弧插补

Fig. 10 Space circle interpolation

图11为某一段光滑轨迹放大图. 图12为直线段航迹跟踪效果图, 图13为位置跟踪误差, 图14为直线段航迹控制输入, 由图可见, 由于在相邻两个直线段连接的路径点处航迹不光滑, 所以在此点进行跟踪时会出现较大的误差. 图15为经过圆弧插补后航迹跟踪效果图, 图16为位置跟踪误差, 图17为光滑航迹控制输入, 由于航迹光滑, 无人机将很好的跟踪规划航迹.

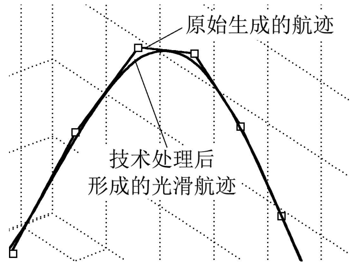



图 11 部分航迹放大图

Fig. 11 Enlarged drawing

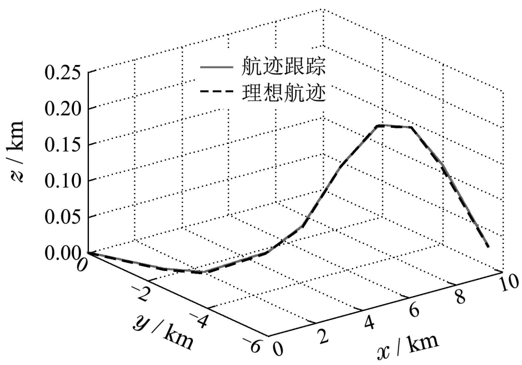



图 12 直线段航迹跟踪

Fig. 12 Line segment path tracking

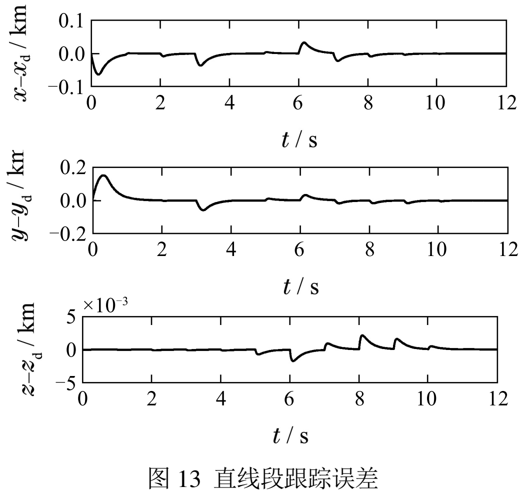
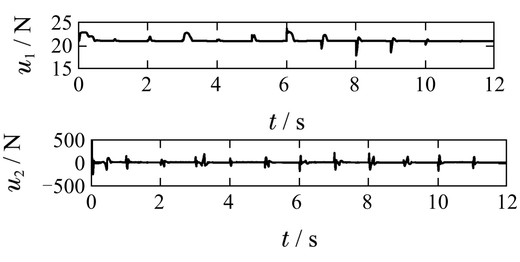



图 13 直线段跟踪误差

Fig. 13 Tracking error of line segment



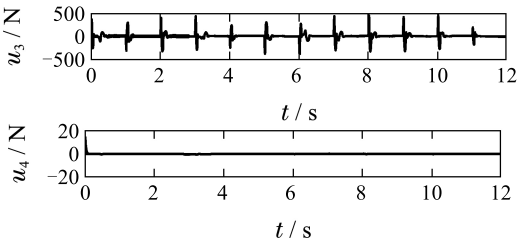



图 14 直线段航迹输入

Fig. 14 Input of line segment

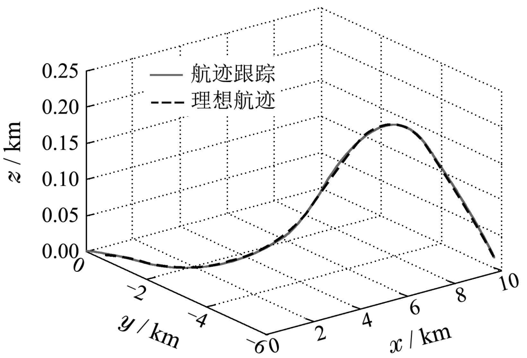



图 15 光滑段航迹跟踪

Fig. 15 Smoothed path tracking

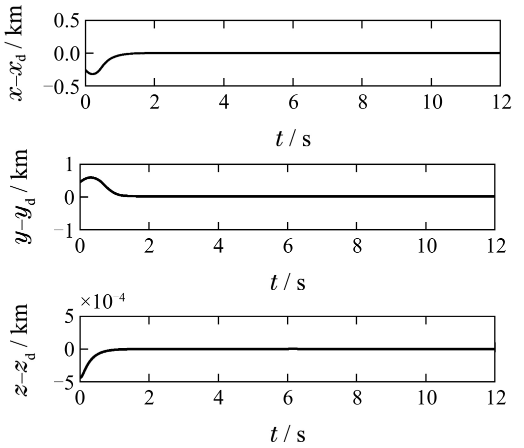



图 16 光滑段跟踪误差

Fig. 16 Tracking error of smoothed path

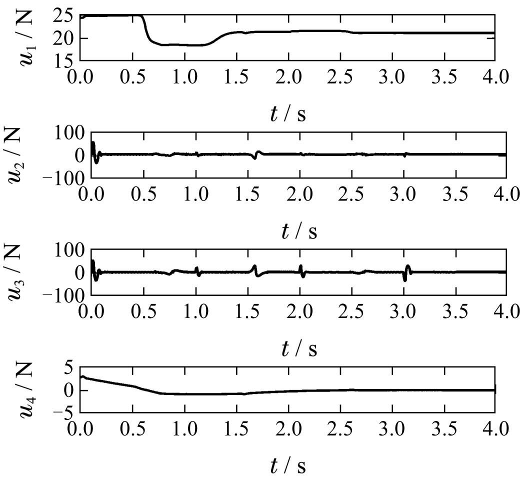



图 17 光滑段航迹输入

Fig. 17 Input of smoothed path

## 8 结论(Conclusion)

本文针对无人机三维环境下航迹规划问题, 提出了一种新颖的基于人工势场的三维航迹规划方法. 给出了目标和威胁物的虚拟力函数, 并推导出了三维空间参数约束方程, 使参数选择有了理论支撑; 将威胁物的纵坐标考虑在内, 而不是基于假定平坦空间进行规划; 为提高航迹的可飞行性, 创新性地引入空间圆弧插补技术生成光滑航迹, 并给出了新技术完整的应用步骤, 此方法能控制转弯点和圆弧半径, 其中转弯点和半径的选择与步长无关, 具有重要的应用意义, 可设计出符合飞行性能的航迹, 同时给出了航迹时域化的方法, 能自主规划无人机完成飞行的时间和速度; 利用动态系统全局渐近稳定定理, 设计具有全局Lipschitz的闭环系统, 实现了具有内外环严格稳定性的双环轨迹跟踪控制, 利用控制算法跟踪时域化的航迹, 实现了三维航迹从规划到执行的整个设计过程. 仿真结果验证了航迹规划和跟踪算法的有效性.

## 参考文献(References):


[1] 宿敬亚, 张瑞峰, 王新华, 等. 基于滤噪微分器的四旋翼飞行器控制 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(8): 827 – 832.
(SU Jingya, ZHANG Ruifeng, WANG Xinhua, et al. Controlling a four-rotor aircraft based on noise-attenuation differentiator [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(8): 827 – 832.)

[2] LEE D B, NATARAJ C, BURG T C, et al. Adaptive tracking control of an underactuated aerial vehicle [C] //*2011 American Control Conference*. New York: IEEE, 2011, 7: 2326 – 2331.

[3] TAKAHASHI O, SCHILLING R J. Motion planning in a plane using generalized Voronoi diagrams [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1989, 5(2): 143 – 150.

[4] KAVRAKI L E, SVESTKA P, LATOMBE J C, et al. Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1996, 12(4): 566 – 580.

[5] HIGASHINO S, KIM J, KUROYANAGI S, et al. Hierarchical flight management and control of autonomous UAVs based on evolutionary computation and total energy concept [C] //*AIAA 3rd Unmanned Unlimited Technical Conference, Workshop and Exhibit*. USA: AIAA, 2004, 9: 1 – 11.

[6] RICHARDS N D, SHARMA M, WARD D G. A hybrid A*/automation approach to online path planning with obstacle avoidance [C] //*AIAA 1st Intelligent Systems Technical Conference*. USA: AIAA, 2004, 1: 141 – 157.

[7] 刘莉, 于成龙, 王祝, 等. 小型无人机快速三维航迹规划方法 [J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(12): 2521 – 2526.
(LIU Li, YU Chenglong, WANG Zhu, et al. Fast 3D route planning method for small UAV [J]. *System Engineering and Electronics*, 2013, 35(12): 2521 – 2526.)

[8] 姚远, 周兴社, 张凯龙, 等. 基于稀疏A*搜索和改进人工势场的无人机动态航迹规划 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(7): 953 – 959.
(YAO Yuan, ZHOU Xingshe, ZHANG Kailong, et al. Dynamic trajectory planning for unmanned aerial vehicle based on sparse A* search and improved artificial potential field [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(7): 953 – 959.)

[9] DONG Zhuoning, ZHANG Rulin, CHEN Zongji, et al. Study on UAV path planning approach based on fuzzy virtual force [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2010, 23(3): 341 – 350.

[10] 王伟, 王华. 基于约束人工势场法的弹载飞行器实时避障航迹规划 [J]. 航空动力学报, 2014, 29(7): 1738 – 1743.
(WANG Wei, WANG Hua. Real-time obstacle avoidance trajectory planning for missile borne air vehicle based on constrained artificial potential field method [J]. *Journal of Aerospace power*, 2014, 29(7): 1738 – 1743.)

[11] BOTTASSO C L, LEONELLO D, SAVINI B. Path planning for autonomous vehicles by trajectory smoothing using motion primitives [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2008, 16(6): 1152 – 1168.

[12] AILON A. Simple tracking controllers for autonomous VTOL aircraft with bounded inputs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(3): 737 – 743.

## 附录(Appendix)

向量$(P_{\rm B}-P_{\rm A})$用向量$P_{\rm BA}$表示, 则$D$点坐标:

$$P_{\rm D}=P_{\rm B}+\frac{lP_{\rm BA}}{\|P_{\rm BA}\|},$$

$E$点坐标:
$$P_{\rm E}=P_{\rm B}+\frac{lP_{\rm BC}}{\|P_{\rm BC}\|},$$

$l$为线段长度比例系数, $F$点坐标$P_{\rm F}=\dfrac{1}{2}(P_{\rm D}+P_{\rm E})$, 因此,

$$P_{\rm F}=\frac{1}{2}(P_{\rm B}+\frac{lP_{\rm BA}}{\|P_{\rm BA}\|}+P_{\rm B}+\frac{lP_{\rm BC}}{\|P_{\rm BC}\|})=$$
$$P_{\rm B}+\frac{1}{2}(\frac{lP_{\rm BA}}{\|P_{\rm BA}\|}+\frac{lP_{\rm BC}}{\|P_{\rm BC}\|}).$$

由图5可知$d_{\rm BH}=d_{\rm BF}\cos\beta$, 则

$$d_{\rm BF}=\|P_{\rm B}-P_{\rm F}\|=\frac{1}{2}\left\|\frac{lP_{\rm BA}}{\|P_{\rm BA}\|}+\frac{lP_{\rm BC}}{\|P_{\rm BC}\|}\right\|,\quad(22)$$

$$d_{\rm BH}=d_{\rm BF}\cos\beta=\frac{1}{2}\left\|\frac{lP_{\rm BA}}{\|P_{\rm BA}\|}+\frac{lP_{\rm BC}}{\|P_{\rm BC}\|}\right\|\cos\beta.\quad(23)$$

而$2\beta=\arccos\dfrac{BA\cdot BC}{\|BA\|\cdot\|BC\|}$, 其中

$$BA=P_{\rm B}-P_{\rm A}=P_{\rm BA},BC=P_{\rm B}-P_{\rm C}=P_{\rm BC},$$

则
$$P_{\rm BA}\cdot P_{\rm BC}=\|P_{\rm BA}\|\,\|P_{\rm BC}\|\cos2\beta.$$
设
$$\|P_{\rm BA}\|=\delta_1,\|P_{\rm BC}\|=\delta_2,$$
则
$$d_{\rm BH}=\frac{l}{2}\|\frac{P_{\rm BA}}{\delta_1}+\frac{P_{\rm BC}}{\delta_2}\|\cos\beta,$$
取$\|\ \|_2$范数, 得

$$\left\|\frac{P_{\rm BA}}{\delta_1}+\frac{P_{\rm BC}}{\delta_2}\right\|=$$
$$\sqrt{\frac{\|P_{\rm BA}\|^2}{\delta_1^2}+\frac{\|P_{\rm BC}\|^2}{\delta_2^2}+\frac{2\,\|P_{\rm BA}\|\,\|P_{\rm BC}\|\cos2\beta}{\delta_1\delta_2}}=$$
$$\sqrt{2+2\cos2\beta}=\sqrt{2(1+\cos2\beta)}=$$
$$\sqrt{2\cdot2\cos^2\beta}=2\cos\beta.$$

因此

$$d_{\rm BH}=d_{\rm BG}=\frac{l}{2}\left\|\frac{P_{\rm BA}}{\delta_1}+\frac{P_{\rm BC}}{\delta_2}\right\|\cos\beta=l\cos^2\beta.\quad(24)$$

由于$d_{\rm FH}=d_{\rm FG}$, 转弯点$P_{\rm G}=P_{\rm B}+\dfrac{d_{\rm BH}P_{\rm BA}}{\|P_{\rm BA}\|}$, $P_{\rm H}=P_{\rm B}+\dfrac{d_{\rm BH}P_{\rm BC}}{\|P_{\rm BC}\|}$, 则圆弧半径为

$$d_{\rm FH}=d_{\rm BF}*\sin\beta=l\sin\beta\cos\beta.\quad(25)$$

## 作者简介:

**方 旭** (1991–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为控制理论与控制工程, E-mail: fangxubuaa@126.com.cn;

**刘金琨** (1965–), 男, 博士生导师, 目前研究方向为先进控制理论与应用, E-mail: ljk@buaa.edu.cn.