

网络化系统周期信号的跟踪

邬依林^{1,2}, 沈志萍^{3†}

(1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640; 2. 广东第二师范学院 计算机科学系, 广东 广州 510310;

3. 河南师范大学 数学与信息科学学院 大数据统计分析与优化控制河南省工程实验室, 河南 新乡 453007)

摘要: 研究线性时不变、单变量、离散网络化系统对周期信号的跟踪问题. 与现有文献考虑的参考输入信号大都为常见的能量信号所不同的是, 本文参考输入信号是离散时间周期方波功率信号. 相应地, 研究系统对基于功率谱的参考输入信号功率的响应, 系统的跟踪性能通过输入信号与受控对象输出之差的功率来衡量, 而最优跟踪性能采用跟踪误差的平均功率来度量. 考虑的网络化控制系统仅上行通道存在丢包误差的影响, 把丢包过程看作两个信号的合成, 一是确定性信号, 二是随机过程, 进而丢包误差描述为源信号和白噪声之间乘积. 根据被控对象和随机过程的性质, 采用Parseval等式、维纳-辛钦定理和范数矩阵理论得到该系统跟踪性能极限的下界表达式. 仿真结果表明, 所设计的控制器能实现对周期信号的有效跟踪, 进而验证了结论的正确性.

关键词: 丢包; 周期方波信号; 功率谱; 跟踪性能极限; 网络化控制系统

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

The tracking problem in networked systems with periodic signal reference input

WU Yi-lin^{1,2}, SHEN Zhi-ping^{3†}

(1. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;

2. Department of Computer Science, Guangdong University of Education, Guangzhou Guangdong 510310, China;

3. Henan Engineering Laboratory for Big Data Statistical Analysis and Optimal Control, School of Mathematics and Information Sciences, Henan Normal University, Xinxiang Henan 453007, China)

Abstract: The tracking problem in linear time invariant SISO discrete-time networked systems with periodic signal reference input is studied. The most important difference between the exist works on the tracking problem and this paper is that the reference input signal considered in the latter is a discrete-time periodic square wave power signal, whereas the reference input signal considered in most of the former is the common energy signal. Accordingly, we study the system response to the power of input signal based on power spectrum. The tracking performance is measured by the power of the tracking error between the plant output and the reference and the optimal tracking performance is thus measured by the mean power of the tracking error. We consider this case for which there may be packet dropouts only in the forward channel in the communication network. Subsequently, the packet dropouts may be described by a certain type of signal and an uncertain type of signal, the error in packet dropouts is assumed to be a product of the original signal and a white noise. By applying Parseval identity and Wiener-Khinchin theorem as well as norm matrix theory, the lower bound of the performance in tracking is derived in terms of the characteristics of the plant and the uncertain type of signal. Numerical simulation results demonstrate the effectiveness in tracking periodic signal under the control of optimal tracking controller presented in this study. Consequently, it demonstrates the correctness of our result.

Key words: packet dropouts; periodic square wave signal; power spectrum; tracking performance limitation; networked control systems

收稿日期: 2015-02-03; 录用日期: 2016-01-06.

†通信作者. E-mail: zpshen@htu.cn; Tel.: +86 373-3326148.

本文责任编辑: 夏元清.

国家自然科学基金项目(61273109), 广东第二师范学院教授博士科研专项经费项目(2014ARF25), 广东省科技计划项目(2016A010106007, 2014A090906010), 华南理工大学中央高校基本科研业务费(2015ZZ026), 河南省高等学校重点科研项目(16A120005), 河南师范大学博士科研启动经费(5101019170158)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61273109), Appropriative Researching Fund for Professors and Doctors, Guangdong University of Education (2014ARF25), Science and Technology Planning Project of Guangdong Province, China (2016A010106007, 2014A0909060-10), Fundamental Research Funds for the Central Universities of South China University of Technology (2015ZZ026), Key Scientific Research Project of Universities and Colleges in Henan (16A120005) and Foundation for Ph.D of Henan Normal University, China(5101019170158).

1 引言(Introduction)

控制系统的跟踪性能研究是一类经典的控制问题^[1-2]. 针对经典控制系统性能极限的研究已经非常成熟, 文献[3-6]分别从不同的控制结构、不同的参考输入信号以及控制系统不同的性能需求等角度研究了经典控制系统的性能极限问题.

近年来, 许多学者已从经典控制系统转向研究网络化系统的性能极限. 在经典控制系统中引入网络环节的网络化系统通过网络实现信息的传送与交换. 通信方式的改变, 一方面, 使网络化系统相对于经典控制系统具有许多的优点. 例如网络打破了经典控制系统点对点连接的格局, 降低了控制系统复杂度和成本. 通过网络将众多远程节点(或设备)有机地组合起来, 协同完成单个节点(或设备)无法完成的工作, 如隐形飞行器的拦截需要雷达网、防空单元、作战飞机等协同完成. 此外, 通过网络综合来自不同节点的信息, 对网络化系统的状态进行实时的估计、分析和监测, 如高速列车网中, 路轨沿线的传感器与列车上的传感器组成了一个巨型的传感器网络, 调度室根据网络中的测量信息对网络中高速运行的列车和其他设备的状态进行实时估计, 确保整个系统高效安全地运行. 总之, 通过把不同设备进行组网, 可以进一步提升系统的整体功能和运行品质. 另一方面, 也会给网络化系统带来一些新的问题, 例如通信网络使数据在传输中不可避免地受到噪声、通信时延、量化误差和数据包丢失等因素影响, 从而导致控制系统性能下降或不稳定, 甚至崩溃. 因此很有必要对网络化系统性能极限开展研究, 值得庆幸的是, 国内外已经取得一些研究成果^[7-10]. 针对量化因素的影响, 以阶跃信号为参考输入信号, 文献[7]研究线性时不变网络化控制系统最优跟踪性能, 表明量化会降低最优跟踪性能. 针对反馈通道中存在高斯白噪声的影响, 以随机信号为参考输入信号, 文献[8]研究线性时不变控制系统最优跟踪性能, 表明高斯白噪声会降低跟踪性能. 针对网络丢包的影响, 文献[9]研究线性时不变系统的最优跟踪性能问题, 表明数据包丢失会降低跟踪性能. 文献[10]提出使不稳定的系统达到稳定所需的网络数据传输速率下确界. 上述研究结果均揭示出被控对象的本质特征和通信参数共同决定了网络化系统的跟踪性能. 然而, 目前针对网络化系统跟踪问题的研究, 其跟踪的参考输入信号大都是常见的能量信号, 鲜见对功率信号的跟踪.

受上述文献的启发, 在工业中广泛存在的功率信号如周期方波信号, 在网络化系统中作为参考输入是否同能量信号一样存在最优跟踪? 通信参数又将如何影响跟踪性能? 即本研究针对网络化系统中普遍存在的丢包影响, 讨论线性时不变、单变量、离散系统对离散时间周期方波信号的跟踪问题. 考虑的网络化系统仅上行通道存在丢包影响, 把丢包过程看作两个信号

的合成, 一是确定性信号, 二是随机过程, 进而丢包误差描述为源信号和白噪声之间乘积. 为了实现渐近跟踪目的, 系统采用双控制器结构, 一是被控对象本地控制器, 可满足本地闭环系统稳定, 并配置本地系统的零极点到期望的零极点; 二是远程前馈控制器, 可实现系统跟踪目的, 该控制器在描述方式上采用极点矩阵与系数矩阵相乘形式, 设计该控制器时, 只需求解其系数矩阵, 而其极点矩阵可根据需要任意配置, 以达到抵消网络化系统中因丢包误差而对跟踪性能带来的不利影响的. 该设计方法的最大优点是直观和易实现. 此外, 本文跟踪的离散时间周期方波序列是典型的功率信号, 即平均功率有限, 能量无限. 因而, 无法选择现有文献中普遍采用的研究系统对参考输入信号能量的响应, 只宜研究系统对参考输入信号功率的响应, 相应地, 对信号都基于功率谱描述. 缘此, 系统的跟踪性能采用输入信号与受控对象输出之差的功率来衡量, 最优跟踪性能采用跟踪误差的平均功率来度量.

本文所采用的符号为标准数学符号. \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^+ 和 \mathbb{C} 分别表示整数、正整数和复数; $(\cdot)^T$, $(\cdot)^H$ 分别表示向量或矩阵转置和其共轭转置; $E(\cdot)$ 表示随机变量的数学期望; $\delta(\cdot)$ 表示单位脉冲; $\text{diag}\{\dots\}$ 表示把相应元素对角化后而构成的矩阵; 对于共轭对称矩阵 X , $X > 0$ 表示 X 是正定的.

2 问题描述(Problem statement)

本节从系统结构、参考输入信号和系统跟踪性能指标3个方面对本文研究的问题进行描述.

2.1 系统结构描述(System structure statement)

考虑如图1所示的具有丢包的网络化系统, 系统采用二自由度控制器结构.

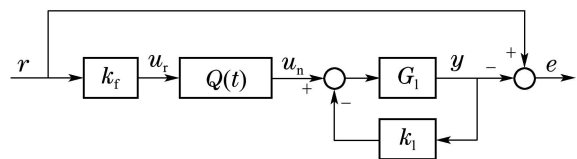


图1 具有丢包的网络化控制系统

Fig. 1 Structure of a network control system with packet dropouts

图1中, 反馈控制器 k_1 为本地控制器, 可保证本地系统稳定、严真, 并指定控制系统期望的零极点, 记本地闭环系统为 G_c . k_f 为前馈控制器, 可实现系统跟踪目的. $Q(t)$ 为丢包随机过程, 可描述为 $Q(t) = \begin{cases} 1, & \text{未丢包概率为 } 1 - q, \text{ 即信号 } u_r \text{ 通过的概率为 } 1 - q, \\ 0, & \text{丢包概率为 } q, \end{cases}$ 丢失的概率为 q . 前馈控制器 k_f 输出信号 u_r 通过丢包 $Q(t)$ 后得到控制信号 u_n , 并作用于稳定、严真的闭环系统 G_c . r 为系统参考输入信号, 这里 r 取矩形方波

周期信号, y 为系统输出, e 是系统跟踪误差. 易得

$$E\{Q(t)\} = E\{Q(t)^2\} = 1 - q. \quad (1)$$

可以把 $Q(t)$ 等价看作两个信号的合成, 一是确定性信号 $1 - q$, 二是随机过程 $\omega(t)$, 即

$$Q(t) = (1 - q) + \omega(t). \quad (2)$$

由式(1)和式(2)可得

$$E\{\omega(t)\} = 0, E\{\omega(t)^2\} = q(1 - q) = \sigma^2. \quad (3)$$

因此, 根据图1和式(2), 可将如图1所示系统等效转换为如图2所示系统.

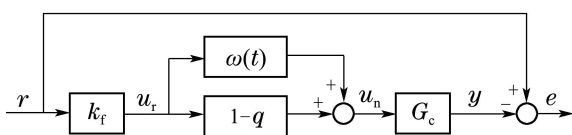


图 2 具有丢包的网路控制系统等效图

Fig. 2 Equivalent structure of a network control system with packet dropouts

从图2可以看出

$$u_r = k_f r \quad (4)$$

及

$$u_n = (1 - q)u_r + \omega(t)u_r. \quad (5)$$

2.2 周期方波信号描述 (Periodic square wave signal statement)

本文研究基于网络环境下线性时不变、单变量、离散系统对参考输入信号的跟踪问题. 与现有文献中跟踪参考输入信号大都为常见的能量信号不同的是, 这里跟踪的参考输入信号为离散时间周期方波序列功率信号. 通常, 如图3所示离散时间周期方波序列 $r(n)$ 可由如图4所示的连续时间周期方波信号 $r(t)$ 通过适当方法离散化而获得.

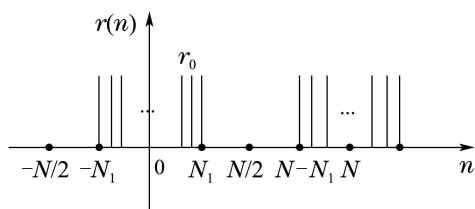


图 3 离散时间周期方波序列

Fig. 3 Discrete-time periodic square wave sequence

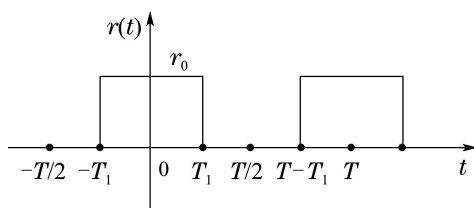


图 4 连续时间周期方波信号

Fig. 4 Continuous-time periodic square wave signal

如图4所示的连续时间周期方波信号 $r(t)$ 可描述为

$$r(t) = \begin{cases} r_0, & |t| \leq T_1, \\ 0, & T_1 < |t| \leq \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (6)$$

其中 T 为的基波周期. 易得占空比 $\rho = (2T_1 + 1)/T$.

由式(6), 易得如图3所示离散时间周期方波序列 $r(n)$ 表达式为

$$r(n) = \begin{cases} r_0 \delta(n - KT_s), & |n| \leq N_1, \\ 0, & N_1 < |n| \leq \frac{N}{2}, \end{cases} \quad (7)$$

其中: $N \in \mathbb{Z}$ 为 $r(n)$ 的基波周期, T_s 为采样周期, K 为冲激波的序列号. 显然, $N = T/T_s$, $N_1 = T_1/T_s$. 易得占空比 $\rho = (2N_1 + 1)/N$, 基波频率 $\omega_b = \frac{2\pi}{N}$.

2.3 系统性能指标描述 (Tracking performance index statement)

根据线性时不变系统输入-输出稳定性(BIBO)定理, 对于稳定、严真的线性时不变系统, 必定是 p -稳定的 ($p = 2$), 即有限 2 -范数输入产生相应的有限 2 -范数输出. 也即当系统 2 -范数为有限值时, 对于无限 2 -范数输入, 相应得到无限 2 -范数输出. 因此, 对于图2所示系统, 参考输入信号为离散时间周期方波序列, 其 2 -范数, 即信号能量, 是无穷的. 那么, 系统的输出 y 能量也是无穷的. 也就是说, 系统的跟踪性能无法通过输入信号与受控对象输出之差的能量来衡量, 只宜采用其功率来度量.

参考输入周期方波信号 r 在一个周期中的平均功率函数为 $P_\infty^r = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} |r(n)|^2$, 在整个时间轴上的平均功率函数为

$$P_\infty^r = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa} \sum_{l=0}^{\kappa-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} |r(lN + n)|^2 \right),$$

其中: n 为一个基波周期内冲激波的序列号, κ 为 $r(n)$ 在整个时间轴上的周期总数, l 为 $r(n)$ 的周期序列号.

显然, $\sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} n = N$, $\sum_{l=0}^{\kappa-1} l = \kappa$.

定义 1 1) 参考输入信号 r 在一个周期中的能量函数为 $E_\infty^r = \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} |r(n)|^2$, 其中: N 为 $r(n)$ 的基波周期, n 为一个基波周期内冲激波的序列号;

2) 系统跟踪误差函数为 $e(n) = r(n) - y(n)$; 系统跟踪误差在一个周期中的能量函数为 $E_\infty^e = \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} \{E |e(n)|^2\}$;

3) 系统跟踪误差在整个时间轴上的平均功率函数为

$$P_\infty^e = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa} \sum_{l=0}^{\kappa-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} |e(lN + n)|^2 \right)$$

为

$$P_\infty^e = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa} \sum_{l=0}^{\kappa-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} \mathbb{E}(|e(lN+n)|^2) \right].$$

基于以上描述,引出本文研究的问题.

问题的提出:由上述文献可知,对于网络化系统的跟踪问题,一般地,参考输入信号为常见能量信号时,系统跟踪性能由被控对象的本质特征和通信参数共同决定.然而,当跟踪参考输入信号为离散时间周期方波序列时,系统是否仍存在最优跟踪?通信参数又将如何影响跟踪性能?有必要进行讨论并建立相关结果,即研究基于网络化系统对周期信号的跟踪问题.

据上文所述,只宜选择研究系统对信号 r 功率的响应,系统的跟踪性能 J 可采用跟踪误差的平均功率 P_∞^e 来衡量,即

$$J = P_\infty^e = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa} \sum_{l=0}^{\kappa-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} \mathbb{E}(|e(lN+n)|^2) \right]. \quad (8)$$

由于 $e(lN+n)$ 是控制器 k_f 的函数,因此最优跟踪结合 ω 的性质,设计控制器 k_f ,使得性能 J_{opt} 最小,即

$$J_{\text{opt}} = \inf_{k_f} \left\{ \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa} \sum_{l=0}^{\kappa-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} \mathbb{E}(|e(lN+n)|^2) \right] \right\}. \quad (9)$$

3 主要结果(Main result)

在如图2所示的具有丢包的网络化控制系统中,设被控对象 $G_c(e^{jk\omega_b})$ 为

$$G_c(e^{jk\omega_b}) = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m) \begin{bmatrix} \frac{1}{e^{jk\omega_b} + \lambda_1} & \frac{1}{e^{jk\omega_b} + \lambda_2} \\ \cdots & \frac{1}{e^{jk\omega_b} + \lambda_m} \end{bmatrix}^T. \quad (10)$$

控制器 $k_f(e^{jk\omega_b})$ 为

$$k_f(e^{jk\omega_b}) = \left(\frac{1}{e^{jk\omega_b} + p_1} \ \frac{1}{e^{jk\omega_b} + p_2} \ \cdots \ \frac{1}{e^{jk\omega_b} + p_m} \right) K, \quad (11)$$

以及参考输入信号 $r(e^{jk\omega_b})$,

$$r(e^{jk\omega_b}) = (r(e^{j0\omega_b}) \ r(e^{j\omega_b}) \ \cdots \ r(e^{j(N-1)\omega_b})). \quad (12)$$

其中: $K = [k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_m]^T$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $a_i, \lambda_i, p_i, k_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $m \in \mathbb{Z}^+$. 在给出文章主要结论之前,先给出引理.

引理1 考虑如图2所示的网络化控制系统,被控对象 G_c 如式(10),则系统的跟踪性能 J 可表示为

$$J = J_1 + J_2, \quad (13)$$

其中:

$$J_1 =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \|[1 - (1-q)G_c(e^{jk\omega_b})k_f(e^{jk\omega_b})]r(e^{jk\omega_b})\|_2^2, \quad (14)$$

$$J_2 = \frac{\sigma^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \|G_c(e^{jk\omega_b})k_f(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})\|_2^2. \quad (15)$$

证明见附录.

注1 系统的跟踪性能 J 由两部分构成.其中 J_1 为系统跟踪性能中确定性部分,与通信信道中确定性信号相关; J_2 为系统跟踪性能中不确定性部分,与通信信道中随机过程相关.

注2 相比于文献[7],本文所考虑的系统结构、被控对象以及参考输入信号与其均不相同,但二者的跟踪性能 J 的表达式,即本文式(13)与文献[7]中式(12),在形式上类似,在结构上相同.

注3 注意到对于式(13),若 $q = 0$,即系统上行通道不存在丢包,则 $\sigma^2 = 0$,式(13)退化为标准的线性时不变系统跟踪性能表达式.若 $q = 1$,即系统上行通道中所有包丢失,系统跟踪性能值等于参考输入信号平均功率.易看出,在这两种极端情况下,系统的跟踪性能表达式与实际相吻合.

下面给出本文得到的主要结论,为证明过程简单起见,取式(10)和式(11)中 $m = 3$.

定理1 考虑如图2所示的网络化控制系统,被控对象 G_c 如式(10),则系统的最优跟踪性能 J_{opt} 可表示为

$$J_{\text{opt}} = A - \Omega \Delta^{-1} \Omega^H, \quad (16)$$

其中:

$$A = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |r(e^{jk\omega_b})|^2,$$

$$\Delta = \frac{1-q}{N} \cdot \Lambda^H \cdot \text{diag}\{|G_c(e^{j0\omega_b})r(e^{j0\omega_b})|^2, \dots, |G_c(e^{j(N-1)\omega_b})r(e^{j(N-1)\omega_b})|^2\} \cdot \Lambda,$$

$$\Omega = \frac{q-1}{N} \cdot (a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \Phi \cdot \text{diag}\{|r(e^{j0\omega_b})|^2, \dots, |r(e^{j(N-1)\omega_b})|^2\} \cdot \Lambda,$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_{N1} & \Lambda_{N2} & \Lambda_{N3} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{21} & \cdots & \Phi_{N1} \\ \Phi_{12} & \Phi_{22} & \cdots & \Phi_{N2} \\ \Phi_{13} & \Phi_{23} & \cdots & \Phi_{N3} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{it} = \frac{1}{e^{j(i-1)\omega_b} + p_t}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad t = 1, 2, 3,$$

$$\Phi_{it} = \frac{1}{e^{j(i-1)\omega_b} + \lambda_t}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad t = 1, 2, 3.$$

证 根据式(10)–(12),则式(14) J_1 可表示为

$$J_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \{[I \cdot r(e^{jk\omega_b}) - (1-q)G_c(e^{jk\omega_b})k_f(e^{jk\omega_b})]$$

$$\begin{aligned}
 & r(e^{jk\omega_b})]^H \cdot [I \cdot r(e^{jk\omega_b}) - (1-q)G_c(e^{jk\omega_b}) \cdot \\
 & k_f(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})] \} = \\
 & \frac{q-1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [r^H(e^{jk\omega_b})G_c(e^{jk\omega_b})k_f(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})] + \\
 & \frac{q-1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} r^H(e^{jk\omega_b})k_f^H(e^{jk\omega_b})G_c^H(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})] + \\
 & \frac{(1-q)^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [r^H(e^{jk\omega_b})k_f^H(e^{jk\omega_b})G_c^H(e^{jk\omega_b}) \cdot \\
 & G_c(e^{jk\omega_b})k_f(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})] + \\
 & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [r^H(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})]. \tag{17}
 \end{aligned}$$

同理, 式(15)可表示为

$$\begin{aligned}
 J_2 = & \frac{\sigma^2 N-1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [r^H(e^{jk\omega_b})k_f^H(e^{jk\omega_b})G_c^H(e^{jk\omega_b}) \cdot \\
 & G_c(e^{jk\omega_b}) \times k_f(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})]. \tag{18}
 \end{aligned}$$

将式(17)–(18)代入式(13), 则系统的跟踪性能 J 可表示为

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [r^H(e^{jk\omega_b}) \cdot r(e^{jk\omega_b})] + \frac{q-1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [r^H(e^{jk\omega_b}) \cdot \\
 & G_c(e^{jk\omega_b})k_f(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})] + \frac{q-1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [r^H(e^{jk\omega_b}) \cdot \\
 & k_f^H(e^{jk\omega_b})G_c^H(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})] + \frac{1-q}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [r^H(e^{jk\omega_b}) \cdot \\
 & k_f^H(e^{jk\omega_b})G_c^H(e^{jk\omega_b})G_c(e^{jk\omega_b})k_f(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})]. \tag{19}
 \end{aligned}$$

下面分别计算式(19)中各项. 记式(19)中各项分别为 $J_{(1)}, J_{(2)}, J_{(3)}$ 和 $J_{(4)}$, 即

$$\begin{aligned}
 J_{(1)} = & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [r^H(e^{jk\omega_b}) \cdot r(e^{jk\omega_b})] = \\
 & \frac{1}{N} \cdot \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} r^H(e^{-j0\omega_b}) \\ r^H(e^{-j\omega_b}) \\ \vdots \\ r^H(e^{-j(N-1)\omega_b}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(e^{j0\omega_b}) \\ r(e^{j\omega_b}) \\ \vdots \\ r(e^{j(N-1)\omega_b}) \end{bmatrix}^T \right\} = \\
 & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |r(e^{jk\omega_b})|^2, \tag{20} \\
 J_{(2)} = & \frac{q-1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [r^H(e^{jk\omega_b})G_c(e^{jk\omega_b})k_f(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})] = \\
 & \frac{q-1}{N} \cdot (a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \Phi \cdot \text{diag}\{|r(e^{j0\omega_b})|^2, \dots, \\
 & |r(e^{j(N-1)\omega_b})|^2\} \cdot \Lambda \cdot K = \Omega K. \tag{21}
 \end{aligned}$$

同样地,

$$\begin{aligned}
 J_{(3)} = & \frac{q-1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [r^H(e^{jk\omega_b})k_f^H(e^{jk\omega_b}) \cdot \\
 & G_c^H(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})] = K^H \Omega^H, \tag{22} \\
 J_{(4)} = & \frac{1-q}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [r^H(e^{jk\omega_b})k_f^H(e^{jk\omega_b})G_c^H(e^{jk\omega_b}) \times \\
 & G_c(e^{jk\omega_b})k_f(e^{jk\omega_b})r(e^{jk\omega_b})] = K^H \Delta K. \tag{23}
 \end{aligned}$$

将式(20)–(23)代入式(19), 则系统的跟踪性能 J 为

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |r(e^{jk\omega_b})|^2 + \Omega K + K^H \Omega^H + K^H \Delta K. \tag{24}$$

将记号 A 代入式(24), 则式(24)可重新写为

$$J = A + \Omega K + K^H \Omega^H + K^H \Delta K. \tag{25}$$

可看出, A 为参考输入信号 r 的平均功率, K 为系统前馈控制器 k_f 的系数矩阵, 式(25)是关于 K 的二次型方程.

显然, Δ 为正定矩阵, 即 $\Delta > 0$, 则有

$$\Delta = \Delta^H, \Delta^{-1} = (\Delta^H)^{-1}. \tag{26}$$

将式(26)代入式(25), 得

$$J = A + (K^H \Delta^H + \Omega) \Delta^{-1} (\Delta K + \Omega^H) - \Omega \Delta^{-1} \Omega^H.$$

由于

$$(K^H \Delta^H + \Omega) \Delta^{-1} (\Delta K + \Omega^H) \geq 0,$$

要使 J 取得最小值, 当且仅当 $\Delta K + \Omega^H = 0$ 成立. 由此, 可求得最优控制器 K_{opt} 为

$$K_{\text{opt}} = -\Delta^{-1} \Omega^H. \tag{27}$$

将最优控制器式(27)代入式(25), 可得最优跟踪性能 J_{opt} 为

$$J_{\text{opt}} = A - \Omega \Delta^{-1} \Omega^H.$$

注 4 最优跟踪性能 J_{opt} 与随机过程 $\omega(t)$ 的方差 σ^2 无关, 仅与丢包概率 q 有关, q 越大, J_{opt} 值越大.

注 5 系统最优跟踪性能 J_{opt} 由系统对参考输入信号 r 在 N 个频率点的响应共同决定, 但由信号 r 功率谱分布可知, 最优跟踪性能 J_{opt} 主要取决于系统对信号 r 低频段的响应情况.

注 6 前馈控制器 k_f 的极点 $p_i (i = 1, 2, 3)$ 可根据需要任意指定.

注 7 定理 1 结论仅针对线性时不变、单变量三阶系统 ($m = 3$), 其实, 该结论可自然推广到任意阶次系统.

4 数值仿真(Numerical simulation)

本节主要是对本文提出的最优跟踪控制器的设计算法以及系统对周期信号的跟踪效果进行验证. 仿真软件采用 MATLAB 2014a 优化版.

4.1 仿真模型(Simulation model)

首先构造如图 5 所示的丢包随机过程 $Q(t)$ 仿真模

型. 当 $Q(t) = 1$ 时, 离散时间系统中下一拍控制信号得以有效传达; 当 $Q(t) = 0$ 时, 离散时间系统中下一拍控制信号不能有效传达, 系统维持上一拍信号.

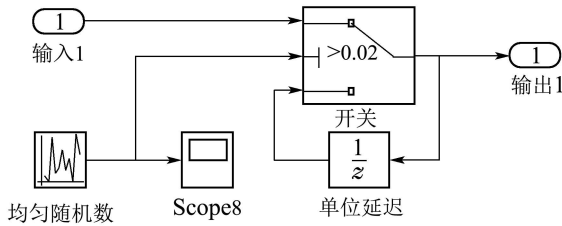


图5 丢包过程仿真模型

Fig. 5 Simulation mode of packet dropouts

然后构造如图6所示的系统Simulink仿真模型.

在图6中, 由于控制器 k_f 可能产生复信号, 因此需要两个丢包环节分别通过实部与虚部, 再重新组合成复信号送到控制对象 G_c . 模型上半部分为未含控制器 k_f 的开环系统, 模型下半部分为包含控制器 k_f 的系统, 目的是想通过对比以验证系统在 k_f 下的跟踪效果. 后面的仿真波形均基于该模型产生.

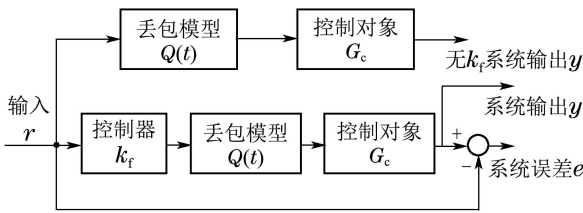


图6 系统Simulink仿真模型

Fig. 6 System Simulink mode

4.2 被控对象 G_c 和控制器 k_f 的 z 变换 (z -transformation method for controlled object G_c and controller k_f)

仿真中需要将式(10)控制对象 G_c 和式(11)控制器 k_f 的模型进行变换. 根据周期离散信号傅里叶变换及 z 变换关系, 控制对象 $G_c(z)$ 可表示为

$$G_c(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{G_c(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

由于该模型较复杂不便于Simulink仿真实现, 本节仿真采用 G_c 的近似模型

$$G_c(z) = \frac{a_1}{z + \lambda_1} + \frac{a_2}{z + \lambda_2} + \frac{a_3}{z + \lambda_3}$$

同理, 可得控制器模型为

$$k_f(z) = \frac{k_1}{z + p_1} + \frac{k_2}{z + p_2} + \frac{k_3}{z + p_3}$$

4.3 最优跟踪控制器设计及跟踪效果 (Optimal tracking controller design and tracking effect)

如无特别说明, 仿真参数选择为

$$r_0 = 1, N = 50, \rho = 50\%, q = 5\%,$$

$$[a_1, a_2, a_3] = [3, 2, 1], [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = [0.2, 0.3, 0.4], [p_1, p_2, p_3] = [0.1, 0.2, 0.3].$$

则根据本文的最优跟踪设计算法, 仿真计算得

$$\Omega = [-0.0369, 0.0340, -0.0314],$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0.1628 & 0.1503 & 0.1398 \\ 0.1503 & 0.1391 & 0.1295 \\ 0.1398 & 0.1295 & 0.1209 \end{bmatrix}.$$

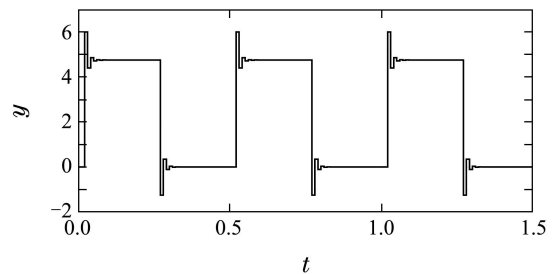
最优跟踪控制器系数为

$$K_{opt} = [1.3226 \quad -1.6849 \quad 0.5359]^T.$$

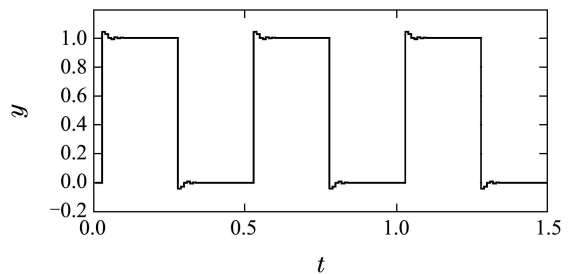
最优跟踪性能指标

$$J_{opt} = 0.0492.$$

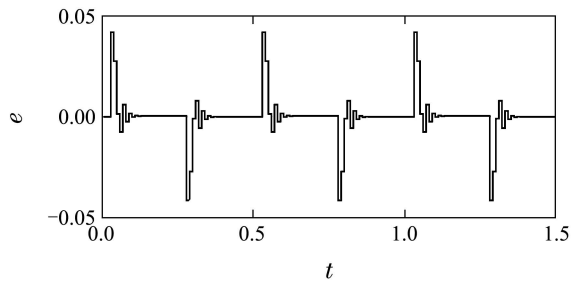
系统输出 y 和误差信号 e 波形如图7所示. 图7中横轴表示时间, 纵轴表示幅值.



(a) 系统无控制器情况下输出 y 波形



(b) 系统有控制器 k_f 情况下输出 y 波形



(c) 系统有控制器 k_f 情况下跟踪误差 e 波形

图7 当有无控制器 k_f 时跟踪效果对比图

Fig.7 Tracking effect with or without controller k_f

从图7(a)–(c)可以看出, 在无控制器情况下, 系统无法实现跟踪(图7(a)中系统输出 y 幅值为5左右, 而参考输入信号实际幅值为1). 系统在有控制器 k_f 情况下, 虽然在周期方波参考输入信号幅值跳变处(其余点幅

值基本为1), 系统输出 y 有一定程度波动, 但可以实现跟踪, 这说明本文的最优跟踪控制器设计是可行的. 有一定程度波动的原因是 N 选取过小、控制器主极点离原点较远等. 这些参数对跟踪误差的影响和选择原则请参见文献[11].

丢包率 q 对跟踪性能的影响如图8所示. 反映丢包率 q 在 $[0, 1]$ 之间变化时, 相应的跟踪性能指标 J_{opt} 的变化情况. 图8中横轴表示丢包率 q , 纵轴表示跟踪性能指标 J_{opt} 的幅值. 从图8可以看出, 随着丢包率 q 的增大, 跟踪误差明显增大, 这与主观认识是相符的. 特别地, 当 $q = 0$ 时, 系统可实现零误差跟踪, 当 $q = 1$ 时, 跟踪性能指标 J_{opt} 值为0.5, 该值正好等于占空比 $\rho = 50\%$ 的周期方波参考输入信号平均功率, 这一结果与理论分析和计算一致. 这表明第4.2节对模型的近似处理方式是合理的, 所设计的最优跟踪控制器算法是正确的. 需要说明的是, 图8仿真参数选择为 $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = [0.7, 0.8, 0.9]$, $[p_1, p_2, p_3] = [0.05, 0.1, 0.15]$, 其余参数与前面相同.

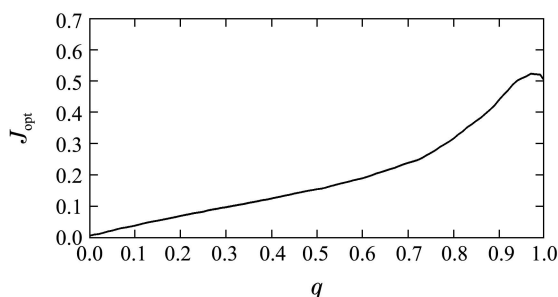


图8 丢包率 q 对跟踪性能的影响

Fig. 8 Impact of packet-loss rate q on tracking performance

5 结束语(Conclusions)

本文针对网络系统中普遍存在的丢包的影响, 研究基于网络环境下线性时不变、单变量、离散系统对离散时间周期方波信号的跟踪问题. 与现有文献中跟踪参考输入信号大都为常见的能量信号不同的是, 本文跟踪的参考输入信号为离散时间周期方波序列功率信号. 因而, 选择研究系统对参考输入信号功率的响应. 首先, 从最优跟踪性能极限与跟踪误差的自相关函数的关系出发, 根据被控对象和不确定性的随机过程的性质, 采用Parseval等式、维纳-辛钦定理和范数矩阵理论, 得到基于信号功率谱的系统跟踪性能的表达式, 并以三阶系统为例, 得到该系统跟踪性能极限的下界表达式. 仿真结果表明, 所设计的控制器能实现对周期信号的有效跟踪, 证明本文结论是正确的.

参考文献(References):

- [1] BODE H W. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* [M]. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1945.
- [2] MORARI M, ZARIRIOU E. *Robust Process Control* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1989.

- [3] CHEN J, QIU L, TOKER O. Limitations on maximal tracking accuracy [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(2): 326 – 331.
- [4] SU W Z, QIU L, CHEN J. Fundamental performance limitations in tracking sinusoidal signals [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(8): 1371 – 1380.
- [5] SU W Z, QIU L, CHEN J. Fundamental limit of discrete-time systems in tracking multi-tone sinusoidal signals [J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 15 – 30.
- [6] DING Li, GUAN Zhihong, WANG Houneng. Tracking performance limitations of random signal in multivariable discrete-time systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 30(4): 446 – 449. (丁李, 关治洪, 王后能. 多变量离散系统随机信号跟踪性能极限 [J]. *自动化学报*, 2010, 30(4): 446 – 449.)
- [7] QI Tian, LIU Yin, SU Weizhou. The performance limit in tracking of a linear system with a quantized control signal [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(7): 745 – 750. (祁恬, 刘寅, 苏为洲. 基于量化控制信号的线性系统的跟踪性能极限 [J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(7): 745 – 750.)
- [8] DING L, WANG H N, GUAN Z H, et al. Tracking under additive white Gaussian noise effect [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2010, 4(11): 2471 – 2478.
- [9] WU J, ZHAN X S, ZHANG H, et al. Best tracking of discrete-time systems based on packet dropout constraint [J]. *ICIC Express Letters, Part B: Applications*, 2012, 3(2): 389 – 394.
- [10] NAIR G, EVANS R. Exponential stabilizability of finite-dimensional linear systems with limited data rates [J]. *Automatica*, 2003, 39(4): 1632 – 1637.
- [11] WU Yilin. *Analysis and design for linear discrete-time control systems with network-induced multiplicative noises* [D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2016: 120 – 133. (邬依林. 具有网络诱导乘性噪声的线性离散时间控制系统分析与设计 [D]. 广州: 华南理工大学, 2016: 120 – 133.)

附录 引理1的证明(Appendix Proof of Lemma 1)

证 由自相关函数定义, 可得到系统跟踪误差 e 的自相关函数 $R_e(\tau)$ 为

$$R_e(\tau) = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa} \sum_{l=0}^{\kappa-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} e(lN+n)e(lN+n+\tau) \right]. \quad (\text{A1})$$

当 $\tau = 0$ 时, 得 $R_e(0) = P_\infty^e$,

对 $R_e(0)$, 求参数 ω 的数学期望, 得

$$\begin{aligned} E_\omega[R_e(0)] &= \\ \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa} \sum_{l=0}^{\kappa-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} E_\omega |e(lN+n)|^2 \right) &= \\ E_\omega\{P_\infty^e\}. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

根据式(9)和式(A2), 系统最优跟踪性能可表示为

$$J_{\text{opt}} = \inf_{k_f} \{E_\omega[R_e(0)]\}. \quad (\text{A3})$$

注A1 式(A3)表明系统最优跟踪性能 J_{opt} 可通过系统跟踪误差 e 的自相关函数 $R_e(\tau)$ 的最大值 $R_e(0)$ 的最小值来表征.

另外, 一个离散时间周期方波信号作用于一个稳定的离散系统, 系统输出 $z = z_t + z_s$, z_s 为系统输出 z 的稳态值, z_t 为

系统输出 z 的瞬态值. 相应地, 系统跟踪误差 $\tilde{e} = \tilde{e}_s - z_t$, \tilde{e}_s 为系统稳态误差. 缘此, 式(8)系统的跟踪性能 J 可表示为

$$J = E\left\{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{N\kappa} \sum_{l=0}^{\kappa-1} \left[\sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} [r(lN+n) - y(lN+n)]^2 \right] \right\} = E\left\{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{N\kappa} \sum_{l=0}^{\kappa-1} \left[\sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} [r(lN+n) - y_s(lN+n)]^2 - 2 \times [r(lN+n) - y_s(lN+n)] \times y_t(lN+n) + y_t^2(lN+n) \right] \right\}. \quad (\text{A4})$$

根据柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式, 式(A4)中第2项可得

$$E\left\{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{N\kappa} \left[\sum_{l=0}^{\kappa-1} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} [r(lN+n) - y_s(lN+n)] \times y_t(lN+n) \right] \right\} \leq E\left\{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{N\kappa} \left\{ \left[\sum_{l=0}^{\kappa-1} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} [r(lN+n) - y_s(lN+n)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{l=0}^{\kappa-1} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} y_t^2(lN+n) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right\} = E\left\{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{N\kappa} \left\{ \left[\sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} [r(lN+n) - y_s(lN+n)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{l=0}^{\kappa-1} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} y_t^2(lN+n) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right\}. \quad (\text{A5})$$

由于

$$E\left\{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{N\sqrt{\kappa}} \left[\sum_{l=0}^{\kappa-1} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} y_t^2(lN+n) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = 0,$$

而

$$\left[\sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} [r(lN+n) - y_s(lN+n)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \beta,$$

β 为常数, 因此

$$E\left\{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{N\kappa} \left\{ \left[\sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} [r(lN+n) - y_s(lN+n)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{l=0}^{\kappa-1} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} y_t^2(lN+n) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right\} = 0. \quad (\text{A6})$$

同理, 可得式(A4)中第3项为

$$E\left\{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{N\kappa} \sum_{l=0}^{\kappa-1} \left[\sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} y_t^2(lN+n) \right] \right\} = 0. \quad (\text{A7})$$

将式(A6)和式(A7)代入式(A4), 可得

$$J = E\left\{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{N\kappa} \sum_{l=0}^{\kappa-1} \left[\sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} [r(lN+n) - y_s(lN+n)]^2 \right] \right\}, \quad (\text{A8})$$

其中 κ 表示参考输入信号 r 的周期总数.

注A2 由式(A8)可知, 系统跟踪性能取决于系统稳态误差. 根据定义1及上文关于跟踪误差的陈述, 系统稳态误差 $e_s(n)$ 为

$$e_s(n) = r(n) - y_s(n).$$

设 g 为系统 G_c 在输入信号 u_n 作用下的脉冲响应, 则图2中系统 G_c 的输出 $y(n)$ 的稳态值 $y_s(n)$ 可表示为

$$y_s(n) = g * u_n = \sum_{m=0}^n g(n-m)u_n(m). \quad (\text{A9})$$

将式(5)代入式(A9), 可得

$$y_s(n) = \sum_{m=0}^n g(n-m) \{ (1-q)u_r(m) + \omega(m)u_r(m) \}. \quad (\text{A10})$$

再将式(A10)代入式(A8), 则系统的跟踪性能 J 可写成

$$J = E\left\{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{N\kappa} \left\{ \sum_{l=0}^{\kappa-1} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} \left[r(lN+n) - \sum_{m=0}^n g(lN+n-m)(1-q)u_r(lN+m) - \sum_{m=0}^n g(lN+n-m)\omega(lN+m)u_r(lN+m) \right]^2 \right\} \right\}. \quad (\text{A11})$$

通过将上式中确定性项组合, 并将其与含有非确定参数 ω 项分离, 再结合式(3), 则式(A11)可进一步写成

$$J = E\left\{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{N\kappa} \left\{ \sum_{l=0}^{\kappa-1} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} [r(lN+n) - \sum_{m=0}^n g(lN+n-m)(1-q)u_r(lN+m)]^2 + \sum_{l=0}^{\kappa-1} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} \left[\sum_{m=0}^n g(lN+n-m)\omega(lN+m) \cdot u_r(lN+m) \right]^2 \right\} \right\} = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} [r(n) - (1-q) \sum_{m=0}^n g(n-m)u_r(m)]^2 \right\} + \frac{\sigma^2}{N} \left\{ \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} \left[\sum_{m=0}^n g(n-m)u_r(m) \right]^2 \right\}. \quad (\text{A12})$$

注A3 当系统处于稳态时, 求解整个时间轴上跟踪误差平均功率等价于求解一个周期内跟踪误差平均功率.

由式(A12)可看出, 系统性能指标 J 包含两项, 一是确定性部分, 二是不确定性部分. 记确定性部分为 J_1 , 即

$$J_1 = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} [r(n) - \sum_{m=0}^n g(n-m)(1-q)u_r(m)]^2 \right\}. \quad (\text{A13})$$

记不确定性部分为 J_2 , 即

$$J_2 = \frac{\sigma^2}{N} \left\{ \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} \left[\sum_{m=0}^n g(n-m)u_r(m) \right]^2 \right\}. \quad (\text{A14})$$

对于 J_1 而言, 记

$$w(n) = r(n) - (1-q) \sum_{m=0}^n g(n-m)u_r(m). \quad (\text{A15})$$

再将式(A15)代入式(A13), 可得

$$J_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} [w(n)]^2 = R_w(0),$$

其中 $R_w(0)$ 为信号 $w(n)$ 的自相关函数的最大值, 也是 $w(n)$ 信号的平均功率.

根据Parseval等式和维纳-辛钦定理, J_1 可表示为

$$J_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} w^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_w(e^{jk\omega_b}), \quad (A16)$$

其中: $\omega_b = \frac{2\pi}{N}$ 为离散信号 $w(n)$ 的基波频率, 为基波周期, $\frac{1}{N}$ 是各次谐波上的带宽, 共有 N 个谐波分量. $S_w(e^{jk\omega_b})$ 是信号 $w(n)$ 在第 k 次谐波分量上的功率谱密度; $\frac{1}{N} S_w(jk\omega_b)$ 表示第 k 次谐波分量上的功率密度(或平均功率).

注A4 式(A16)表明信号平均功率等于各次谐波功率密度(或平均功率)的总和.

由式(A16)及利用Parseval等式, 式(A13)可表示为

$$J_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \{ [1 - (1 - q)G_c k_f(e^{jk\omega_b})]^H [1 - (1 - q) \times G_c k_f(e^{jk\omega_b})] S_r(e^{jk\omega_b}) \} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \{ [1 - (1 - q)G_c k_f(e^{jk\omega_b})]^H [1 - (1 - q) \times G_c k_f(e^{jk\omega_b})] r^H(e^{jk\omega_b}) r(e^{jk\omega_b}) \}. \quad (A17)$$

同理, 对于 J_2 有相似的结论, 可得

$$J_2 = \frac{\sigma^2}{N} \left\{ \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} \left[\sum_{m=0}^n g(n-m) u_r(m) \right]^2 \right\} = \frac{\sigma^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \{ [G_c(e^{jk\omega_b}) k_f(e^{jk\omega_b})]^H [G_c(e^{jk\omega_b}) k_f(e^{jk\omega_b})] \times r^H(e^{jk\omega_b}) r(e^{jk\omega_b}) \}. \quad (A18)$$

将式(A17)和式(A18)代入式(22), 性能指标 J 为

$$J = J_1 + J_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \| [1 - (1 - q)G_c(e^{jk\omega_b}) k_f(e^{jk\omega_b})] r(e^{jk\omega_b}) \|^2 + \frac{\sigma^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \| G_c(e^{jk\omega_b}) k_f(e^{jk\omega_b}) r(e^{jk\omega_b}) \|^2.$$

证毕.

作者简介:

邬依林 (1970-), 男, 博士研究生, 教授, 主要研究方向为混沌控制、复杂系统建模、网络化系统分析与设计、智能控制等, E-mail: lyw@gdei.edu.cn;

沈志萍 (1984-), 女, 博士, 副教授, 主要研究方向为混沌控制、网络化系统分析与设计等, E-mail: zpshen@htu.cn.