

含有未知控制方向的非线性时滞系统学习控制

李广印, 杨 扬[†]

(云南师范大学 信息学院, 云南 昆明 650092)

摘要: 本文对于一类含有未知控制方向及时滞的非线性参数化系统, 设计了自适应迭代学习控制算法. 在设计控制算法过程中采用了参数分离技术和信号置换思想来处理系统中出现的时滞项, Nussbaum增益技术解决未知控制方向等问题. 为了对系统中出现的未知时变参数和时不变参数进行估计, 分别设计了差分及微分参数学习律. 然后通过构造的Lyapunov-Krasovskii复合能量函数给出了系统跟踪误差渐近收敛及闭环系统中所有信号有界的条件. 最后通过一个仿真例子说明了控制器设计的有效性.

关键词: 时变时滞; 未知控制方向; 非线性参数化系统; Nussbaum增益技术

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Learning control for nonlinear systems with unknown control direction and unknown time-varying delay

LI Guang-yin, YANG Yang[†]

(School of Information Science and Technology, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan 650092, China)

Abstract: In this work, we propose an adaptive iterative learning control algorithm for a class of nonlinearly parameterized systems with unknown control direction and unknown time-varying delay. The existing unknown time-varying delay is well resolved by using parameter separation method and signal replacement mechanism in the process of the design, and the lack of a priori knowledge of the control direction is also dealt with by the Nussbaum-gain technique incorporated into the control design. Moreover, both difference and differential updating laws are configured for the estimates of the unknown time-varying parameter and the constant parameter. Then based on a constructed Lyapunov-Krasovskii composite energy function, a sufficient condition of the convergence of the system error asymptotically along the iteration axis and the boundedness of all signals in the closed-loop system is given. A simulation example is presented to validate the effectiveness of the proposed control method.

Key words: time-varying delay; unknown control direction; nonlinearly parameterized systems; Nussbaum-gain technique

1 引言(Introduction)

时滞广泛存在于各类工程系统当中, 比如振荡器、电网、核反应堆等. 解决时延时滞问题对于系统的稳定性及对目标轨迹的精确跟踪具有重要意义. 文献[1–3]分别采用自适应重复学习控制以及自适应迭代学习控制方法研究了一类含有未知非线性参数化时变时滞系统, 但是都没有考虑控制方向未知的问题. 实现系统输出对参考信号的跟踪是常见的控制目标, 但是文献[4]则提出了一种新颖的自适应迭代学习控制方法, 使得实际跟踪误差能够收敛于预先给定的期望误差轨迹, 并且在每次迭代时允许初值定位在任意位置. 文献[5]利用开闭环迭代学习控制方法来提高压

电驱动器的高频轨迹跟踪精度, 文献[6]考虑了一类含有参数和非参数不确定性的输出约束系统, 并提出了自适应迭代学习控制算法.

在航空航天, 以及船舶航向等应用领域, 控制方向未知是控制系统中需要解决的另外一个重要问题. 所谓控制方向, 即控制变量前面的控制增益的符号, 它决定着系统的运动方向, 所以在控制器设计中具有重大作用. 如果控制方向不同的话, 即使是同样的控制输入, 也会带来控制结果的巨大差异, 使得系统剧烈震荡. Nussbaum首先针对一类简单的一阶系统解决了控制方向未知的问题, 同时提出了著名的Nussbaum增益方法^[7]. 随后Nussbaum增益技术成为

收稿日期: 2015–03–06; 录用日期: 2015–11–05.

[†]通信作者. E-mail: yyang_ynu@163.com; Tel.: +86 18314452528.

本文责任编辑: 刘淑君.

云南省教育厅科学研究重点项目(2015Z069), 云南师范大学博士科研启动基金项目(01000205020503065)资助.

Supported by Key Scientific Research Project of Education Department of Yunnan Province(2015Z069) and Doctoral Scientific Research Foundation of Yunnan Normal University (01000205020503065).

了解决未知控制方向问题的一种常用的办法,并在自适应控制领域得到了发展^[8-10].文献[11]考虑了一类含有未知控制方向的非线性参数化时滞系统,但是要求初始误差为零,未知控制增益是常参数.文献[12]采用部分限幅的鲁棒自适应方法研究了一类含有未知控制方向的非线性系统,但是没有考虑时滞以及非线性参数化的问题.

本文采用自适应迭代学习控制方法研究了一类含有未知控制方向的非线性参数化时滞系统,主要创新概括如下:

1) 提出了一种处理系统中含有时滞项的非线性参数的解决方法.

2) 解决了未知非线性参数,未知时变时滞,未知时不变参数耦合的参数化问题.

3) 针对含有未知时变时滞的非线性系统,设计了自适应迭代学习控制算法,采用对齐条件,放宽了初始误差为零的限制要求.

规定: \mathbb{Z}_+ 表示非负整数集合; $*$ 表示对未知参数 $*$ 的估计; $C[0, T]$ 表示定义在区间 $[0, T]$ 上的连续函数空间; 向量 $x(t)$ 的 $L^2_{[0, T]}$ 范数定义为

$$\|x\|_{L^2_{[0, T]}} = \left(\int_0^T \|x(\sigma)\|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

若 $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T \|x_i\|^2 d\sigma = 0$, 则称 $x_i(t)$ 在 $L^2_{[0, T]}$ 范数意义下收敛于零; 若 $\sup_{i \in \mathbb{Z}_+} \int_0^T \|x_i\|^2 d\sigma < \infty$, 则称 $x_i(t)$ 在 $L^2_{[0, T]}$ 范数意义下有界.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑下列非线性不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f(x_i(t-\tau(t)), \vartheta(t))\xi(x_i)\theta + b(t)u_i(t), \\ x_0(t) = \varpi(t), t \in [-\tau_{\max}, 0], \end{cases} \quad (1)$$

其中: i 是迭代次数; $x_i(t) \in \mathbb{R}$ 是可测的系统状态; $u_i(t) \in \mathbb{R}$ 是系统控制输入; $\vartheta(t) \in C[0, T]$ 是未知连续时变参数; θ 是符号已知,值未知常参数,不失一般性,令 $\theta > 0$; $\xi(x_i)$ 是已知连续函数; $\tau(t) \in C[0, T]$ 是未知时变时滞项,并且满足 $\tau(t) < \tau_{\max}, \forall t \in [0, T]$; $\tau_{\max} > 0$ 是一个已知常数; $f(\cdot, \cdot)$ 是一个未知连续可微函数; $x_0(t) = \varpi(t), t \in [-\tau_{\max}, 0]$ 是已知连续函数,表示系统的初始状态; $b(t) \in C[0, T]$, 要求 $b(t) \neq 0$, b 的符号决定系统的控制方向,假设未知.

给定参考信号 $x_i^r(t) \in C[-\tau_{\max}, T]$; 其中参考信号的初始状态为 $x_0^r(t) = o(t), t \in [-\tau_{\max}, 0]$. 定义第 i 次迭代时的跟踪误差为 $e_i = x_i - x_i^r$, 控制目标是找到一系列合适的控制输入 $u_i(t)$, 在区间 $[0, T]$ 上, 当迭代次数 i 趋于无穷大时, 使得系统状态跟踪误差 e_i 在 $L^2_{[0, T]}$ 范数意义下渐近收敛于零, 并且保证闭环系

统中的所有信号在 $L^2_{[0, T]}$ 范数意义下有界.

为了实现以上控制目标, 对系统(1)及目标轨线做以下假设:

假设 1 未知时变时滞 $\tau(t)$ 满足 $\dot{\tau}(t) \leq \eta < 1$, 即 $-\frac{1-\dot{\tau}(t)}{1-\eta} \leq -1$.

假设 2 未知函数 $f(\cdot, \cdot)$, 关于第1个变量局部李普希茨连续, 即满足 $|f(x(t), \vartheta) - f(x_r(t), \vartheta)| \leq |x(t) - x_r(t)|h(e(t))\lambda(\vartheta)$, 其中 $h(\cdot), \lambda(\cdot)$ 分别是已知和未知非负连续函数.

假设 3 $e_i(t) = e_{i-1}(T+t), \forall t \in [-\tau_{\max}, 0]$, 即 $x_i(t) = x_{i-1}(T+t), x_i^r(t) = x_{i-1}^r(T+t), i > 0$ 为迭代次数.

假设 4 $\vartheta(0) = \vartheta(T), \tau(0) = \tau(T)$.

定义 1 $\nu(\cdot)$ 是一个光滑的Nussbaum函数, 具有以下特点^[8]:

$$\begin{aligned} \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s \nu(k) dk &= \infty, \\ \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s \nu(k) dk &= -\infty. \end{aligned}$$

在本文中, 选择的Nussbaum函数为 $\nu(k) = \cos(\frac{\pi}{2}k) \exp(k^2)$.

引理 1 $V(\cdot)$ 和 $k(\cdot)$ 是定义在区间 $[0, t_f]$ 上的光滑函数, $\forall t \in [0, t_f], V(t) \geq 0, \nu(\cdot)$ 是光滑的Nussbaum类型函数, $b(t)$ 是时变参数, 在一个闭区间 $B = [b_-, b_+], 0 \notin B$ 内取值, 如果下列不等式成立:

$$V(t) \leq c_0 + \int_0^t (b(\sigma)\nu(k(\sigma)) + 1)\dot{k}(\sigma) d\sigma,$$

其中 c_0 代表一些合适的常量, 那么 $V(t), k(t)$ 和 $\int_0^t (b(\sigma)\nu(k(\sigma)) + 1)\dot{k}(\sigma) d\sigma$ 在区间 $[0, t_f]$ 上有界.

证明见附录^[12].

3 控制器设计(Controller design)

第 i 次迭代时的跟踪误差动态方程可表示如下(在下面分析过程中, 为了表示方便, 在不产生歧义的情况下将省略时间符号 t):

$$\dot{e}_i(t) = \Theta(t)\xi(x_i)\theta + b(t)u_i - \dot{x}_i^r + \Lambda_i\xi(x_i)\theta, \quad (2)$$

其中: $\Lambda_i = f(x_i(t-\tau(t)), \vartheta) - f(x_i^r(t-\tau(t)), \vartheta)$, $\Theta(t) = f(x_i^r(t-\tau(t)), \vartheta)$, 由假设2可知 Λ_i 满足下列不等式:

$$|\Lambda_i| \leq |e_i(t-\tau(t))| \cdot h(e_i(t-\tau(t)))\lambda(\vartheta). \quad (3)$$

考虑第 i 次迭代时的Lyapunov-Krasovskii泛函

$$V_i(t) = \frac{1}{2}e_i^2 + \frac{1}{2(1-\eta)} \int_{t-\tau(t)}^t e_i^2 h^2(e_i) d\sigma. \quad (4)$$

对等式(4)两边求导, 由式(2)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) = & e_i(t)(\Theta(t)\xi(x_i)\theta + b(t)u_i - \dot{x}_i^r + \\ & \Lambda_i\xi(x_i)\theta) + \frac{1}{2(1-\eta)}e_i^2(t)h^2(e_i(t)) - \\ & \frac{1-\dot{\tau}(t)}{2(1-\eta)}e_i^2(t-\tau(t))h^2(e_i(t-\tau(t))). \end{aligned} \quad (5)$$

利用式 (3), Yong's 不等式 $\bar{x} \cdot \bar{y} \leq \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$, $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, 可以得到

$$\begin{aligned} |e_i(t)\xi(x_i)\theta\Lambda_i| \leq & \\ |e_i(t)\xi(x_i)\theta||e_i(t-\tau(t))|h(e_i(t-\tau(t)))\lambda(\vartheta) \leq & \\ \frac{1}{2}\xi^2(x_i)\theta^2\lambda^2(\vartheta)e_i^2(t) + & \\ \frac{1}{2}e_i^2(t-\tau(t))h^2(e_i(t-\tau(t))). & \end{aligned} \quad (6)$$

将式(6)代入式(5), 同时利用假设1可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) \leq & e_i(t)(\Theta(t)\xi(x_i)\theta + b(t)u_i - \dot{x}_i^r + \\ & \omega(t)\psi_i) + \frac{1}{2(1-\eta)}e_i^2(t)h^2(e_i(t)), \end{aligned} \quad (7)$$

其中: $\omega(t) = \theta^2\lambda^2(\vartheta)$, $\psi_i = \frac{1}{2}\xi^2(x_i)e_i(t)$.

构造的第*i*次迭代的学习控制律如下:

$$\begin{cases} u_i(t) = \nu(k_i(t))z_i(t), \\ \dot{k}_i(t) = z_i(t)e_i(t), k_i(0) = k_{i-1}(T), k_0(0) = 0, \\ z_i(t) = ce_i(t) + \hat{\Theta}_i(t)\xi(x_i)\hat{\theta}_i(t) - \dot{x}_i^r + \\ \frac{1}{2(1-\eta)}e_i(t)h^2(e_i(t)) + \hat{\omega}_i(t)\psi_i, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $c > 0$ 是一个已知的常数.

时变参数 $\Theta(t)$, 时不变参数 θ , 时变参数 $\omega(t)$ 的学习律分别为

$$\hat{\Theta}_i(t) = \begin{cases} 0, & i = -1, \\ \frac{t}{T}q_1\xi(x_i)e_i(t), & i = 0, \\ \text{proj}(\hat{\Theta}_{i-1}) + q_1\xi(x_i)e_i(t), & i \geq 1, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_i(t) = q_2\xi(x_i)\hat{\Theta}_i(t)e_i(t), \\ \hat{\theta}_i(0) = \hat{\theta}_{i-1}(T), \hat{\theta}_{-1}(t) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\hat{\omega}_i(t) = \begin{cases} 0, & i = -1, \\ \frac{t}{T}q_3\psi_i e_i(t), & i = 0, \\ \text{proj}(\hat{\omega}_{i-1}(t)) + q_3\psi_i e_i(t), & i \geq 1, \end{cases} \quad (11)$$

其中: i 是迭代次数, $q_1 > 0, q_2 > 0, q_3 > 0$ 分别是常数增益; $\text{proj}(\cdot)$ 为投影函数, $\hat{\Theta}_i(t), \hat{\omega}_i(t)$ 的投影函数分别定义为

$$\text{proj}(\hat{\Theta}_i(t)) = \begin{cases} \Theta_{\max}, & \hat{\Theta}_i(t) > \Theta_{\max}, \\ \hat{\Theta}_i(t), & \Theta_{\min} \leq \hat{\Theta}_i(t) \leq \Theta_{\max}, \\ \Theta_{\min}, & \hat{\Theta}_i(t) < \Theta_{\min}, \end{cases}$$

$$\text{proj}(\hat{\omega}_i(t)) = \begin{cases} \omega_{\max}, & \hat{\omega}_i(t) > \omega_{\max}, \\ \hat{\omega}_i(t), & \omega_{\min} \leq \hat{\omega}_i(t) \leq \omega_{\max}, \\ \omega_{\min}, & \hat{\omega}_i(t) < \omega_{\min}, \end{cases}$$

其中: $\Theta_{\min} \leq \Theta(t) \leq \Theta_{\max}, \omega_{\min} \leq \omega(t) \leq \omega_{\max}, \forall t \in [0, T]$.

性质 1 $(\Theta(t) - \hat{\Theta}_i)^2 \geq (\Theta(t) - \text{proj}(\hat{\Theta}_i))^2$, 其中 i 是迭代次数.

证 若 $(\Theta(t) - \hat{\Theta}_i)^2 \geq (\Theta(t) - \text{proj}(\hat{\Theta}_i))^2$ 成立, 等价证明

$$\begin{aligned} (\Theta(t) - \hat{\Theta}_i)^2 - (\Theta(t) - \text{proj}(\hat{\Theta}_i))^2 = & \\ (\hat{\Theta}_i - \text{proj}(\hat{\Theta}_i))(\hat{\Theta}_i + \text{proj}(\hat{\Theta}_i) - 2\Theta(t)) \geq 0. & \end{aligned}$$

步骤 1 当 $\Theta_{\min} \leq \hat{\Theta}_i \leq \Theta_{\max}, \text{proj}(\hat{\Theta}_i) = \hat{\Theta}_i$, 上述不等式等于零.

步骤 2 当 $\hat{\Theta}_i > \Theta_{\max}, \text{proj}(\hat{\Theta}_i) = \Theta_{\max}$, 可推出 $\hat{\Theta}_i - \text{proj}(\hat{\Theta}_i) > 0, \hat{\Theta}_i + \text{proj}(\hat{\Theta}_i) - 2\Theta(t) > 0$, 结论成立.

步骤 3 当 $\hat{\Theta}_i < \Theta_{\min}, \text{proj}(\hat{\Theta}_i) = \Theta_{\min}$, 可得到 $\hat{\Theta}_i - \text{proj}(\hat{\Theta}_i) < 0, \hat{\Theta}_i + \text{proj}(\hat{\Theta}_i) - 2\Theta(t) < 0$, 结论成立.

性质 2 $\hat{\Theta}_i(0) = \hat{\Theta}_{i-1}(T), \hat{\omega}_i(0) = \hat{\omega}_{i-1}(T), \dot{k}_i(0) = \dot{k}_{i-1}(T)$.

步骤 1 首先考虑 $\hat{\Theta}_i(0) = \hat{\Theta}_{i-1}(T)$. 由式(9)知道 $\hat{\Theta}_{-1}(T) = \hat{\Theta}_0(0)$.

步骤 2 假定, $\forall j \in [0, i-1], \hat{\Theta}_j(0) = \hat{\Theta}_{j-1}(T)$. 由式(9)可得

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_i(0) = & \text{proj}(\hat{\Theta}_{i-1}(0)) + q_1\xi(x_i(0))e_i(0), \\ \hat{\Theta}_{i-1}(T) = & \text{proj}(\hat{\Theta}_{i-2}(T)) + q_1\xi(x_i(T))e_i(T). \end{aligned}$$

然后根据假设3可知道

$$x_i(0) = x_{i-1}(T), x_r(0) = x_r(T), e_i(0) = e_{i-1}(T),$$

得到 $\hat{\Theta}_i(0) = \hat{\Theta}_{i-1}(T)$.

步骤 3 同理, $\hat{\omega}_i(0) = \hat{\omega}_{i-1}(T)$. 再根据式(8)推出 $\dot{k}_i(0) = \dot{k}_{i-1}(T)$.

4 收敛性分析(Convergence analysis)

定理 1 在假设1-4条件下, 由系统(1)、学习控制律(8)、参数学习律(9)-(11)组成的闭环系统具有以下特性: 1) 在区间 $[0, T]$ 上, 当迭代次数趋于无穷大时, 跟踪误差 e_i 在 $L^2_{[0,T]}$ 范数下渐近收敛于零, 即

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T e_i^2(\sigma) d\sigma = 0; 2) \text{ 闭环系统中所有信号在 } L^2_{[0,T]} \text{ 范数下有界.}$$

证 第*i*次迭代时, 构造的Lyapunov-Krasovskii型复合能量函数为

$$E_i(t) = V_i(t) + \frac{\theta}{2q_1} \int_0^t \tilde{\Theta}_i^2(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2q_2} \tilde{\theta}_i^2(t) +$$

$$\frac{\theta}{2q_1} \int_t^T \tilde{\Theta}_{i-1}^2(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2q_3} \int_0^t \tilde{\omega}_i^2(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2q_3} \int_t^T \tilde{\omega}_{i-1}^2(\sigma) d\sigma, \quad (12)$$

其中: 参数 $\tilde{\Theta}_i(t) = \Theta(t) - \hat{\Theta}_i(t)$, $\tilde{\theta}_i(t) = \theta - \hat{\theta}_i(t)$, $\tilde{\omega}_i(t) = \omega(t) - \hat{\omega}_i(t)$.

$\forall t \in [0, T]$, $E_i(t)$ 在第 i 和 $i-1$ 次迭代的差分为

$$\begin{aligned} \Delta E_i(t) = & (V_i(t) - V_{i-1}(t)) + \\ & \frac{\theta}{2q_1} \int_0^t (\tilde{\Theta}_i^2(\sigma) - \tilde{\Theta}_{i-1}^2(\sigma)) d\sigma + \\ & \frac{\theta}{2q_1} \int_t^T (\tilde{\Theta}_{i-1}^2(\sigma) - \tilde{\Theta}_{i-2}^2(\sigma)) d\sigma + \\ & \frac{1}{2q_2} (\tilde{\theta}_i^2(t) - \tilde{\theta}_{i-1}^2(t)) + \\ & \frac{1}{2q_3} \int_0^t (\tilde{\omega}_i^2(\sigma) - \tilde{\omega}_{i-1}^2(\sigma)) d\sigma + \\ & \frac{1}{2q_3} \int_t^T (\tilde{\omega}_{i-1}^2(\sigma) - \tilde{\omega}_{i-2}^2(\sigma)) d\sigma. \quad (13) \end{aligned}$$

根据式(7), 控制器(8)计算式(13)右边第1项:

$$\begin{aligned} V_i(t) - V_{i-1}(t) = & \int_0^t \dot{V}_i(\sigma) d\sigma + V_i(0) - V_{i-1}(t) \leq \\ & \int_0^t \tilde{\Theta}_i \xi(x_i) \theta e_i(\sigma) d\sigma + \int_0^t \hat{\Theta}_i \xi(x_i) \tilde{\theta}_i e_i(\sigma) d\sigma + \\ & \int_0^t (b(\sigma)\nu(k_i) + 1) \dot{k}_i d\sigma - \int_0^t c e_i^2(\sigma) d\sigma + \\ & \int_0^t \tilde{\omega}_i(\sigma) \psi_i e_i(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} (e_i^2(0) - e_{i-1}^2(t)) + \\ & \frac{1}{2(1-\eta)} \int_{-\tau(0)}^0 e_i^2(\sigma) h^2(e_i(\sigma)) d\sigma - \\ & \frac{1}{2(1-\eta)} \int_{t-\tau(t)}^t e_{i-1}^2(\sigma) h^2(e_{i-1}(\sigma)) d\sigma. \quad (14) \end{aligned}$$

利用性质1, 以及关系式 $(a-b)^2 - (a-c)^2 = (b-c)(-2(a-b) - (b-c))$, 参数学习律(9), 计算式(13)右边第2项:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta}{2q_1} \int_0^t (\tilde{\Theta}_i^2(\sigma) - \tilde{\Theta}_{i-1}^2(\sigma)) d\sigma \leq \\ & \frac{\theta}{2q_1} \int_0^t ((\Theta - \hat{\Theta}_i)^2 - (\Theta - \text{proj}(\hat{\Theta}_{i-1}))^2) d\sigma \leq \\ & - \int_0^t \tilde{\Theta}_i(\sigma) \xi(x_i) \theta e_i(\sigma) d\sigma. \quad (15) \end{aligned}$$

利用参数学习律(10), 计算式(13)右边第4项:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2q_2} (\tilde{\theta}_i^2(t) - \tilde{\theta}_{i-1}^2(t)) = \\ & \frac{1}{q_2} \int_0^t \tilde{\theta}_i(\sigma) \dot{\tilde{\theta}}_i(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2q_2} (\tilde{\theta}_i^2(0) - \tilde{\theta}_{i-1}^2(t)) = \\ & - \int_0^t \hat{\Theta}_i \xi(x_i) \tilde{\theta}_i(\sigma) e_i(\sigma) d\sigma + \\ & \frac{1}{2q_2} (\tilde{\theta}_i^2(0) - \tilde{\theta}_{i-1}^2(t)). \quad (16) \end{aligned}$$

利用性质1, 以及关系式 $(a-b)^2 - (a-c)^2 = (b-c)(-2(a-b) - (b-c))$, 参数学习律(11), 计算式(13)右边第5项:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2q_3} \int_0^t (\tilde{\omega}_i^2(\sigma) - \tilde{\omega}_{i-1}^2(\sigma)) d\sigma \leq \\ & \frac{1}{2q_3} \int_0^t ((\omega - \hat{\omega}_i)^2 - (\omega - \text{proj}(\hat{\omega}_{i-1}))^2) d\sigma \leq \\ & - \int_0^t \tilde{\omega}_i(\sigma) \psi_i e_i(\sigma) d\sigma. \quad (17) \end{aligned}$$

把式(14)-(17)分别代入式(13):

$$\begin{aligned} \Delta E_i(t) \leq & \int_0^t (b(\sigma)\nu(k_i) + 1) \dot{k}_i d\sigma - \\ & \int_0^t c e_i^2(\sigma) d\sigma + \frac{\theta}{2q_1} \int_t^T (\tilde{\Theta}_{i-1}^2 - \tilde{\Theta}_{i-2}^2) d\sigma + \\ & \frac{1}{2q_3} \int_t^T (\tilde{\omega}_{i-1}^2 - \tilde{\omega}_{i-2}^2) d\sigma + \\ & \frac{1}{2q_2} (\tilde{\theta}_i^2(0) - \tilde{\theta}_{i-1}^2(t)) + \frac{1}{2} (e_i^2(0) - e_{i-1}^2(t)) + \\ & \frac{1}{2(1-\eta)} \int_{-\tau(0)}^0 e_i^2(\sigma) h^2(e_i(\sigma)) d\sigma - \\ & \frac{1}{2(1-\eta)} \int_{-\tau(t)}^0 e_{i-1}^2(t+\sigma) h^2(e_{i-1}(t+\sigma)) d\sigma. \quad (18) \end{aligned}$$

令 $t = T$, 由 $\hat{\theta}_i(0) = \hat{\theta}_{i-1}(T)$, 知 $\tilde{\theta}_i(0) = \tilde{\theta}_{i-1}(T)$; 根据假设3知道 $e_i(t) = e_{i-1}(T+t)$, $\forall t \in [-\tau_{\max}, 0]$; 再由假设4知 $\tau(0) = \tau(T)$; 因此可以得到

$$\Delta E_i(T) \leq \int_0^T (b(\sigma)\nu(k_i) + 1) \dot{k}_i d\sigma - \int_0^T c e_i^2(\sigma) d\sigma. \quad (19)$$

重复利用式(19)可以得到

$$\begin{aligned} E_i(T) \leq & E_0(T) - \sum_{j=1}^i \int_0^T c e_j^2(\sigma) d\sigma + \\ & \sum_{j=1}^i \int_0^T (b(\sigma)\nu(k_j) + 1) \dot{k}_j d\sigma, \quad (20) \end{aligned}$$

$\forall t \in [0, T]$, 定义函数 $k(t + (i-1)T) = k_i(t)$, $\dot{k}(t + (i-1)T) = \dot{k}_i(t)$. 由学习律(8)以及性质2知, $k(t)$ 和 $\dot{k}(t)$, $\forall t \in [0, iT]$ 分别是连续函数; 进而得到

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^i \int_0^T (b(\sigma)\nu(k_j) + 1) \dot{k}_j d\sigma = \\ & \int_0^T (b(\sigma)\nu(k) + 1) \dot{k} d\sigma + \int_T^{2T} (b(\sigma)\nu(k) + 1) \dot{k} d\sigma + \\ & \cdots + \int_{(i-1)T}^{iT} (b(\sigma)\nu(k) + 1) \dot{k} d\sigma = \\ & \int_0^{iT} (b(\sigma)\nu(k) + 1) \dot{k} d\sigma. \quad (21) \end{aligned}$$

可以进一步得到 $E_i(t)$ 的导数为

$$\dot{E}_i(t) = \dot{V}_i(t) + \frac{\theta}{2q_1} (\tilde{\Theta}_i^2(t) - \tilde{\Theta}_{i-1}^2(t)) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{q_2} \tilde{\theta}_i(t) \dot{\tilde{\theta}}_i(t) + \frac{1}{2q_3} (\tilde{\omega}_i^2(t) - \tilde{\omega}_{i-1}^2(t)) \leq \\
 & (b(t)\nu(k_i) + 1) \dot{k}_i. \tag{22}
 \end{aligned}$$

定义函数 $W(t + (i - 1)T) = E_i(t), \forall t \in [0, T]$. 根据式(20)–(22)可以得到

$$\begin{aligned}
 W(iT + t) \leq E_0(T) - \sum_{j=1}^i \int_0^T ce_j^2(\sigma) d\sigma + \\
 \int_0^{iT+t} (b(\sigma)\nu(k) + 1) \dot{k} d\sigma. \tag{23}
 \end{aligned}$$

当 $i \rightarrow \infty$, 可以得到

$$\begin{aligned}
 \lim_{i \rightarrow \infty} W(iT + t) \leq \\
 E_0(T) - \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^i \int_0^T ce_j^2(\sigma) d\sigma + \\
 \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^{iT+t} (b(\sigma)\nu(k) + 1) \dot{k} d\sigma. \tag{24}
 \end{aligned}$$

下面证明 $E_0(T)$ 的有界性. $\forall t \in [0, T]$,

$$\dot{E}_0(t) \leq (b(t)\nu(k_0) + 1) \dot{k}_0. \tag{25}$$

对式(25)两端从 0 到 T 积分

$$E_0(T) \leq E_0(0) + \int_0^T (b(\sigma)\nu(k_0) + 1) \dot{k}_0 d\sigma. \tag{26}$$

$\forall t \in [0, T]$, 由式(9)–(11), 知道 $\hat{\Theta}_{-1}(t) = 0, \hat{\theta}_{-1}(t) = 0, \hat{\omega}_{-1}(t) = 0$, 并且 $\hat{\theta}_i(0) = \hat{\theta}_{i-1}(T), \hat{\omega}_i(0) = \hat{\omega}_{i-1}(T)$, 那么对 $E_0(0)$ 计算

$$\begin{aligned}
 E_0(0) = V_0(0) + \frac{\theta}{2q_1} \int_0^T \tilde{\Theta}_{-1}^2(\sigma) d\sigma + \\
 \frac{1}{2q_2} \tilde{\theta}_0^2(0) + \frac{1}{2q_3} \int_0^T \tilde{\omega}_{-1}^2(\sigma) d\sigma = \\
 \frac{1}{2(1-\eta)} \int_{-\tau(0)}^0 e_0^2(\sigma) h^2(e_0(\sigma)) d\sigma + \\
 \frac{1}{2} e_0^2(0) + \frac{\theta}{2q_1} \int_0^T \Theta^2(\sigma) d\sigma + \\
 \frac{1}{2q_2} \theta^2 + \frac{1}{2q_3} \int_0^T \omega^2(\sigma) d\sigma. \tag{27}
 \end{aligned}$$

因为 $\vartheta(t), \lambda(\cdot), f(\cdot, \cdot)$ 在区间 $[0, T]$ 上连续, θ 是未知常参数, 所以 $\Theta(t), \omega(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上连续并且有界, 因此存在有限正常数 M 使得

$$\begin{aligned}
 M \geq \frac{1}{2} e_0^2(0) + \frac{1}{2(1-\eta)} \int_{-\tau(0)}^0 e_0^2(\sigma) h^2(e_0(\sigma)) d\sigma + \\
 \frac{\theta}{2q_1} \int_0^T \Theta^2(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2q_2} \theta^2 + \\
 \frac{1}{2q_3} \int_0^T \omega^2(\sigma) d\sigma. \tag{28}
 \end{aligned}$$

将式(28)代入式(27)得

$$E_0(0) \leq M < \infty. \tag{29}$$

由式(29)知 $E_0(0)$ 有界; $E_0(T) > 0$, 由式(26)及引理 1 可知 $\int_0^T (b(\sigma)\nu(k_0) + 1) \dot{k}_0 d\sigma$ 有界, 所以 $E_0(T)$ 有

界; 因为 $E_0(T)$ 有界, $W(iT + t) > 0$, 由式(23), 引理 1 知 $W(iT + t), \int_0^{iT+t} (b(\sigma)\nu(k(\sigma)) + 1) \dot{k}(\sigma) d\sigma$ 有界; 进而根据式(24)得出 $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T e_i^2(\sigma) d\sigma \rightarrow 0$, 即跟踪误差在 $L^2_{[0,T]}$ 范数下渐近收敛于零.

因为 $W(iT + t)$ 有界, 等价于 $E_i(t)$ 有界, 可以推出 $\tilde{\Theta}_i(t), \tilde{\theta}_i(t), \tilde{\omega}_i(t), e_i(t)$ 在 $L^2_{[0,T]}$ 范数意义下有界; 然后再根据 $\tilde{\Theta}_i(t) = \Theta(t) - \hat{\Theta}_i(t), \tilde{\theta}_i(t) = \theta - \hat{\theta}_i(t), \tilde{\omega}_i(t) = \omega(t) - \hat{\omega}_i(t), e_i(t) = x_i - x_i^r$, 进一步得到 $\hat{\Theta}_i(t), \hat{\theta}_i(t), \hat{\omega}_i(t), x_i$ 有界; 将 $\hat{\Theta}_i(t), \hat{\theta}_i(t), \hat{\omega}_i(t), x_i$ 代入控制器 $u_i(t)$, 又可以得到控制器 $u_i(t)$ 在 $L^2_{[0,T]}$ 范数意义下有界; 最终闭环系统中所有信号在 $L^2_{[0,T]}$ 意义下有界. 证毕.

5 仿真(Simulation)

考虑如下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = e^{-\vartheta(t)x^2(t-\tau(t))} \xi(x)\theta + b(t)u(t), \\ \varpi(t) = 0.5, \quad \forall t \in [-\tau_{\max}, 0], \end{cases} \tag{30}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 t \in [0, 2\pi], \quad \tau(t) = 1 - 0.5\sin^2 t, \quad \tau_{\max} = 1, \\
 \dot{\tau}(t) \leq 0.5; \quad \vartheta(t) = |\sin t \cos(2t)|, \\
 \xi(x) = x^2, \quad \theta = 2;
 \end{aligned}$$

参考轨线 $x_r(t) = \sin t$, 初始状态为 $o(t) = 0, \forall t \in [-\tau_{\max}, 0]$; $f(x(t - \tau(t)), \vartheta(t))$ 满足假设 2, 即

$$\begin{aligned}
 |e^{-\vartheta(t)x^2(t-\tau(t))} - e^{-\vartheta(t)x_r^2(t-\tau(t))}| \leq \\
 |x(t - \tau(t)) - x_r(t - \tau(t))| \sqrt{2|\vartheta(t)|} e^{-0.5}.
 \end{aligned}$$

情况 1 当 $b(t) > 0$ 时, 取 $b(t) = 2 + 0.5 \sin t$.

情况 2 当 $b(t) < 0$ 时, 取 $b(t) = -(2 + 0.5 \sin t)$.

在上述两种情况下, 仿真当中, 选择的参数分别为 $\eta = 0.5, c = 1, q_1 = 40, q_2 = 5, q_3 = 200$. 仿真结果如下图所示: 图 1–6 为 $b > 0$ 情况下的仿真结果; 图 7–12 为 $b < 0$ 情况下的仿真结果. 通过仿真效果图可以看到, 不管是 b 大于零, 还是 b 小于零, 系统跟踪误差绝对值的最大值都随着迭代次数的增加渐近收敛于零, 同时闭环系统中所有信号有界.

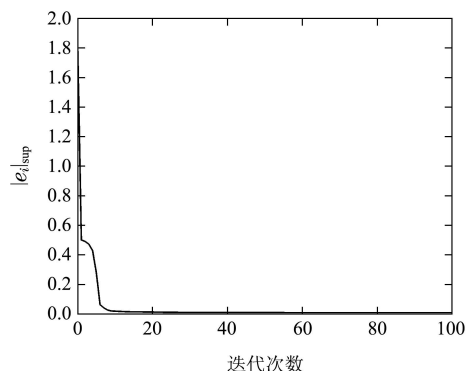


图 1 最大跟踪误差 $|e_i|_{\sup}$ 的曲线, $b(t) > 0$
 Fig. 1 Maximum tracking error curves when $b(t) > 0$

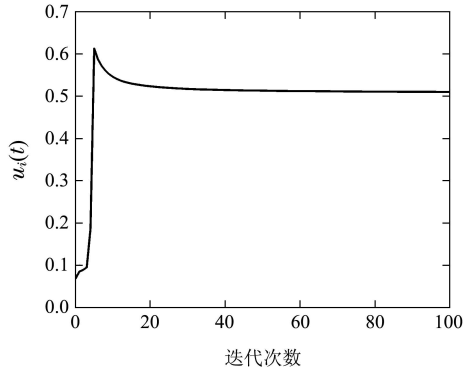


图2 控制器 $u_i(t)$ 的曲线, $b(t) > 0$

Fig. 2 Plots of the controller when $b(t) > 0$

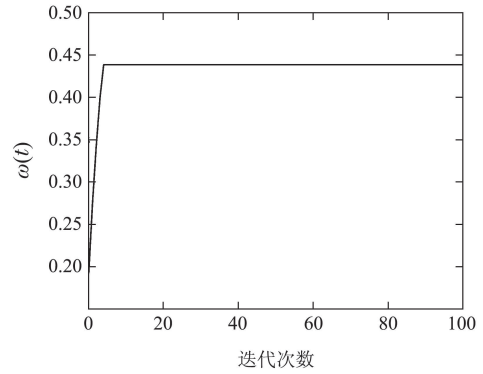


图6 参数 $\omega(t)$ 的估计曲线, $b(t) > 0$

Fig. 6 Estimation of parameter $\omega(t)$ when $b(t) > 0$

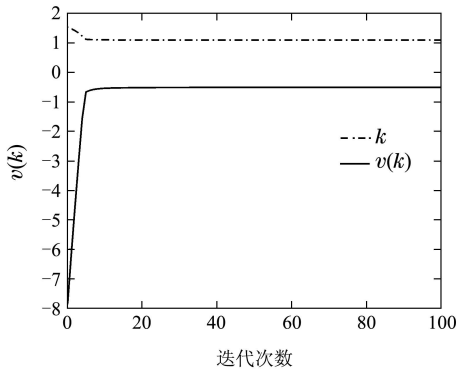


图3 Nussbaum函数的曲线, $b(t) > 0$

Fig. 3 Nussbaum function when $b(t) > 0$

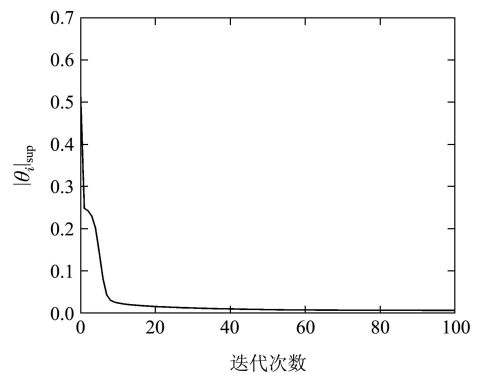


图7 最大跟踪误差 $|e_i|_{sup}$ 的曲线, $b(t) < 0$

Fig. 7 Maximum tracking error curves when $b(t) < 0$

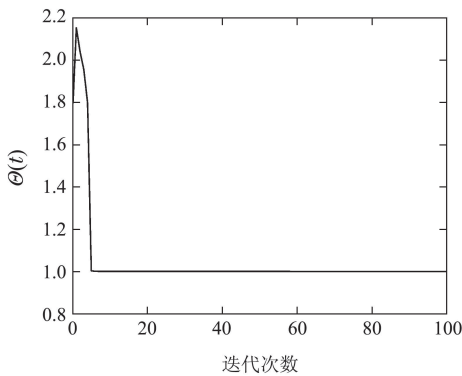


图4 参数 $\theta(t)$ 的估计曲线, $b(t) > 0$

Fig. 4 Estimation of $\theta(t)$ when $b(t) > 0$

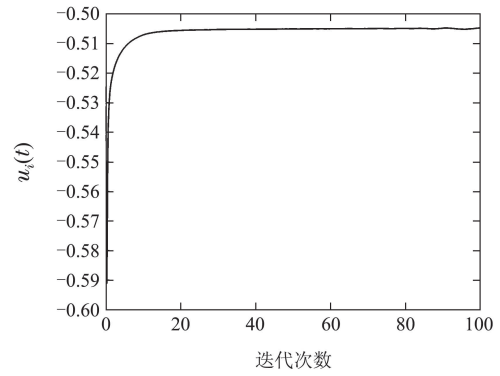


图8 控制器 $u_i(t)$ 的曲线, $b(t) < 0$

Fig. 8 Plots of the controller when $b(t) < 0$

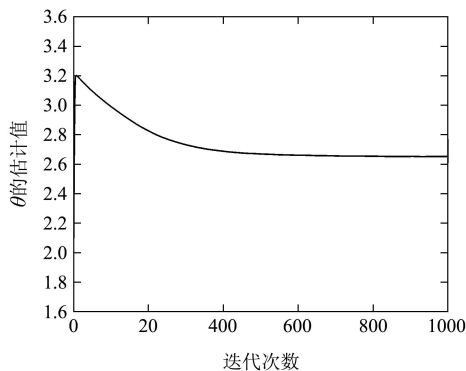


图5 参数 θ 的估计曲线, $b(t) > 0$

Fig. 5 Estimation of parameter θ when $b(t) > 0$

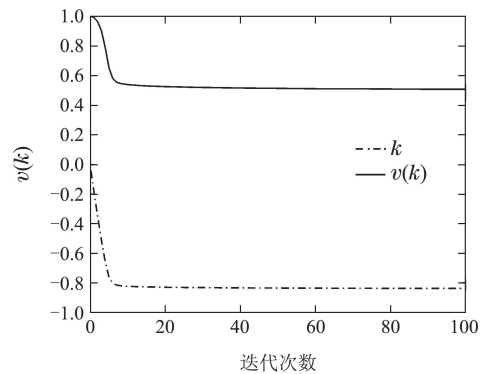
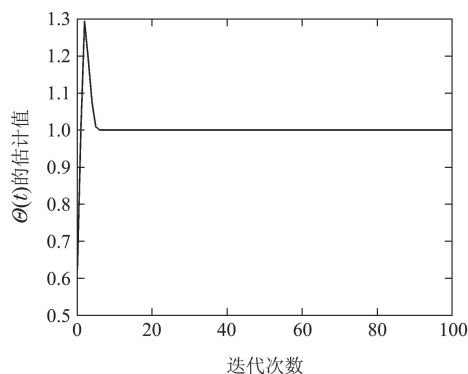
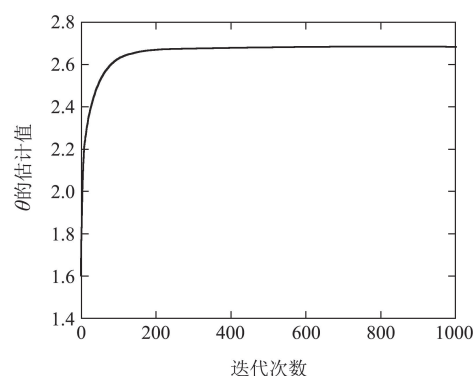
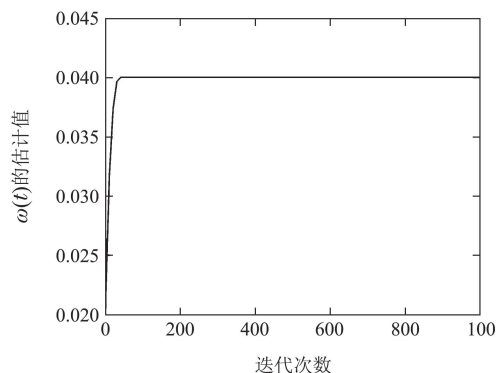


图9 Nussbaum函数的曲线, $b(t) < 0$

Fig. 9 Nussbaum function when $b(t) < 0$

图 10 参数 $\theta(t)$ 的估计曲线, $b(t) < 0$ Fig. 10 Estimation of $\theta(t)$ when $b(t) < 0$ 图 11 参数 θ 的估计曲线, $b(t) < 0$ Fig. 11 Estimation of parameter θ when $b(t) < 0$ 图 12 参数 $\omega(t)$ 的估计曲线, $b(t) < 0$ Fig. 12 Estimation of parameter $\omega(t)$ when $b(t) < 0$

6 结论(Conclusions)

针对一类含有未知控制方向及时滞的非线性参数化系统, 分别采用Nussbaum增益方法, 不等式技巧, 参数分离技术及信号置换思想解决了系统中出现的未知控制方向, 非线性参数化以及未知时变时滞等问题. 然后利用自适应迭代学习控制方法设计了控制器, 并引入微分和差分学习律对未知参数进行估计, 使系统跟踪误差沿着迭代轴的方向渐近收敛于零, 同时保证闭环系统内所有信号有界. 仿真结果表明了该方法的可行性.

参考文献(References):

- [1] CHEN Weisheng, WANG Yuanliang, LI Junming. Adaptive learning control for nonlinearly parameterized systems with periodically time-varying delay [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34 (10): 1556 – 1560.
(陈为胜, 王元亮, 李俊民. 周期时变时滞非线性参数化系统的自适应学习控制 [J]. *自动化学报*, 2008, 34(10): 1556 – 1560.)
- [2] LI Junmin, WANG Yuanliang, LI Xinmin. Adaptive iterative learning control for nonlinear parameterized systems with unknown time-varying delay [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(6): 861 – 868.
(李俊民, 王元亮, 李新民. 未知时变时滞非线性参数化系统自适应迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(6): 861 – 868.)
- [3] XIAN Xuehui, TAO Hongfeng, YANG Huizhong. Cyclical adaptive iterative learning tracking control for a class of nonlinear time-delay systems [J]. *Control Engineering of China*, 2013, 20(1): 22 – 25.
(戴学会, 陶洪峰, 杨慧中. 非线性时滞系统的周期自适应学习跟踪控制 [J]. *控制工程*, 2013, 20(1): 22 – 25.)
- [4] SUN Mingxuan, YAN Qiuzhen. Error tracking of iterative learning control systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 251 – 261.
(孙明轩, 严求真. 迭代学习控制系统的误差跟踪设计方法 [J]. *自动化学报*, 2013, 39(3): 251 – 261.)
- [5] LI Pengzhi, YAN Feng, GE Chuan, et al. Open-closed loop iterative learning control of piezoelectric actuators [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2014, 22(2): 414 – 419.
(李鹏志, 闫丰, 葛川, 等. 压电驱动器的开闭环迭代学习控制 [J]. *光学精密工程*, 2014, 22(2): 414 – 419.)
- [6] JIN X, XU J X. Iterative learning control for output-constrained systems with both parametric and nonparametric uncertainties [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2508 – 2516.
- [7] NUSSBAUM R D. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control [J]. *Systems & Control Letters*, 1983, 3(11): 243 – 246.
- [8] XU J X, YAN R. Iterative learning control design without a priori knowledge of the control direction [J]. *Automatica*, 2004, 40(10): 1803 – 1809.
- [9] LI Jing, HU Yunan, GENG Baoliang. Adaptive iterative learning control for second-order time-varying nonlinear system with unknown control directions [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(6): 730 – 740.
(李静, 胡云安, 耿宝亮. 控制方向未知的二阶时变非线性系统自适应迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(6): 730 – 740.)
- [10] JIN Kui, SUN Mingxuan. Adaptive repetitive control for a class of nonlinear systems with unknown control [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(9): 1176 – 1180.
(金奎, 孙明轩. 控制方向未知非线性系统的自适应重复控制 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(9): 1176 – 1180.)
- [11] LI D, LI J M. Adaptive iterative learning control for nonlinearly parameterized systems with unknown time-varying delay and unknown control direction [J]. *International Journal of Automation and Computing*, 2012, 9(6): 578 – 586.
- [12] YU M, YE X D, QI D L. Robust adaptive repetitive learning control for a class of time varying nonlinear systems with unknown control direction [J]. *Journal of Control Theory & Applications*, 2013, 11(3): 336 – 342.

附录 引理证明(Appendix Proof of Lemma)

引理1证明 为了方便, 定义变量

$$b_{\max} = \max\{|b_-|, |b_+|\}, b_{\min} = \min\{|b_-|, |b_+|\},$$

$$V_b(k_i, k_j) = \int_{k_i}^{k_j} (b(\sigma)\nu(k(\sigma)) + 1)dk(\sigma) = \int_{t_i}^{t_j} (b(\sigma)\nu(k(\sigma)) + 1)\dot{k}(\sigma)d\sigma, \quad (a1)$$

其中: $k_i \leq k_j, \sigma \in [t_i, t_j]$.

利用积分不等式 $(b-a)l_1 \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)l_2$, 其中: $l_1 = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), l_2 = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, 可以到

$$\begin{aligned} |V_b(k_0, k_1)| &\leq \\ (k_1 - k_0) \sup_{\sigma \in [t_0, t_1], k \in [k_0, k_1]} &|b(\sigma)\nu(k) + 1| \leq \\ (k_1 - k_0)(b_{\max} \sup_{k \in [k_0, k_1]} &|\nu(k)| + 1). \end{aligned} \quad (\text{a2})$$

知道 Nussbaum 函数 $\nu(k) = \exp(k^2) \cos(\frac{\pi}{2}k)$ 在区间 $(4m-1, 4m+1)$ 上大于零, 在区间 $(4m+1, 4m+3)$ 小于零, $n \in N$. 因此引理1 中的不等式可表示为

$$0 \leq V(t) \leq c_0 + V_b(k(0), k(t)), \forall t \in [0, t_f]. \quad (\text{a3})$$

假设 $k(t)$ 是无界的, 那么需要考虑两种情况: 1) $k(t)$ 没有上界; 2) $k(t)$ 没有下界. 本文的目标就变成了对于以上两种情况, 分别找到相对于假设的矛盾.

第1种情况: $k(t)$ 在区间 $[0, t_f]$ 上没有上界. 在第1种情况下, 一定存在两个单调递增的序列 t_n 和 k_n , 因此

$$\begin{aligned} k_0 &= \max\{k(0), -k(0)\}, k(t_n) = k_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} t_n &= t_f, \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty. \end{aligned}$$

首先, 考虑当 $b(t) < 0$ 的情况. 假设 $4m-1 > k_0$, 令 $[k_0, k_{m1}] = [k_0, 4m-1]$, 有

$$\begin{aligned} |V_b(k_0, k_{m1})| &\leq (k_{m1} - k_0)(b_{\max} e^{(4m-1)^2} + 1) = \\ l_{m1} b_{\max} e^{(4m-1)^2} &+ l_{m1}, \end{aligned} \quad (\text{a4})$$

其中 $l_{m1} = 4m-1-k_0$.

因为 $\nu(k) > 0, \forall k \in (k_{m1}, k_{m2}) = (4m-1, 4m+1)$, 从而可以得到

$$\begin{aligned} V_b(k_{m1}, k_{m2}) &\leq \int_{4m-c_{m1}}^{4m+c_{m1}} b(\sigma)\nu(k(\sigma))dk(\sigma) + \\ \int_{4m-1}^{4m+1} &dk(\sigma), \end{aligned} \quad (\text{a5})$$

其中 $c_{m1} \in (0, 1)$. 可以看出 $b(t) \leq -b_{\min}$, 因此有

$$\begin{aligned} V_b(k_{m1}, k_{m2}) &\leq \\ 2c_{m1}(-b_{\min} \inf_{k \in (k_{m1}, k_{m2})} &\nu(k)) + 2 = \\ -d_{m1}e^{(4m-c_{m1})^2} &+ 2, \end{aligned} \quad (\text{a6})$$

其中 $d_{m1} = 2c_{m1}b_{\min} \cos(\frac{\pi c_{m1}}{2}) > 0$. 因此根据以上内容, 可以得到

$$\begin{aligned} V_b(k_0, k_{m2}) &= V_b(k_0, k_{m1}) + V_b(k_{m1}, k_{m2}) \leq \\ e^{(4m-1)^2} l_{m1} b_{\max} - d_{m1} e^{(4m-c_{m1})^2} &+ l_{m1} + 2 \leq \\ e^{(4m-1)^2} (l_{m1} b_{\max} - d_{m1} e^{((1-c_{m1})^2 + 2(4m-1)(1-c_{m1}))}) &+ \\ l_{m1} + 2. \end{aligned} \quad (\text{a7})$$

因为 $1 - c_{m1} > 0$, e^m 的增长速度比 m 快, 而 l_{m1} 线性化于 m , 因此当 $m \rightarrow \infty$ 时, $V_b(k_0, k_{m2}) \rightarrow -\infty$.

然后, 考虑 $b(t) > 0$ 的情况. 于以上相似的假设, 在区间 $[k_0, k_{m2}] = [k_0, 4m+1]$, 有

$$\begin{aligned} |V_b(k_0, k_{m2})| &\leq (k_{m2} - k_0)(b_{\max} \sup_{k \in (k_0, k_{m2})} \nu(k) + 1) = \\ l_{m2} b_{\max} e^{(4m+1)^2} &+ l_{m2}, \end{aligned} \quad (\text{a8})$$

其中 $l_{m2} = 4m+1-k_0$.

$\forall k \in (k_{m2}, k_{m3}) = (4m+1, 4m+3), \nu(k) < 0$, 可得

$$\begin{aligned} V_b(k_{m2}, k_{m3}) &\leq \int_{4m+2-c_{m1}}^{4m+2+c_{m1}} b(\sigma)\nu(k(\sigma))dk(\sigma) + \\ \int_{4m+1}^{4m+3} &dk(\sigma). \end{aligned} \quad (\text{a9})$$

$b(t) > b_{\min}$, 有

$$\begin{aligned} V_b(k_{m2}, k_{m3}) &\leq 2c_{m1}(b_{\min} \sup_{k \in (k_{m2}, k_{m3})} \nu(k)) + 2 = \\ -d_{m2}e^{(4m+2-c_{m1})^2} &+ 2, \end{aligned} \quad (\text{a10})$$

其中 $d_{m2} = d_{m1} > 0$, 因此可以得到

$$\begin{aligned} V_b(k_0, k_3) &= V_b(k_0, k_2) + V_b(k_{m2}, k_{m3}) \leq \\ e^{(4m+1)^2} (l_{m2} b_{\max} - d_{m2} e^{((1-c_{m1})^2 + 2(4m+1)(1-c_{m1}))}) &+ \\ l_{m2} + 2. \end{aligned} \quad (\text{a11})$$

当 $m \rightarrow \infty, V_b(k_0, k_{m3}) \rightarrow -\infty$. 综上所述, 不论 $b(t) > 0$, 还是 $b(t) < 0$, 相对于式(a3), 都可以找到两个序列导出矛盾. 所以, $k(t)$ 是有上界的.

第2种情况: $k(t)$ 在区间 $[0, t_f]$ 上没有下界.

令 $\omega = -k$, 可以得到 $\omega(t)$ 没有上界. 由于 $\nu(\cdot)$ 是一个光滑函数, 有

$$\begin{aligned} 0 \leq V(t) &\leq c_0 - \int_0^t (b(\sigma)\nu(\omega)\dot{\omega}(\sigma) + 1)d\sigma = \\ c_0 - V_b(\omega(0), \omega(t)). \end{aligned} \quad (\text{a12})$$

因此, 一定存在两个单调递增序列 t_n 和 $\omega_n, \omega_0 = \max\{\omega(0), -\omega(0)\}, \omega_n = \omega(t_n)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_f, \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$. 根据第1种情况的证明过程, 总是可以找到两个矛盾的序列, 因此 $\omega(t)$ 在区间 $[0, t_f]$ 上有上界. 因为 $\omega = -k$, 可以推出 $k(t)$ 在区间 $[0, t_f]$ 上有下界.

因此, $k(t), V(t)$ 和 $\int_0^t b(\sigma)\nu(k)\dot{k}(\sigma)d\sigma$ 在 $[0, t_f]$ 上有界.

证毕.

作者简介:

李广印 (1989-), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为自适应控制与学习控制, E-mail: liguangyinxnld@163.com;

杨扬 (1980-), 男, 博士研究生, 目前研究方向为模式识别、计算机视觉、医学图像处理、GIS信息系统、自动化控制等, E-mail: yyang_yun@163.com.