

# 非线性过程自优化控制的快速算法

叶凌箭<sup>†</sup>

(浙江大学 宁波理工学院, 浙江 宁波 315100; 浙江大学 控制科学与工程学系, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 针对非线性过程的自优化控制问题, 提出了一种求取被控变量的快速算法. 不同于线性过程的自优化控制, 本文方法基于系统的非线性模型, 并且最小化全局平均损失. 为快速求解得到的非凸非线性规划问题, 作者对其进行了简化. 讨论了被控变量解空间的相关特性, 阐述了引入的正交酉约束的合理性, 并进一步提出了求解次优被控变量的解析法. 对一个数值算例和蒸发过程的研究结果表明, 提出的快速算法是便捷的、有效的.

**关键词:** 化工过程; 自优化控制; 被控变量; 非线性过程

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## A fast algorithm for self-optimizing control of nonlinear plants

YE Ling-jian<sup>†</sup>

(Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo Zhejiang 315100, China;  
Department of Control Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

**Abstract:** We investigate the self-optimizing control (SOC) problem for nonlinear processes and propose a fast algorithm for solving controlled variables (CVs). Being different from those linear SOC methods, the proposed one minimizes the global average loss based on the rigorous nonlinear model. To quickly solve the derived non-convex linear programming (LP) problem, simplifications are introduced to the problem. Properties of the CV solution space are discussed to illustrate the rationality of introducing the orthogonal unitary constraint. On this basis, the analytical solution of suboptimal CVs is obtained in a further step. The developed methodology is applied to a numerical example and an evaporator process, where the simplicity and effectiveness of the proposed algorithm are demonstrated.

**Key words:** chemical process; self-optimizing control; controlled variables; nonlinear process

### 1 引言(Introduction)

自优化控制(self-optimizing control, SOC)由挪威科技大学Skogestad教授于2000年提出<sup>[1]</sup>, 指的是一种以选择/设计被控变量实现实时优化(real-time optimization, RTO)的控制策略. 该控制策略的特征是扰动产生时, 系统只需在反馈控制器作用下跟踪被控变量的固定设定值, 就能自动运行于最优点附近. Skogestad总结了4条选择被控变量的原则<sup>[1]</sup>: 1) 不同扰动工况下, 被控变量的最优值变化不敏感; 2) 容易测量和控制; 3) 相对于操作变量的增益要大; 4) 各被控变量之间相关性要小.

Halvorsen和Skogestad等<sup>[2]</sup>建立了上述原则的数学描述, 提出了局部精确法(local exact method)建立经济指标和被控变量之间的量化关系. 近年来的工作

主要集中于寻找测量变量的线性组合为被控变量. 相比单独的测量变量, 它们的线性组合提供了更多过程信息, 因此能取得更好的优化效果. Kariwala等<sup>[3-4]</sup>在文献[2]的基础上, 通过奇异值分解和特征值分解分别最小化局部最大和平均损失, 提供了线性组合矩阵的求解算法. 同时, Alstad和Skogestad开发了零空间法<sup>[5]</sup>, 减少了由扰动因素引起的经济损失, 随后Alstad等<sup>[6]</sup>推广了零空间法, 在原来的基础上利用多余的测量变量降低了由执行偏差造成的经济损失. 上述SOC方法在推导过程中, 均使用了标称工作点的线性化模型求解最优被控变量. 现在, 线性过程的SOC理论已较为完备, 前述方法均给出了测量变量的最优组合矩阵的显式表达式. 但是, 使用线性化模型的缺点是方法应用于非线性过程时, 被控变量只在标称点附近有

收稿日期: 2015-03-10; 录用日期: 2015-06-03.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: ljye@iipc.zju.edu.cn; Tel.: +86 574-88130028.

本文责任编辑: 李少远.

国家自然科学基金项目(61304081), 浙江省自然科学基金项目(LQ13F030007), 中国博士后科学基金项目(2013M541778), 宁波市创新团队基金项目(2012B82002, 2013B82005)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61304081), Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (LQ13F030007), Postdoctoral Science Foundation of China (2013M541778) and Ningbo Innovation Team (2012B82002, 2013B82005).

良好的自优化效果。

针对非线性过程, 相关学者也进行了一些研究. 文献[7-8]在整个操作空间内使用可测变量近似最优性条件, 将回归模型作为被控变量, 自优化性能具有一定全局性. 但回归的样本数据在开环状态下获取, 不能在闭环状态下保证自优化性能<sup>[9]</sup>. 文献[10]设计了一种双层递阶控制结构, 底层实施SOC, 上层跟踪最优性条件消除偏差. 总的来说, 针对非线性过程的SOC方法研究仍是一个开放的问题. 本文在线性SOC方法的基础上, 对非线性过程开展了针对性的研究. 主要思路是在求解过程中使用非线性模型替代之前的线性化模型, 并提出了一种快速算法使被控变量具有全局有效性.

后文安排如下: 第2节对线性过程的SOC问题进行回顾. 第3节研究了非线性过程的SOC问题, 归结为一个非线性规划(nonlinear programming, NLP)问题. 第4节对该NLP问题进行了简化, 提出了一个求取次优解的快速算法. 第5节使用该快速算法对一个数值算例和蒸发过程进行了研究. 第6节总结全文.

## 2 线性过程的自优化控制(Self-optimizing control for linear system)

### 2.1 问题描述(Problem formulation)

考虑如下系统的操作最优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}, \mathbf{d}), \\ \text{s.t. } \mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{d}) \leq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $J$ 为需要最小化的性能指标,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ 和 $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}$ 分别是操纵变量和扰动变量,  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n_g}$ 是约束条件. 线性过程的输入输出模型表示为

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{G}_y \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}_{yd} \Delta \mathbf{d}, \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{G}_y$ 和 $\mathbf{G}_{yd}$ 分别是 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{d}$ 到测量变量 $\mathbf{y}$ 的增益矩阵,  $\Delta$ 表示变量偏离标称点的程度.

自优化控制的任务是寻找最优组合矩阵 $\mathbf{H}$ , 以 $\mathbf{c} = \mathbf{H}^T \mathbf{y}$  ( $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_c}$ ,  $n_c = n_u$ )为被控变量时, 系统能够在控制器跟踪 $\mathbf{c}$ 设定值 $\mathbf{c}_s$ 的同时, 自动接近最优工作点运行.

### 2.2 线性过程的自优化控制(Self-optimizing control for linear system)

定义如下损失函数:

$$L = J(\mathbf{u}, \mathbf{d}) - J^{\text{opt}}(\mathbf{d}), \quad (3)$$

其中上标opt表示真实的最优状态. 将上式中的 $J$ 在最优状态处泰勒展开至2阶(相对于 $\mathbf{u}$ ), 可得

$$L = 0.5 \mathbf{e}_u^T \mathbf{J}_{uu} \mathbf{e}_u, \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{e}_u = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{opt}}$ 定义为操纵变量偏离最优点的

程度,  $\mathbf{J}_{uu}$ 为 $J$ 相对于 $\mathbf{u}$ 的Hessian矩阵. 可推导得到<sup>[2]</sup>

$$\mathbf{e}_u = (\mathbf{J}_{uu}^{-1} \mathbf{J}_{ud} - (\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{G}_{yd}) \Delta \mathbf{d}. \quad (5)$$

另外一种表示损失函数的方法是将 $J$ 相对于 $\mathbf{c}$ 泰勒展开, 可以得到

$$L = 0.5 \mathbf{e}_c^T \mathbf{J}_{cc} \mathbf{e}_c, \quad (6)$$

其中:  $\mathbf{e}_c = \mathbf{c} - \mathbf{c}^{\text{opt}}$ 为被控变量偏离最优点的程度,  $\mathbf{J}_{cc}$ 为 $J$ 相对于 $\mathbf{c}$ 的Hessian矩阵, 可通过如下公式计算:

$$\mathbf{J}_{cc} = (\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y)^{-T} \mathbf{J}_{uu} (\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y)^{-1}. \quad (7)$$

**注1** 对于线性过程来说, 式(4)和(6)是等价的, 因为 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{u}$ 之间具有简单的线性关系( $\mathbf{c} = \mathbf{H}^T \mathbf{y} = \mathbf{H}^T \mathbf{G}_y \mathbf{u}$ ). 现有文献中一般采用式(4)的形式. 从后文的讨论中可以看到, 非线性过程中 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{u}$ 之间不是线性的, 此时选择正确的公式计算 $L$ 对处理非线性过程具有重要影响.

最终, 损失函数可计算为

$$L = 0.5 \|\mathbf{z}\|_2^2, \quad (8)$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{J}_{uu}^{-1/2} \mathbf{J}_{ud} - \mathbf{J}_{uu}^{1/2} (\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{G}_{yd}) \Delta \mathbf{d}. \quad (9)$$

以上述关系式为基础的自优化控制方法称为局部精确法<sup>[2]</sup>. 基于此, 文献[3-6]等均进行了进一步研究, 分别以扰动域内的最大损失、平均损失为优化目标, 推导并给出了最优组合矩阵 $\mathbf{H}$ 的解析解, 这里不再继续展开.

## 3 非线性过程的自优化控制(Self-optimizing control for nonlinear system)

真实化工过程具有不同程度的非线性, 如果将已有的线性自优化控制方法应用于非线性过程, 自优化效果只能在标称工作点附近得到保证, 因此具有很大的局限性.

### 3.1 相关知识(Relevant points)

本文对非线性过程进行研究, 使用非线性模型 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{d})$ 代替式(2)进行相关推导. 首先, 介绍2个关于选择被控变量的推论.

**推论1** 任意被控变量 $\mathbf{c} = \mathbf{H}^T \mathbf{y}$ 的非0设定值 $\mathbf{c}_s$ 可通过以下方式变换为0: 假设有一个恒为1的测量变量 $y_0$ , 将其加入变量集 $\bar{\mathbf{y}} = [y_0; \mathbf{y}]$ , 新的组合矩阵变量为 $\bar{\mathbf{H}} = [-\mathbf{c}_s^T; \mathbf{H}]$ .

要证明这个推论, 只需对 $\mathbf{c} = \mathbf{c}_s$ 进行简单的移项和分解即可. 在线性自优化方法中,  $\mathbf{c}$ 的设定值由标称工作点的测量变量值计算而来. 但在非线性方法中, 需要确定它们的最优设定值, 因为过程特性在标称工作点两侧并不一定对称. 推论1表明, 求解 $\bar{\mathbf{H}}$ 的同时就解决了最优设定值问题. 为简便起见, 后文直接用 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{H}$ 代替 $\bar{\mathbf{y}}$ 和 $\bar{\mathbf{H}}$ .

**推论 2** 以 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{HB}$ 为组合矩阵具有相同的自优化效果, 其中 $\mathbf{B}$ 为 $n_c$ 维的非奇异方阵.

这个推论成立是因为 $\mathbf{B}$ 非奇异时,  $\mathbf{H}^T \mathbf{y} = 0$ 等价于 $(\mathbf{HB})^T \mathbf{y} = 0$ . 此结论表明 $\mathbf{H}$ 的最优解不是惟一的. 对于最优化问题特别是数值优化算法来说, 解非惟一不利于求解运算. 为了得到惟一解可人为对 $\mathbf{H}$ 施加约束, 如文献[6]采用 $\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y = \mathbf{J}_{uu}^{1/2}$ 这一约束. 实际上, 本文可以利用推论2, 通过对 $\mathbf{H}$ 施加约束来简化问题, 后文还将对此开展进一步讨论.

### 3.2 目标函数计算(Calculation of objective function)

以最小化全局平均损失 $L_{av}$ 的自优化控制问题, 可描述为如下最优化问题:

$$\min_{\mathbf{H}} L_{av}(\mathbf{H}) = \min_{\mathbf{H}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_{u, d(i)}, \quad (10)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{y}_{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{(i)}, \mathbf{d}_{(i)}), \quad \mathbf{H}^T \mathbf{y} = 0,$$

其中: 第1个约束条件为过程的非线性输出模型, 第2个约束是反馈控制作用, 下标 $(i)$ 表示对应于第 $i$ 个扰动情形 $\mathbf{d}_{(i)}$ 的变量. 注意, 对连续的扰动空间, 本文已将其离散化为 $N$ 个单独的扰动情形 $\mathbf{d}_{(i)}$ .  $N$ 足够大时, 式(9)能较好地近似平均损失的真实值. 式(9)是一个非线性规划问题, 理论上说可以直接使用数值优化算法进行求解, 但实际上计算量太大并不可行, 讨论如下: 首先, 目标函数 $L_{av}$ 由 $N$ 个独立扰动情形 $\mathbf{d}_{(i)}$ 下的损失函数 $L$ 平均得到, 需要依次计算; 其次, 对每一个扰动情形 $\mathbf{d}_{(i)}$ , 都需要联立大量等式约束条件(系统模型和反馈控制等式)进行求解. 注意, 在优化算法中, 如序列二次规划(SQP), 需要反复计算目标函数寻找一个梯度下降最快的方向. 在现有计算机能力下, 仍很难求解这种递归寻优问题. 因此需要对损失函数 $L$ 进行简化, 本文建议使用式(6)近似 $L$ . 因为此时 $\mathbf{e}_c = \mathbf{c} - \mathbf{c}^{\text{opt}} = -\mathbf{H}^T \mathbf{y}^{\text{opt}}$ ( $\mathbf{c}$ 被控制在设定值0上), 而 $\mathbf{J}_{cc}$ 可通过式(7)计算, 其中涉及到的各变量( $\mathbf{y}^{\text{opt}}$ ,  $\mathbf{J}_{uu}$ ,  $\mathbf{G}_y$ 等)都可以在离线状态下一次计算获得. 相比之下, 如果使用式(4),  $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{u}$ 之间是非线性的,  $\mathbf{e}_c$ 无法简单计算得到. 简化后的目标函数表示为

$$L_{av} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_{(i)}^{\text{opt}})^T \mathbf{H} \mathbf{J}_{cc, (i)} \mathbf{H}^T \mathbf{y}_{(i)}^{\text{opt}}, \quad (11)$$

其中 $L_{av}$ 是 $\mathbf{H}$ 的显式函数, 无需再考虑式(9)中的约束条件.

### 3.3 平均损失的矩阵形式(Matrix form of average loss)

**单输入情形** 构造如下矩阵:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{(1)}^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{(N)}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{cc, (1)} \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \cdots & \mathbf{J}_{cc, (N)} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中:  $\mathbf{Y}$ 的行向量对应于扰动情形 $\mathbf{d}_{(i)}$ 的最优工作点的测量变量取值(为简单起见省略了上标opt),  $\mathbf{W}$ 为对角矩阵, 其对角元素对应 $\mathbf{d}_{(i)}$ 的最优点的Hessian矩阵 $\mathbf{J}_{cc, (i)}$ . 可以验证,  $L_{av}$ 可写成如下形式:

$$L_{av} = \frac{1}{2N} \mathbf{H}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{W} \mathbf{Y} \mathbf{H}. \quad (13)$$

**两输入情形** 构造扩展矩阵 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 和 $\tilde{\mathbf{H}}$ 的拉长向量:

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{(1)}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y}_{(1)}^T \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}_{(N)}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y}_{(N)}^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \text{vec}(\mathbf{H}) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix},$$

其中:  $\text{vec}(\cdot)$ 表示拉长向量操作符,  $\mathbf{h}_1$ 和 $\mathbf{h}_2$ 为 $\mathbf{H}$ 的列向量. 此时, 权重矩阵 $\mathbf{W}$ 为 $2N$ 维的块对角方阵( $\mathbf{J}_{cc}$ 是 $2 \times 2$ 维).  $L_{av}$ 可写成如下形式:

$$L_{av} = \frac{1}{2N} \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{H}}. \quad (14)$$

这里只给出两输入情形, 是因为可同理构造出对应的扩展矩阵 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 和 $\tilde{\mathbf{H}}$ , 从而推广至 $n_u > 2$ 的多变量情形. 另外, 可以看到式(12)是式(13)的一个特殊情况, 后文将直接基于式(13)进行讨论.

## 4 快速算法(A fast algorithm)

### 4.1 基本思想(Basic idea)

以式(13)中的为最小化目标直接优化求解仍然很难实现, 因为这是一个非凸NLP问题. 矩阵 $\mathbf{W}$ 中的每一项都是决策变量 $\mathbf{H}$ 的非线性函数, 见式(7). 引入如下不等式:

$$L_{av} \leq \frac{1}{2N} \bar{\sigma}(\mathbf{W}) \overbrace{\tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{H}}}^{\gamma}, \quad (15)$$

其中:  $\bar{\sigma}(\mathbf{W})$ 表示 $\mathbf{W}$ 的最大特征值,  $\gamma$ 如式中定义, 可进一步计算为

$$\gamma = \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{H}} = [\mathbf{e}_{c, (1)}^T \cdots \mathbf{e}_{c, (N)}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{c, (1)} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{c, (N)} \end{bmatrix} = \text{tr}(\mathbf{H}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{H}), \quad (16)$$

其中 $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹. 式(14)不等号的右边项代表了的上界, 最小化该上界能够在一定程度上减小 $L_{av}$ . 但 $\bar{\sigma}(\mathbf{W})$ 仍然是 $\mathbf{H}$ 的复杂非线性函数, 不容易直接最小化 $L_{av}$ 的上界. 因此, 考虑最小化 $\gamma$ 来获得一个次优解. 最小化 $\gamma$ 的另外一个解释是所有扰动情形下的权重矩阵 $\mathbf{J}_{cc}$ 被视为常量 $\lambda \mathbf{I}$ , 这包含两层含义: 1) 所有扰动情形下, 单位偏移量 $\mathbf{e}_c$ 对损失 $L$ 的影响一样大; 2) 对于单个扰动情形, 每一个被控变量的单位偏移量对 $L$ 的影响也一样大. 这具有合理性, 又因为,  $L = 0.5 \mathbf{e}_c^T \mathbf{J}_{cc} \mathbf{e}_c$ 是一个带权重的欧式距离, 相对而言, 欧

式距离本身更为重要.

另外容易验证, 由于忽略了  $W$ , 以  $\gamma$  为最小化目标函数时推论 2 是不成立的. 比如  $H$  的幅值改变时,  $\gamma$  也会相应变化, 而损失函数  $L$  本身只和  $H$  的方向有关, 和  $H$  的幅值无关. 因此  $H$  没有任何约束时,  $\gamma$  不存在最小值. 为解决此问题, 可以  $H$  对施加合适的约束条件, 下面对  $H$  解空间的相关特性进行进一步讨论.

#### 4.2 解空间相关特性(Properties of solution space)

**定义 1** 对于一个给定的系统,  $H$  的解空间定义为  $\Omega = \{H | H \in \mathbb{R}^{(n_y+1) \times n_c}, \text{rank}(H) = n_c\}$ .

$\Omega$  被定义为  $H$  的原始解空间, 秩为  $n_c$  表示得到的被控变量非线性相关. 根据推论 2 得出, 集合  $\Omega$  是冗余的, 因为它的很多成员具有相同的自优化性能.

**定义 2** 对特定的  $H^i \in \Omega$ , 定义它对应的一个子空间

$$\Omega^{H^i} = \{H | H = H^i B, H^i \in \Omega, \text{rank}(B) = n_c\}.$$

简单地说, 定义 2 表明  $\Omega^{H^i}$  由所有和  $H^i$  具有相同自优化性能的组合矩阵组成. 根据定义 2, 如果  $\Omega^{H^{\text{opt}}}$  是最优组合矩阵所形成的子空间, 只需找到属于  $\Omega^{H^{\text{opt}}}$  的任意一个元素, 即可推广至一般情况.

**引理 1** 对任意的  $\Omega^{H^i}$ , 至少存在一个  $H_{\text{con}}^i \in \Omega^{H^i}$ , 满足正交酉约束  $(H_{\text{con}}^i)^T H_{\text{con}}^i = I$ .

**证** 证明上述引理即证明, 对于任意的  $H^i$ , 至少存在一个非奇异方阵  $B$ , 使得  $H_{\text{con}}^i = H^i B$  满足如下正交酉约束

$$(H_{\text{con}}^i)^T H_{\text{con}}^i = I. \quad (17)$$

上式等价于

$$(H_{\text{con}}^i)^T H_{\text{con}}^i = (B B^T)^{-1}. \quad (18)$$

令  $C = [(H_{\text{con}}^i)^T H_{\text{con}}^i]^{-1}$ , 有

$$B B^T = C. \quad (19)$$

由于  $C$  对称正定, 很容易证明至少存在一个  $B$  使上式成立. 比如, 可简单地取  $B$  为  $C$  的 Cholesky 分解的下三角矩阵, 式(18)即成立.

**定义 3** 对特定的  $H^i \in \Omega$ , 定义它对应的由所有  $H_{\text{con}}^i$  组成的集合为

$$\Omega^{H^i}_{\text{con}} = \{H_{\text{con}}^i | H_{\text{con}}^i \in \Omega^{H^i}, (H_{\text{con}}^i)^T H_{\text{con}}^i = I\}.$$

**引理 2**  $\Omega^{H^i}_{\text{con}}$  内的所有成员具有相同的  $\gamma$  值,  $\gamma$  由式(15)定义.

**证** 假设  $\Omega^{H^i}_{\text{con}}$  内的任意两个成员  $H^{i1}_{\text{con}}$  和  $H^{i2}_{\text{con}}$ , 根据定义它们满足如下关系:

$$(H^{i1}_{\text{con}})^T H^{i1}_{\text{con}} = I, (H^{i2}_{\text{con}})^T H^{i2}_{\text{con}} = I. \quad (20)$$

另外, 存在一个非奇异方阵  $B^{i21}$ , 使得  $H^{i2}_{\text{con}} = H^{i1}_{\text{con}} B^{i21}$ , 将其代入式(19)中得到

$$\begin{aligned} I &= (H^{i1}_{\text{con}} B^{i21})^T H^{i1}_{\text{con}} B^{i21} = \\ &= (B^{i21})^T (H^{i1}_{\text{con}})^T H^{i1}_{\text{con}} B^{i21} = \\ &= (B^{i21})^T B^{i21}, \end{aligned} \quad (21)$$

可以看到,  $(B^{i21})^T B^{i21}$  为单位矩阵. 因此, 性能指标  $\gamma$  满足

$$\begin{aligned} \gamma(H^{i2}_{\text{con}}) &= \\ \text{tr}[(H^{i2}_{\text{con}})^T Y^T Y H^{i2}_{\text{con}}] &= \\ \text{tr}[(H^{i1}_{\text{con}} B^{i21})^T Y^T Y H^{i1}_{\text{con}} B^{i21}] &= \\ \text{tr}[(H^{i1}_{\text{con}})^T Y^T Y H^{i1}_{\text{con}} B^{i21} (B^{i21})^T] &= \\ \text{tr}[(H^{i1}_{\text{con}})^T Y^T Y H^{i1}_{\text{con}}] &= \gamma(H^{i1}_{\text{con}}). \end{aligned} \quad (22)$$

可见  $H^{i1}_{\text{con}}$  和  $H^{i2}_{\text{con}}$  的  $\gamma$  值相等. 由于它们是  $\Omega^{H^i}_{\text{con}}$  中任意选择的, 所以  $\Omega^{H^i}_{\text{con}}$  内的所有成员都具有相同的  $\gamma$ . 证毕.

**定义 4** 定义由所有  $H_{\text{con}}^i$  合并的子解空间为  $\Omega_{\text{con}}$ . 容易得出:  $\Omega_{\text{con}} = \{H | H \in \Omega, H^T H = I\}$ .

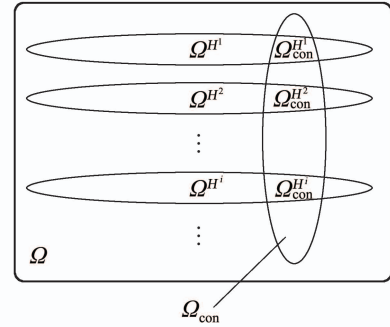


图 1 解空间之间的关系

Fig. 1 Relationships between solution spaces

图 1 对各种解空间之间的关系进行了更直观的解释. 原始问题是在整个解空间  $\Omega$  中寻找能最小化平均损失函数  $L_{\text{av}}$  的某个组合矩阵  $H^i$ . 根据推论 2, 该最优组合矩阵是非惟一的, 因此等同于找到它对应的最优解集  $\Omega^{H^i}$  (或其中任意一个元素). 为降低问题复杂性, 本文提出以  $\gamma$  为性能指标获得次优解, 但是在原始解空间  $\Omega$  中,  $\gamma$  不存在最小值. 解决办法是对  $H$  施加约束条件  $H^T H = I$ , 在子空间  $\Omega_{\text{con}}$  中寻找  $\gamma$  的最小值, 解释如下:

1) 根据引理 1,  $\Omega$  中任意一个元素都可以找到一个合适的转换矩阵  $B$ , 将其投影到子空间  $\Omega_{\text{con}}$  中. 只要在  $\Omega_{\text{con}}$  中找到一个候选解, 即可将其推广至原始空间  $\Omega$ . 因此, 施加该约束条件不失一般性.

2) 对  $L_{\text{av}}$  来说,  $\Omega^{H^i}$  内所有元素都是等价的, 它们的  $L_{\text{av}}$  值相同. 根据引理 2, 施加约束条件后  $\Omega^{H^i}_{\text{con}}$  内的  $\gamma$  值也是相同的, 这表示施加约束后的  $\gamma$  具有可比性.

3) 施加约束条件后的 $\gamma$ 是存在最小值的, 这由下面的定理1保证.

### 4.3 快速算法(Fast algorithm)

**定理 1** 如下带正交酉约束的最优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{H}} \gamma &= \min_{\mathbf{H}} \text{tr}(\mathbf{H}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{H}), \quad (23) \\ \text{s.t. } \mathbf{H}^T \mathbf{H} &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

的最优解构造如下: 对 $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ 进行特征值分解,  $\mathbf{H}$ 的列向量取为最小的 $n_c$ 个特征值对应的特征向量.

式(22)描述的最优化问题实质上是一个最小特征值问题, 具体证明可在很多教科书上找到, 如文献[11]. 综上所述, 对于非线性系统的自优化控制问题, 本文提出的快速算法具体步骤如下:

**步骤 1** 对扰动空间进行离散化, 获得 $N$ 个扰动情形 $d_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

**步骤 2** 对每一个扰动情形 $d_{(i)}$ 进行离线优化, 即求解式(1), 获得最优状态下的测量变量值, 构造矩阵 $\mathbf{Y}$ .

**步骤 3** 对 $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ 进行特征值分解, 将最小的 $n_c$ 个特征值对应的特征向量取为 $\mathbf{H}$ 的列向量.

可以看到, 该快速算法的实施流程是非常简单的. 和其他方法相比, 本方法不需要一阶或二阶矩阵( $\mathbf{J}_{uu}$ ,  $\mathbf{G}_y$ 等), 这是因为方法中 $\mathbf{J}_{cc}$ 被视为常数.

## 5 实例研究(Case studies)

### 5.1 数值算例(Numerical example)

定义如下最优化问题:

$$J = \frac{1}{2}(u - d)^2, \quad (24)$$

其中 $u$ 和 $d$ 均为标量. 测量变量 $\mathbf{y}$ 的模型方程为

$$\begin{cases} y_1 = u, \\ y_2 = \frac{1}{4}u^2 + d, \end{cases} \quad (25)$$

标称工作点为

$$u^* = d^* = 0, \quad J^* = 0, \quad \mathbf{y}^* = [0 \ 0]^T,$$

$d$ 服从均匀分布, 变化区间为 $[-1, 1]$ . 显然, 式(23)的解为 $u^{\text{opt}} = d$ , 但 $d$ 在线未知, 因此考虑使用 $\mathbf{y}$ 构造被控变量, 间接实现优化控制. 为更加清晰地说明本文算法, 本文先取 $N = 3$ , 扰动点分别为 $d_{(i)} = -1, 0, 1$ . 根据式(24)和 $u^{\text{opt}} = d$ 这一关系, 很容易得到矩阵 $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0.75 \\ 1 & 0 & 0.25 \\ 1 & 1 & 1.25 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

对 $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ 进行特征值分解, 取最小特征值对应的特征向量为被控变量

$$c_1 = 0.1172 + 0.7258y_1 - 0.6986y_2. \quad (27)$$

为对比效果, 使用线性SOC方法可以得到如下被控变量<sup>[5]</sup>:

$$c_0 = y_1 - y_2. \quad (28)$$

在扰动空间 $d \in [-1, 1]$ 内, 计算它们的性能损失, 如图2所示. 可以看到,  $c_0$ 在标称点 $d = 0$ 附近的损失很小, 在远离标称点的区域损失较大;  $c_1$ 在扰动空间两侧的损失较小, 在标称点附近的损失大于 $c_0$ .

就综合效果来看, 可以使用MATLAB Symbolic Toolbox计算被控变量的全局平均损失<sup>[12]</sup>,  $c_1$ 和 $c_0$ 分别为0.00649和0.0183(注意由于图2是对数坐标, 在扰动区间 $[0.7, 1]$ 区间内 $c_0$ 的实际损失远大于 $c_1$ ). 使用本文快速算法后, 总的自优化控制效果得到了较大幅度提高.

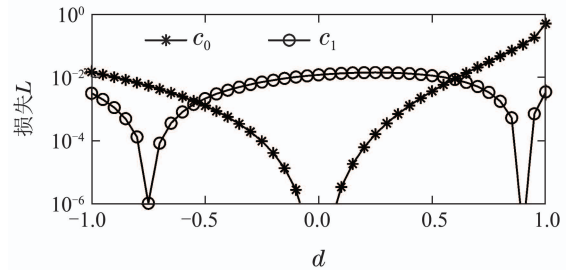


图2  $c_0$ 和 $c_1$ 的性能损失分布

Fig. 2 Distribution of losses for  $c_0$  and  $c_1$

通过增加 $N$ 对扰动空间进行更加细密的采样, 可提高算法的可靠性. 图3显示了平均损失随 $N$ 从3增加到100的变化趋势. 总的来说, 增加 $N$ 能进一步降低平均损失. 当 $N$ 从3逐渐增加时, 平均损失大幅度降低,  $N = 8$ 时最低为0.00409. 另一方面, 当 $N$ 继续增加时, 平均损失反而略微增加, 这是由于快速算法忽略权重因子 $\mathbf{J}_{cc}$ 导致的. 最终算法收敛时的平均损失约为0.00463, 为线性SOC方法的1/4左右.

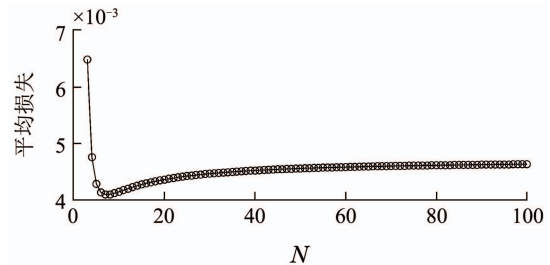


图3 平均损失随 $N$ 的变化趋势

Fig. 3 Evolution of average loss against  $N$

### 5.2 蒸发过程(Evaporator process)

一个强制循环的蒸发器, 使用高温蒸汽将稀释液体蒸发, 然后在分离器内分离气液两相, 浓缩后的溶液一部分作为产品, 另一部分与进料混合后重新进入换热器, 如图4.

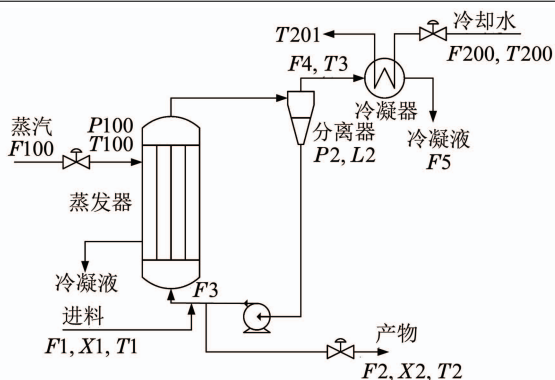


图 4 蒸发器示意图

Fig. 4 Evaporator process

该过程经常用来验证自优化控制效果, 包含5个操纵变量( $F_1, F_2, P_{100}, F_3, F_{200}$ ), 3个扰动变量( $X_1, T_1, T_{200}$ )和10个测量变量

$$\mathbf{y} = [P_2 \ T_2 \ T_3 \ F_2 \ F_{100} \ T_{201} \ F_3 \ F_5 \ F_{200} \ F_1]^T, \quad (29)$$

其中扰动变量中,  $X_1$ 的变化范围是 $\pm 5\%$ ,  $T_1$ 和 $T_{200}$ 的变化范围是 $\pm 20\%$ . 过程涉及到的变量物理含义列于表1, 机理模型和标称工作点的数值可参见文献[4].

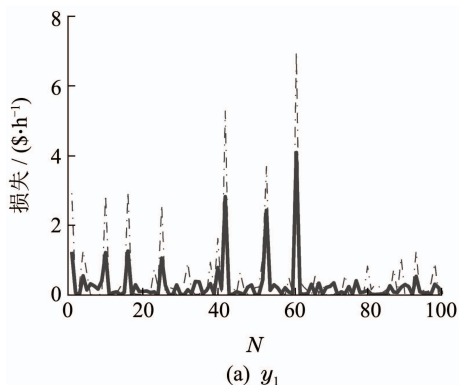
表 1 变量的物理含义

Table 1 Physical meanings of process variables

变量	物理含义	变量	物理含义
$F_1$	进料流率	$L_2$	分离器液位
$F_2$	产物流率	$P_2$	操作压力
$F_3$	循环流率	$F_{100}$	蒸汽流率
$F_4$	气相流率	$T_{100}$	蒸汽温度
$F_5$	冷凝液流率	$P_{100}$	蒸汽压力
$X_1$	进料成分	$Q_{100}$	热负荷
$X_2$	产物成分	$F_{200}$	冷却水流率
$T_1$	进料温度	$T_{200}$	冷却水入口温度
$T_2$	产物温度	$T_{201}$	冷却水出口温度
$T_3$	气相温度	$Q_{200}$	冷却器热负载

过程的操作目标为最小化如下操作成本( $\$/h$ ), 包括蒸汽、冷却水和泵的功率、原料成本等

$$J = 600F_{100} + 0.6F_{200} + 1.009(F_2 + F_3) + 0.2F_1 - 4800F_2. \quad (30)$$



操作约束为

$$X_2 \geq 35 + 0.5\%, \quad (31)$$

$$40 \text{ kPa} \leq P_2 \leq 80 \text{ kPa}, \quad (32)$$

$$P_{100} \leq 400 \text{ kPa}, \quad (33)$$

$$F_{200} \leq 400 \text{ kg} \cdot \text{min}^{-1}. \quad (34)$$

可以验证, 约束条件(30)(32)是积极的, 需要对其进行卡边控制, 这消耗了2个自由度. 另外, 分离器液位需要进行稳定控制. 因此, 剩余的2个自由度用来完成自优化控制. 不失一般性, 可选为 $F_{200}$ 和 $F_1$ , 需要设计2个被控变量. 通常来说, 测量变量数目较多时, 并不需要使用所有的测量变量构造被控变量. 考虑如下测量变量子集, 来对比本文算法和线性SOC的性能.

$$\mathbf{y}_1 = [F_2 \ F_{100} \ F_{200}]^T, \quad \mathbf{y}_2 = [F_2 \ F_{100} \ T_{201} \ F_3]^T, \\ \mathbf{y}_3 = [P_2 \ T_2 \ T_3 \ F_2]^T, \quad \mathbf{y}_4 = [P_2 \ F_2 \ F_{100} \ F_{200} \ F_1]^T.$$

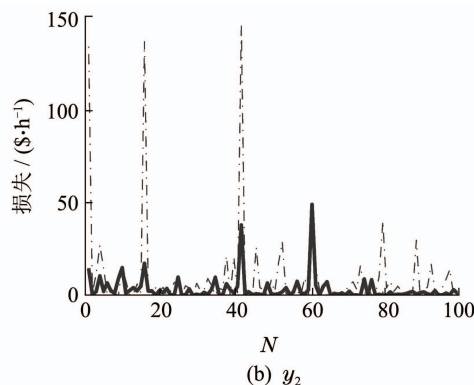
应用本文算法时, 取 $N = 1000$ , 对扰动空间进行随机采样; 应用线性化SOC方法时, 采用的是文献[6]中的扩展零空间法. 受篇幅所限, 后文不具体列出被控变量表达式. 验证自优化效果时, 产生100组随机扰动, 计算平均损失和相关统计量, 见表2.

表 2 两种方法在100组随机扰动下的效果对比

Table 2 Performance comparisons of two methods under 100 groups of random disturbances

$\mathbf{y}$	本文方法			线性SOC		
	$L_{av}$	标准差	最大值	$L_{av}$	标准差	最大值
$\mathbf{y}_1$	0.2778	0.5746	4.0923	0.4931	1.0733	6.9841
$\mathbf{y}_2$	3.426	6.767	49.225	9.921	24.196	145.733
$\mathbf{y}_3$	22.283	24.671	143.001	42.716	59.706	444.256
$\mathbf{y}_4$	0.3580	0.6143	3.9099	0.5051	1.1326	6.7421

结果显示, 使用本文的算法大幅度提高了自优化效果. 表中所示的4种情形, 其平均损失分别降低了43.7%, 65.5%, 47.8%和29.1%, 标准差和最大损失也得到了相应的降低, 具体分布如图5所示. 除上述的测量变量子集外, 本文也对其他子集进行了验证, 得到了相似的结果.



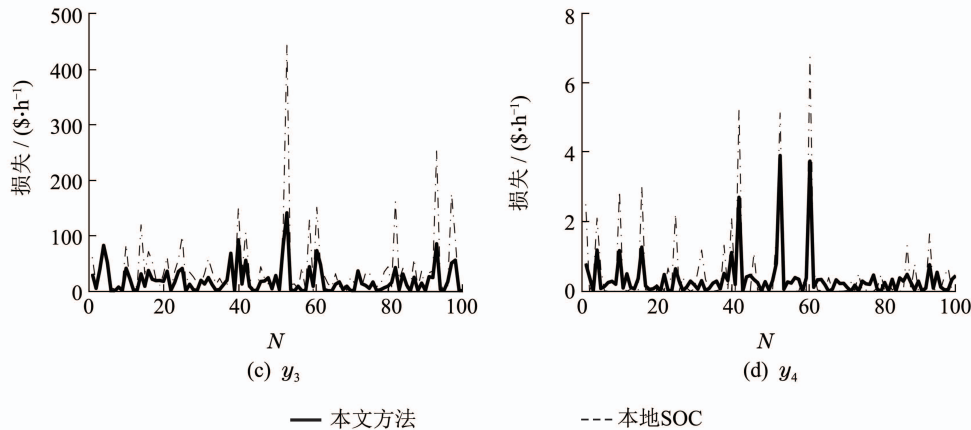


图5 损失函数分布

Fig. 5 Loss distributions for the evaporator

## 6 结论(Conclusions)

本文对非线性过程的自优化控制问题进行了研究,提出了一种求解被控变量的快速算法.算法使用非线性模型计算平均损失,自优化效果具有全局性.为快速求解得到的NLP问题,提出最小化指标 $\gamma$ (假设权重矩阵 $\mathbf{J}_{cc}$ 为单位矩阵)获得次优解,同时给出了求解次优被控变量的解析法.最终,快速算法只需对每一个扰动进行离线优化,构造出相应矩阵后对其进行特征值分解.由于不需要一阶或二阶敏感矩阵,算法在提高自优化性能的同时保持了简洁性.对一个数值算例和蒸发过程进行了研究,验证了算法的有效性.

后续工作将关注于求解原始的NLP问题,以减小由于忽略权重矩阵 $\mathbf{J}_{cc}$ 带来的影响.另外,如何选择测量变量子集也是一个值得研究的课题.

## 参考文献(References):

- [1] SKOGESTAD S. Plantwide control: the search for the self-optimizing control structure [J]. *Journal of Process Control*, 2000, 10(5): 487 – 507.
- [2] HALVORSEN I J, SKOGESTAD S, MORUD J C, et al. Optimal selection of controlled variables [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2003, 42(14): 3273 – 3284.
- [3] KARIWALA V. Optimal measurement combination for local self-optimizing control [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2007, 46(11): 3629 – 3634.
- [4] KARIWALA V, CAO Y, JANARDHANAN S. Local self-optimizing control with average loss minimization [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2008, 47(4): 1150 – 1158.
- [5] ALSTAD V, SKOGESTAD S. Null space method for selecting optimal measurement combinations as controlled variables [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2007, 46(3): 846 – 853.
- [6] ALSTAD V, SKOGESTAD S, HORI E S. Optimal measurement combinations as controlled variables [J]. *Journal of Process Control*, 2009, 19(1): 138 – 148.
- [7] YE Lingjian, LI Yingdao, SONG Zhihuan. New approach for constructing controlled variables for chemical processes [J]. *CIESC Journal*, 2011, 62(8): 2221 – 2226.  
(叶凌箭, 李英道, 宋执环. 一种构造化工过程被控变量的方法 [J]. *化工学报*, 2011, 62(8): 2221 – 2226.)
- [8] YE L J, CAO Y, LI Y D, et al. Approximating necessary conditions of optimality as controlled variables [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2013, 52(2): 798 – 808.
- [9] YE L J, CAO Y, MA X S, et al. A novel hierarchical control structure with controlled variable adaptation [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2014, 53(38): 14695 – 14711.
- [10] JASCHKE J, SKOGESTAD S. NCO tracking and self-optimizing control in the context of real-time optimization [J]. *Journal of Process Control*, 2011, 21(10): 1407 – 1416.
- [11] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. Second Edition. Cambridge: University Press, 2012.
- [12] YE L J, CAO Y. A formulation for globally optimal controlled variable selection [C] // *Proceedings of the 2012 UKACC International Conference on Control*. Cardiff, UK: IEEE, 2012: 136 – 141.

## 作者简介:

叶凌箭 (1984–), 男, 博士, 副教授, 研究方向为复杂系统建模与仿真、自优化控制、控制系统设计, E-mail: ljye@iipc.zju.edu.cn.