

具有噪声约束的 时滞Markov跳变网络给定时间一致性协议设计

闵 鸯, 栾小丽[†], 刘 飞

(江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘要: 本文研究网络连接系统在随机Markov跳变拓扑结构, 通信时滞, 外部干扰等情形下的给定时间一致性协议设计方法. 基于有限短时间理论, 放宽对系统不一致状态渐近收敛于零的要求, 在预先给定的时间区域内, 设法使网络中各子系统的的状态在期望范围内受限运动, 从而提出给定时间一致性定义, 并进一步设计给定时间一致性控制算法. 不仅从时间角度为降低渐近一致的工程保守性提供了思路, 且所提的模型转换新方法使得设计的控制协议更具通用性. 仿真结果验证了所提算法的有效性.

关键词: Markov跳变网络; 通信时滞; 噪声约束; 给定时间一致

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Given time consensus protocol for Markov jump networks with communication delays and disturbances

MIN Yang, LUAN Xiao-li[†], LIU Fei

(Key Laboratory of Advanced Control for Light Industry Processes, Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: The design of the given time consensus protocol is investigated for network-connected systems with random Markov jump topologies, communication delays and external disturbances. Because of the theory of short time, in defining the given time consensus protocol we relax the requirement that the disagreement dynamics will converge to zero asymptotically. Instead, we only need the disagreement dynamics of interconnected networks stays within a given bound over a finite time interval. In one step followed, we develop the algorithm for the given time consensus protocol based on this definition. Thus, we not only provide an idea for lowering the conservatism of asymptotical convergence to zero in the time domain, but also make the design of control protocol more general in application by adopting the proposed method of model transformation. The effectiveness of the proposed consensus protocol is demonstrated by simulation examples.

Key words: Markov jump networks; communication delays; disturbance rejection; given time consensus

1 引言(Introduction)

随着计算机技术、网络技术、通信技术的飞速发展, 网络连接动态系统的一致性研究成为控制领域的一个新兴研究方向^[1-4]. 自2003, 2004年Jadbabaie和Olfati的开创性工作以来, 网络动态系统的一致性问题引起了来自数学、控制、系统科学等领域学者的广泛关注, 研究成果包括3个方面内容: 1) 针对网络中的各动态系统, 从一阶积分器模型到一般线性系统、非线性系统、奇异系统等^[5-9]; 2) 针对网络拓扑结构, 从无向到有向, 从固定拓扑到切换拓扑, 包括时变拓扑、随机拓扑等^[10-12]; 3) 针对网络连接受干扰程度, 从即时

通信到通信时滞、数据丢包、随机干扰等^[13-15].

上述研究成果均是在无穷时间区域下要求系统的不一致状态渐近收敛于零, 即网络中各动态子系统的状态趋于一致. 很多实际系统, 例如生化反应系统, 通信网络系统、机器人操控系统等, 人们更感兴趣的常常是其能否在有限的短时间内满足暂态要求. 为此, Dorato于1961年首先提出了短时间稳定性概念^[16], 其后基于有限短时间理论的控制问题、滤波问题、优化问题等^[17-19]得到了广泛研究. 但针对通过网络连接在一起的多个动态系统, 如何借助于有限短时间的概念, 研究各子系统在给定时间区间内的一致性控制问题,

收稿日期: 2015-03-10; 录用日期: 2015-07-21.

[†]通信作者. E-mail: xlluan@jiangnan.edu.cn; Tel.: +86 510-5912109.

本文责任编辑: 吴立刚.

国家自然科学基金项目(61473137)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61473137).

是个值得关注而又具有挑战性的新课题. 当然由于有限带宽、传输时滞、拓扑连接的不确定等因素的存在, 如何进一步考虑复杂情形下网络连接系统的给定时间一致性协议涉及则更具研究色彩.

基于上述分析, 本文考虑实际系统中存在的通信时滞、外部干扰、随机拓扑结构, 针对网络连接系统设计给定时间一致性控制协议, 在预先给出的时间区间内, 通过允许Lyapunov函数有所递增, 设法使系统的不一致状态在期望范围内受限运动. 主要贡献如下: 1) 首次提出给定时间一致性定义, 通过放松对Lyapunov能量函数严格递减的要求, 放宽对不一致状态的要求, 实现给定时间一致性控制目的; 2) 通过相似变换获取拉普拉斯矩阵的约当阵形式, 给出新的模型转换方法, 使得所设计的控制协议更具通用性, 不仅可应用于有向网络, 且无需平衡条件假设; 3) 与已有文献中考虑Markov随机拓扑结构的一致性结果相比, 本文结果充分利用了Markov随机过程的信息, 不仅与跳变模态有关, 还与各拓扑结构下的跳变率相关.

2 问题描述(Problem description)

本文考虑如下系统模型:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t) + B_w w_i(t), \quad (1)$$

其中: A, B, B_w 是常数矩阵; $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量; $u_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入向量; $w_i(t) \in L_2^p$ 是外部干扰且满足

$$\int_0^t w_i^T w_i d\tau < d. \quad (2)$$

假设系统中共有 N 个子系统, 用有向图 $G(r_t) = (V, E, Q)$ 表示各子系统之间的信息交换网络拓扑结构. 图的顶点 V_i 表示子系统 i , 边集 $E \subseteq V^2$, 图的边界 $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$ 表示子系统 i 传递信息到子系统 j ; 加权图的邻接矩阵 $Q(r_t) = [q_{ij}]_{N \times N}$ 中, 如果有信息从子系统传递到子系统 i , 则 $q_{ij} = 1$, 否则 $q_{ij} = 0$; 另外, 当 $i = j$ 时, 规定 $q_{ij} = 0$. 定义拉普拉斯矩阵 $L(r_t) = [l_{ij}]$, 其中

$$\begin{cases} l_{ij} = -q_{ij}, & j \neq i, \\ l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N q_{ij}, \end{cases}$$

$\{r_t, t \geq 0\}$ 表示网络拓扑结构随机跳变的模态, 为在有限集合 $M = \{1, 2, \dots, S\}$ 中随时间 t 取值的Markov随机过程, 其跳变转移率矩阵为 $\Pi = \{\pi_{rl}\}, r, l \in M$, 跳变转移率定义为

$$P_{rl} = P_r \{r_{t+\Delta t} = l | r_t = r\} = \begin{cases} \pi_{rl} \Delta t + o(\Delta t), & r \neq l, \\ 1 + \pi_{rr} \Delta t + o(\Delta t), & r = l, \end{cases}$$

式中: $\Delta t \rightarrow 0$, 且当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 有 $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$; π_{rl} 表示从模态 r 跳变到模态 l 的转移概率, 当 $r \neq l$ 时,

$\pi_{rl} \geq 0$, 并有 $\sum_{l=1, l \neq r}^S \pi_{rl} = -\pi_{rr}$ 成立.

引理 1^[9] 当 $G(r_t)$ 是连通图时, 拉普拉斯矩阵 $L(r_t)$ 的秩为 $N - 1$, 即 $L(r_t)$ 有一个一阶特征值 0, 且它所对应的特征向量为 $\mathbf{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$.

引理 2^[8] 若拉普拉斯矩阵 $L(r_t)$ 满足引理 1, 则存在一个相似变换矩阵 $F = [F_1 \ \mathbf{1}]$ 与 $F^{-1} = [F_2 \ \kappa(r_t)]^T$, 使得如下条件成立:

$$F^{-1}L(r_t)F = \text{diag}\{L_1(r_t), 0\} =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(r_t) & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_{n_\lambda}(r_t) & & & & & & \\ & & & \mu_1(r_t) & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \mu_{n_\mu}(r_t) & & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

式中: $\lambda_i(r_t) \in \mathbb{R}$ 为 $L(r_t)$ 的实特征值,

$$\mu_i(r_t) = \begin{bmatrix} \alpha_i(r_t) & \beta_i(r_t) \\ -\beta_i(r_t) & \alpha_i(r_t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

为 $L(r_t)$ 的复数特征值, n_λ 为实特征值的个数, n_μ 为复特征值的个数, 且有 $1 + n_\lambda + 2n_\mu = N$, $\kappa(r_t) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 为 $L(r_t)$ 对应于 0 特征值的左特征向量, 并且满足 $\kappa(r_t)^T \mathbf{1} = 1$.

对于系统(1)引入不一致状态

$$z_i = x_i - \sum_{j=1}^N \kappa(r_t)_j x_j, \quad (3)$$

其中 $\kappa(r_t)_j$ 是列向量 $\kappa(r_t)$ 中的第 j 个元素.

本文的设计目标是在给定时间区间 $T > 0$ 内, 设法使(3)中的不一致状态在一定界限内受限运动. 为此, 需要作如下定义:

定义 1 对于给定的时间 $T > 0$, 网络连接系统(1) ($u_i(t) = 0, w_i(t) = 0$) 是关于 (c_1, c_2, T, R) 给定时间一致的, 如果满足:

$$\begin{cases} \mathbb{E}\{z_i^T(0)Rz_i(0)\} \leq c_1 \Rightarrow \\ \mathbb{E}\{z_i^T(t)Rz_i(t)\} \leq c_2, \quad \forall t \in [0 \ T], \end{cases} \quad (4)$$

其中: $0 \leq c_1 \leq c_2, R \geq 0$.

定义 2 网络连接系统(1)是关于 (c_1, c_2, T, R, d) 给定时间可一致化的, 如果对于 $0 \leq c_1 \leq c_2, R \geq 0, T > 0, d > 0, d$ 为外部干扰的上界, 均有式(4)成立.

注 1 借助于有限短时间稳定理论^[16], 上述定义描述了网络连接系统(1)的不一致状态在给定时间内的暂态行为, 即对于给定的初始条件 $\mathbb{E}\{z_i^T(0)Rz_i(0)\} \leq c_1$, 要求不一致状态在给定时间 T 内受限运动, 且运动轨迹不超过期望的上界. 值得注意的是, 给定时间一致与渐近一致是两个不同的

概念, 系统渐近一致不能保证给定时间一致. 同样, 给定时间一致也不能确保渐近一致.

3 给定时间一致性协议设计(Given time consistency protocol design)

为解决上述给定时间一致性问题, 本文考虑如下带有通信时滞的控制协议:

$$u_i = K(r_t) \sum_{j=1}^N q_{ij}(r_t)(x_j(t-\tau) - x_i(t-\tau)), \quad (5)$$

式中: $q_{ij}(r_t)$ 是随机跳变拓扑的邻接矩阵 $Q(r_t)$ 中的元素, $K(r_t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是一个依赖于跳变模态的待求反馈增益矩阵. 根据拉普拉斯矩阵 $L(r_t)$ 与邻接矩阵 $Q(r_t)$ 的关系, 易得

$$u_i = -K(r_t) \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t)x_j(t-\tau). \quad (6)$$

将上述控制器代入系统(1), 可得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (I_N \otimes A)x(t) + (I_N \otimes B_w)w(t) - \\ \quad (L(r_t) \otimes BK(r_t))x(t-\tau), \\ z(t) = (H \otimes I_n)x(t), \end{cases} \quad (7)$$

式中: $H = I_N - (\mathbf{1} \cdot \kappa(r_t)^T)$, $x = [x_1^T \ x_2^T \ \cdots \ x_N^T]^T$, $w = [w_1^T \ w_2^T \ \cdots \ w_N^T]^T$.

为了使系统(1)的不一致状态满足给定时间一致性条件(4), 需对式(7)进行模型转换. 令

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (F^{-1} \otimes I_n)x(t), \\ \tilde{z}(t) &= (F^{-1} \otimes I_n)z(t), \quad \tilde{w}(t) = (F^{-1} \otimes I_p)w(t), \\ \xi(t-\tau) &= (F^{-1} \otimes I_n)x(t-\tau), \end{aligned}$$

其中: $\xi = [\xi_1^T \ \xi_2^T \ \cdots \ \xi_N^T]^T \in \mathbb{R}^N$, $\tilde{w} = [\tilde{w}_1^T \ \tilde{w}_2^T \ \cdots \ \tilde{w}_N^T]^T \in \mathbb{R}^N$, $\tilde{z} = [\tilde{z}_1^T \ \tilde{z}_2^T \ \cdots \ \tilde{z}_N^T]^T \in \mathbb{R}^N$, 则有

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = (I_N \otimes A)\xi(t) + (I_N \otimes B_w)\tilde{w}(t) - \\ \quad (F^{-1}L(r_t)F \otimes BK(r_t))\xi(t-\tau), \\ \tilde{z}(t) = (F^{-1} \otimes I_n)(H \otimes I_n)(F \otimes I_n)\xi(t). \end{cases} \quad (8)$$

对式(8)中的 $\tilde{z}(t)$ 进行进一步计算, 有

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= (F^{-1} \otimes I_n)(H \otimes I_n)(F \otimes I_n)\xi = \\ &F^{-1}HF \otimes I_n\xi = \\ &(F^{-1}I_N F - F^{-1}(\mathbf{1} \cdot \kappa(r_t)^T)F) \otimes I_n\xi = \\ &(I_N - (F^{-1}\mathbf{1}) \cdot (\kappa(r_t)^T F)) \otimes I_n\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

根据引理2中对相似变换阵的定义, 可得

$$\begin{aligned} F^{-1}F &= F^{-1}[F_1 \ \mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ F^{-1}\mathbf{1} &= [0 \ 0 \ \cdots \ 1]^T, \end{aligned}$$

$$F^{-1}F = [F_2 \ \kappa(r_t)]^T F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\kappa(r_t)^T F = [0 \ 0 \ \cdots \ 1],$$

因此, 式(9)可进一步化简为

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \otimes I_n \xi. \quad (10)$$

为方便表述, 将系统(8)拆分为 N 个子系统. 对于前 $N-1$ 个子系统, 当 $i = 1, \dots, n_\lambda$ 时, 有

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i(t) = A\xi_i(t) + B_w\tilde{w}_i(t) - \\ \quad \lambda_i(r_t)BK(r_t)\xi_i(t-\tau), \\ \tilde{z}_i(t) = \xi_i(t). \end{cases} \quad (11)$$

当 $i = n_\lambda + 1, \dots, N-1$ 时, 有

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i(t) = A\xi_i(t) + B_w\tilde{w}_i(t) - (\alpha_i(r_t) + \\ \quad \beta_i(r_t))BK(r_t)\xi_i(t-\tau), \\ \tilde{z}_{i_1}(t) = \xi_{i_1}(t), \\ \dot{\xi}_{i_2}(t) = A\xi_{i_2}(t) + B_w\tilde{w}_{i_2}(t) - (\alpha_i(r_t) - \\ \quad \beta_i(r_t))BK(r_t)\xi_{i_2}(t-\tau), \\ \tilde{z}_{i_2}(t) = \xi_{i_2}(t), \end{cases} \quad (12)$$

其中:

$i_1 = 1 + n_\lambda + 2k - 1$, $i_2 = 1 + n_\lambda + 2k$, $k \in 1, \dots, n_\mu$.

为描述简单, 当 $r_t = r$, $r \in S$ 时, $K(r_t)$, $\lambda_i(r_t)$, $\alpha_i(r_t)$ 及 $\beta_i(r_t)$ 可分别用如下符号代替 K_r , $\lambda_{i,r}$, $\alpha_{i,r}$ 及 $\beta_{i,r}$; 而对于第 N 个子系统, 根据式(10)可知

$$\begin{cases} \dot{\xi}_N(t) = A\xi_N(t) + B_w\tilde{w}_N(t), \\ \tilde{z}_N(t) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

注2 上述模型转换方法, 一方面通过相似变换获取拉普拉斯矩阵的约当阵形式, 并考虑有向网络中约当阵普遍存在复特征值的情形, 利用复特征值信息对系统(8)进行拆分, 得到子系统(12). 另一方面, 引入拉普拉斯矩阵的左特征向量 $\kappa(r_t)$ 来描述系统(1)的不一致状态, 并利用 $\kappa(r_t)$ 的特殊性质, 设计模型转换方法, 使得转换后的不一致状态 $\tilde{z}(t)$ 等价于系统状态 $\xi(t)$, 以便通过控制 $\xi(t)$ 实现对不一致状态的给定时间一致性研究.

定理1 系统(1)是关于 (c_1, c_2, T, R, d) 给定时间可一致化的, 如果对于形如(5)的一致性协议, 存在标量 $\eta > 0$, $\gamma > 0$ 和对称正定矩阵 $X_r, Y_r, r \in M$, 正定矩阵 U 满足

$$\begin{bmatrix} \Theta & \sigma BB^T & \psi_{1r} & X_r & \psi_{2r} \\ \sigma BB^T & -Y_r & & & \\ \psi_{1r}^T & & -\psi_{3r} & & \\ X_r & & & -Y_r & \\ \psi_{2r}^T & & & & -\psi_{4r} \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$\lambda_X \cdot (\tilde{R} \otimes R)^{-1} < (I_{N-1} \otimes X_r) < (\tilde{R} \otimes R)^{-1}, \quad (15)$$

$$\lambda_Y \cdot (\tilde{R} \otimes R)^{-1} < (I_{N-1} \otimes Y_r), \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi & \sqrt{\eta c_1} \\ \sqrt{\eta c_1} & -\frac{\tau \lambda_X + \lambda_Y}{1 + \tau} \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

式中:

$$\Theta = X_r A^T + A X_r + \pi_{rr} X_r - \eta X_r,$$

$$\psi_{1r} = [B_w \ B_w \ \cdots \ B_w],$$

$$\psi_{2r} = [\sqrt{\pi_{r1}} X_r \ \cdots \ \sqrt{\pi_{r(r-1)}} X_r \\ \sqrt{\pi_{r(r+1)}} X_r \ \cdots \ \sqrt{\pi_{rS}} X_r],$$

$$\psi_{3r} = \gamma^2 U \in \mathbb{R}^{S-1},$$

$$\psi_{4r} = \text{diag}\{X_1, \dots, X_{r-1}, X_{r+1}, \dots, X_N\},$$

$$\sigma = \min\{\lambda_{1,r}, \dots, \lambda_{n_\lambda,r}, \alpha_{1,r}, \dots, \alpha_{n_\mu,r}\},$$

$$\tilde{R} = F_1^T F_1,$$

$$\Xi = \lambda_{\max(U)} \lambda_{\max(F_1^{-T} F_1^{-1} \otimes I_p)} \gamma^2. \\ d(1 - e^{-\eta T}) - e^{-\eta T} \eta c_2.$$

证 令

$$V(\xi_i(t), r_t = r) = V(\xi_i, r) = \\ \xi_i^T(t) P_r \xi_i(t) + \int_{t-\tau}^t \xi_i^T(\varepsilon) Q_r \xi_i(\varepsilon) d\varepsilon,$$

其中: P_r, Q_r 是依赖于模态的对称正定矩阵; 当 $i = 1, \dots, n_\lambda$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E}\{V(\xi_i, r)\} = \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbb{E}\{V(\xi_i(t + \Delta t), r_{t+\Delta t}, t + \Delta t) | \\ \xi_i(t) = \xi_i, r_t = r\} - V(\xi_i(t), r_t, t)] = \\ \xi_i^T(t) (A^T P_r + P_r A + Q_r + \sum_{l=1}^S \pi_{rl} P_l) \xi_i(t) - \\ 2\xi_i^T(t) P_r \lambda_{i,r} B K_r \xi_i(t - \tau) + \\ 2\xi_i^T(t) P_r B_w \tilde{w}_i(t) - \xi_i^T(t - \tau) Q_r \xi_i(t - \tau), \end{aligned} \quad (18)$$

当 $i = n_\lambda + 1, \dots, N - 1$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E}\{V(\xi_{i_1}, r)\} + \frac{d}{dt} \mathbb{E}\{V(\xi_{i_2}, r)\} = \\ \xi_{i_1}^T(t) (A^T P_r + P_r A + \sum_{l=1}^S \pi_{rl} P_l + Q_r) \xi_{i_1}(t) - \\ 2\xi_{i_1}^T(t) P_r \alpha_{i,r} B K_r \xi_{i_1}(t - \tau) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\xi_{i_1}^T(t) P_r B_w \tilde{w}_{i_1}(t) - \xi_{i_1}^T(t - \tau) Q_r \xi_{i_1}(t - \tau) + \\ \xi_{i_2}^T(t) (A^T P_r + P_r A + \sum_{l=1}^S \pi_{rl} P_l + Q_r) \xi_{i_2}(t) - \\ 2\xi_{i_2}^T(t) P_r \alpha_{i,r} B K_r \xi_{i_2}(t - \tau) + \\ 2\xi_{i_2}^T(t) P_r B_w \tilde{w}_{i_2}(t) - \xi_{i_2}^T(t - \tau) Q_r \xi_{i_2}(t - \tau), \end{aligned} \quad (19)$$

其中 P_l 是依赖于模态的对称正定矩阵.

令 $V(\xi'(t), r) = \sum_{i=1}^{N-1} V(\xi_i, r)$, 其中 $\xi' = [\xi_1^T \ \xi_2^T \ \dots \ \xi_{N-1}^T]^T \in \mathbb{R}^{N-1}$, 如果下式成立:

$$\begin{bmatrix} \Lambda & -\sigma P_r B K_r & P_r B_w \\ * & -Q_r & 0 \\ * & 0 & -\gamma^2 U \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

其中: $\Lambda = A^T P_r + P_r A + \sum_{l=1}^S \pi_{rl} P_l + Q_r - \eta P_r$, U 为正定矩阵; 结合式(20)与式(18)–(19)可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E}\{V(\xi'(t), r)\} < \\ \eta \mathbb{E}\{V(\xi', r)\} + \gamma^2 \tilde{w}'^T(t) U \tilde{w}'(t), \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\tilde{w}' = [\tilde{w}_1^T \ \tilde{w}_2^T \ \dots \ \tilde{w}_{N-1}^T]^T \in \mathbb{R}^{N-1}$; 对上式左乘右乘 $\text{diag}\{P_r^{-1}, Q_r^{-1}, I\}$, 并令 $K_r = B^T Q_r$, $X_r = P_r^{-1}$, $Y_r = Q_r^{-1}$, 同时应用Schur补性质可得式(14).

对式(21)两边同乘 $e^{-\eta t}$, 并从 0 到 t 积分得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{V(\xi'(t), r)\} < \\ e^{\eta t} (\mathbb{E}\{V(\xi'(0), r)\} + \\ \gamma^2 \cdot \lambda_{\max(U)} \int_0^t e^{-\eta s} \tilde{w}'^T(s) \tilde{w}'(s) ds). \end{aligned} \quad (22)$$

考虑外部干扰的有界性, 可得

$$\int_0^t w'^T(s) w'(s) ds < (N - 1)d,$$

通过模型转换

$$\begin{aligned} \int_0^t \tilde{w}'^T(s) \tilde{w}'(s) ds = \\ \int_0^t w'^T(s) (F_1^{-T} F_1^{-1} \otimes I_p) w'(s) ds < \\ \lambda_{\max(F_1^{-T} F_1^{-1} \otimes I_p)} \cdot (N - 1)d, \end{aligned}$$

因此下式成立:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{V(\xi'(t), r)\} < \\ e^{\eta t} \{V(\xi'(0), r) + \lambda_{\max(U)} \cdot \\ \lambda_{\max(F_1^{-T} F_1^{-1} \otimes I_p)} (N - 1) \gamma^2 d \frac{(1 - e^{-\eta t})}{\eta}\}. \end{aligned} \quad (23)$$

令 $I_{N-1} \otimes \tilde{P}_r = (\tilde{R} \otimes R)^{-1/2} (I_{N-1} \otimes P_r) (\tilde{R} \otimes R)^{-1/2}$, $I_{N-1} \otimes \tilde{Q}_r = (\tilde{R} \otimes R)^{-1/2} (I_{N-1} \otimes Q_r) (\tilde{R} \otimes R)^{-1/2}$, 其中 $\tilde{R} = F_1^T F_1$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{V(\xi'(t), r)\} = \\ \mathbb{E}\{\xi'^T(t) (\tilde{R} \otimes R)^{1/2} (I_{N-1} \otimes \tilde{P}_r) (\tilde{R} \otimes R)^{1/2} \xi'(t) + \end{aligned}$$

$$\int_{t-\tau}^t \xi'^T(\varepsilon)(\tilde{R} \otimes R)^{1/2} (I_{N-1} \otimes \tilde{Q}_r)(\tilde{R} \otimes R)^{1/2} \xi'(\varepsilon) d\varepsilon\}. \tag{24}$$

由定义1, $E\{z'^T(0)(I_{N-1} \otimes R)z'(0)\} < (N-1)c_1$, 其中 $z' = [z_1^T \ z_2^T \ \dots \ z_{N-1}^T]^T \in \mathbb{R}^{N-1}$, 经模型转换, 并令 $I_{N-1} \otimes R = (F_1^{-1} \otimes I_n)^T (\tilde{R} \otimes R) (F_1^{-1} \otimes I_n)$, 有

$$\begin{aligned} E\{z'^T(0)(I_{N-1} \otimes R)z'(0)\} &= \\ E\{\tilde{z}'^T(0)(\tilde{R} \otimes R)\tilde{z}'(0)\} &= \\ E\{\xi'^T(0)(\tilde{R} \otimes R)\xi'(0)\} &\leq (N-1)c_1. \end{aligned} \tag{25}$$

结合式(24)–(25)可得

$$\begin{aligned} V(\xi'(0), r) &< \\ \lambda_{\max(I_{N-1} \otimes \tilde{P}_r)}(N-1)c_1 + \tau \lambda_{\max(I_{N-1} \otimes \tilde{Q}_r)}(N-1)c_1, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} E\{V(\xi'(t), r)\} &> \\ \lambda_{\min(I_{N-1} \otimes \tilde{P}_r)} E\{\tilde{z}'^T(t)(\tilde{R} \otimes R)\tilde{z}'(t)\}, \end{aligned} \tag{27}$$

从式(26)–(27)容易得到

$$\begin{aligned} E\{V(\xi'(t), r)\} &< \\ \frac{(N-1)e^{\eta t}}{\lambda_{\min(I_{N-1} \otimes \tilde{P}_r)}\eta} (\lambda_{\max(I_{N-1} \otimes \tilde{P}_r)}\eta c_1 + \\ \tau \lambda_{\max(I_{N-1} \otimes \tilde{Q}_r)}\eta c_1 + \\ \lambda_{\max(U)}\lambda_{\max(F_1^{-T}F_1^{-1} \otimes I_p)}\gamma^2 d(1 - e^{-\eta t})). \end{aligned} \tag{28}$$

由定义1, 系统一致性需满足的条件可以知道 $E\{\tilde{z}'^T(t)(\tilde{R} \otimes R)\tilde{z}'(t)\} \leq (N-1)c_2$, 因此, 如果

$$\begin{aligned} \frac{e^{\eta t}}{\lambda_{\min(I_{N-1} \otimes \tilde{P}_r)}\eta} (\lambda_{\max(I_{N-1} \otimes \tilde{P}_r)}\eta c_1 + \\ \tau \lambda_{\max(I_{N-1} \otimes \tilde{Q}_r)}\eta c_1 + \\ \lambda_{\max(U)}\lambda_{\max(F_1^{-T}F_1^{-1} \otimes I_p)}\gamma^2 d(1 - e^{-\eta t})) < c_2 \end{aligned} \tag{29}$$

成立, 则满足 $\forall t \in [0, T], E\{z_i^T(t)Rz_i(t)\} \leq c_2$, 即网络连接系统(1)是关于 (c_1, c_2, T, R, d) 给定时间可一致化的.

根据

$$\begin{aligned} \lambda_{(I_{N-1} \otimes \tilde{P}_r)^{-1}} &= \lambda_{(\tilde{P}_r^{-1})} = \frac{1}{\lambda_{(\tilde{P}_r)}}, \\ \lambda_{(I_{N-1} \otimes \tilde{Q}_r)^{-1}} &= \lambda_{(\tilde{Q}_r^{-1})} = \frac{1}{\lambda_{(\tilde{Q}_r)}} \end{aligned}$$

则式(29)等价于

$$\begin{aligned} \lambda_{\max(U)}\lambda_{\max(F_1^{-T}F_1^{-1} \otimes I_p)}\gamma^2 d(1 - e^{-\eta t}) + \\ \frac{c_1\eta}{\lambda_{\min \tilde{P}_r^{-1}}} + \frac{\tau c_1\eta}{\lambda_{\min \tilde{Q}_r^{-1}}} < \frac{e^{-\eta t}\eta c_2}{\lambda_{\max \tilde{P}_r^{-1}}}. \end{aligned} \tag{30}$$

令

$$\lambda_{\max(\tilde{P}_r^{-1})} < 1, \lambda_X < \lambda_{\min(\tilde{P}_r^{-1})}, \lambda_Y < \lambda_{\min(\tilde{Q}_r^{-1})}. \tag{31}$$

式(15)–(17)等价于式(30)和式(31)之间.

注3 若只考虑式(14)并令 $\eta = 0$, 则定理1退化为现有文献中的一般状态反馈的一致性控制器存在的充分条件, 即渐近一致性协议存在的充分条件, 定理1的式(14)中 η 存在一方面在给定时间一致性控制器协议的中降低了算法的保守性, 另一方面是放松了系统状态达到一致性要求, 并结合式(15)–(17)来约束系统的不一致状态在给定时间中受限运动.

注4 从定理1中可以发现系统的给定时间一致性不仅与系统的拓扑结构有关, 而且与系统的拉普拉斯矩阵及其对角阵的转换矩阵有关.

4 仿真示例(Examples)

本节将通过一个仿真算例来验证所提有限时间一致性协议的有效性和优越性.

考虑一个有4个子系统的网络动态系统, 其动态模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \begin{bmatrix} -1.1 & -1.2 \\ 1.3 & -1.4 \end{bmatrix} x_i(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} u_i(t) + \\ &\begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.3 \end{bmatrix} w_i(t), \end{aligned}$$

其中外部干扰为

$$\begin{aligned} w(t) &= [w_1(t) \ w_2(t) \ w_3(t) \ w_4(t)]^T = \\ &[2 \sin t \ -\sin t \ 3 \sin t \ -1.5 \sin t]^T. \end{aligned}$$

连接4个动态系统的网络具有随机性, 在两种模态间按照Markov规律随机切换. 相应的邻接矩阵分别为

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

两模态间的跳变概率矩阵为

$$\Pi = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.7 \\ 0.4 & -0.4 \end{bmatrix}.$$

根据邻接矩阵, 可得两种模态的拉普拉斯矩阵 L 为

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

根据拉普拉斯矩阵, 得到对应的对角阵:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

及其转换矩阵:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

且有

$$F_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$F_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

根据定理1中的式(14)–(17)可知, 系统不一致状态的运动界限(c_1, c_2)与Lyapunov函数中的参数 η 的选取以及通信时滞 τ 的取值有密切关系, 假设运动界限(c_1, c_2)为变量, 并对其寻优, 则 c_1 和 c_2 在 η 和 τ 不同取值时的最大值以及最小值如表1所示. 同时, 如果给定 c_1 和 c_2 , 其对最大通信时滞的影响如表2所示.

表 1 η 和 τ 不同取值时 c_1 可取的最大值和 c_2 可取的最小值

Table 1 Minimum upper bounds of c_2 and maximum lower bounds of c_1 for different values of η and τ

η	τ	c_1	c_2
5	1.2	0.0062	3.4332
5	1.3	0.0062	3.4240
5	1.4	0.0061	3.4077
5	1.5	0.0061	3.3906
3	1.5	0.0097	3.2883
3	1.6	0.0097	3.2749
1	1.6	0.0256	3.1284

从表1可见, η 的增加使得下界 c_1 增大且上界 c_2 减小, 而时滞项 τ 的增加则会使下界 c_1 与上界 c_2 同时增大, 且下界 c_1 的增幅远大于上界 c_2 的增幅.

表 2 c_1 和 c_2 不同取值时 τ 可取的最大值

Table 2 Maximum of τ for different values of c_1 and c_2

c_1	c_2	τ
0.1	0.5	4.5211
0.2	0.5	4.5212
0.3	0.5	4.5213
0.3	1.0	4.5213
0.3	2.0	4.5213

从表2中可见, 下界 c_1 取较大值时, 时滞项 τ 可以取较大的最大值, 而上界 c_2 的取值则对 τ 可取的最大值影响不大.

根据定理1给出的条件, 在给定参数初始值 $c_1 = 0.1, c_2 = 0.25, T = 5, d = 2, \gamma = 1, \eta = 1, \tau = 0.1, R = 0.01I$ 时, 得到带通信时滞的一致性控制协议为

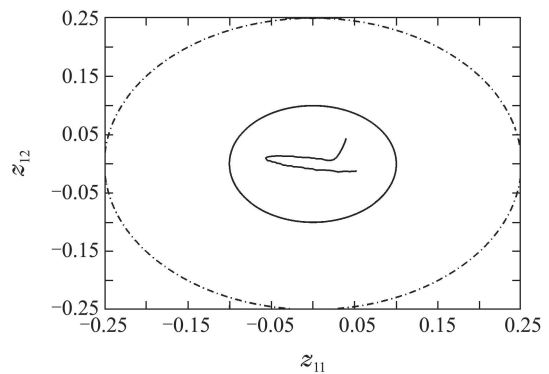
$$K_1 = [0.0002 \ 0.0011], K_2 = [0.0464 \ 0.1830].$$

假设系统的初始状态为

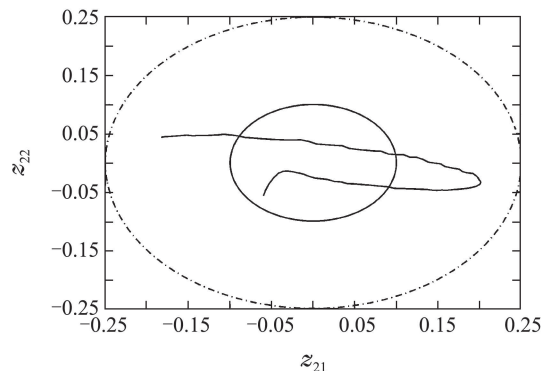
$$x_{10} = [0.3 \ 0.5]^T, x_{20} = [0.2 \ 0.4]^T,$$

$$x_{30} = [0.25 \ 0.45]^T, x_{40} = [0.28 \ 0.47]^T.$$

图1表示了带有噪声约束的时滞Markov跳变网络系统在依赖于模态并具有通信时滞的一致性控制协议下, 其不一致性状态在给定时间内的运动轨迹.



(a) 不一致状态 z_1 轨迹



(b) 不一致状态 z_2 轨迹

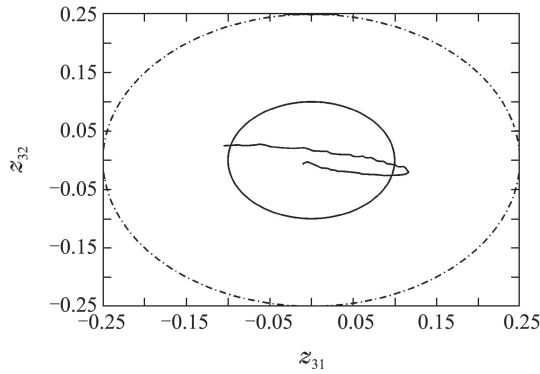
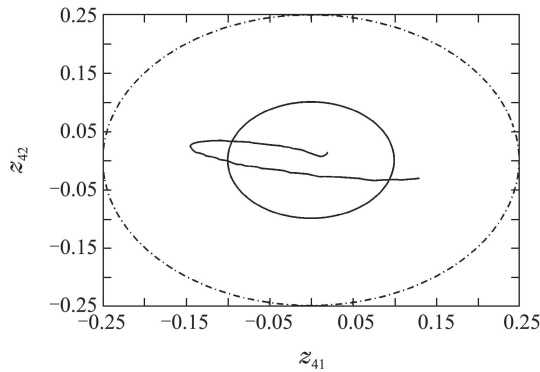
(c) 不一致状态 z_3 轨迹(d) 不一致状态 z_4 轨迹

图1 不一致状态在给定时间内的运动轨迹图

Fig. 1 Disagreement state of the system in given-time interval

5 总结(Conclusions)

本文放宽对网络系统状态在无穷时间区域渐近一致的要求,在通信时滞且网络随机Markov跳变条件下,提出了给定时间一致性协议的设计方案,以确保网络中各系统的不一致状态在期望范围内受限运动.仿真示例不仅验证了所得算法的有效性,且简要分析了主要结果中不一致状态的运动界限与通信时滞等其他参数之间的制约关系.在给定时间一致性控制基础上,未来工作可进一步结合各种性能指标,如抗干扰性、无源性,最优给定时间一致等进行研究.

参考文献(References):

- [1] OLIFATI-SABER R, ALEX F J, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent system [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 215 – 233.
- [2] REN W, BEARD R W, ATKINS E M. Information consensus in multivehicle cooperative control [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2007, 27(2): 71 – 82.
- [3] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [4] LI Z K, DUAN Z S, CHEN G R, et al. Consensus of multi-agent systems and synchronization of complex networks: a unified view-point [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Paper*, 2010, 57(1): 213 – 224.
- [5] LIN P, JIA Y M. Average consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay [J]. *Physica A – Statistical Mechanics and Its Applications*, 2008, 381(1): 303 – 313.
- [6] SU Y F, HUANG J. Stability of a class of linear switching systems with applications to two consensus problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(6): 1420 – 1430.
- [7] DING Z T. Consensus control of a class of Lipschitz nonlinear systems [J]. *International Journal of Control*, 2014, 87(11): 2372 – 2382.
- [8] WU W W, CHEN G R, GAO M. Consensus in directed networks of agents with nonlinear dynamics [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(6): 1436 – 1441.
- [9] TIAN Y P, LIU C L. Robust consensus of multi-agent systems with diverse input delays and asymmetric interconnection perturbations [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1347 – 1353.
- [10] WU C W. Synchronization and convergence of linear dynamics in random directed networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(7): 1207 – 1210.
- [11] OLIFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [12] ZHANG Y, TIAN Y P. Consensus of data-sampled multi-agent systems with random communication delay and packet loss [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 939 – 943.
- [13] YU W W, CHEN G R, CAO M. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems [J]. *Automatica*, 2010, 46(6): 1089 – 1095.
- [14] SUN Y G, WANG L. Consensus of multi-agent systems in directed networks with non-uniform time-varying delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(7): 1607 – 1613.
- [15] AYSAL T C, BARNER K E. Convergence of consensus models with stochastic disturbances [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 57(8): 4101 – 4113.
- [16] DORATO P. Short time stability in linear time-varying systems [C] // *Proceedings of the IRE international Convention Record*. New York: Institute of Radio Engineers, 1961: 83 – 87.
- [17] ZHAO Changzhong, LUAN Xiaoli, LIU Fei. Finite-time H_∞ filtering for Markov jump system based on finite frequency domain [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(3): 406 – 412. (赵长钟, 栾小丽, 刘飞. 基于有限频段的Markov跳变系统有限时间 H_∞ 滤波 [J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(3): 406 – 412.)
- [18] AMATO F, ARIOLA M. Finite-time control of discrete-time linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 724 – 729.
- [19] LUAN X L, SHI P, LIU F. Finite-time stabilization for Markov jump systems with Gaussian transition probabilities [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2013, 7(2): 298 – 304.

作者简介:

闵 睿 (1991–), 女, 硕士研究生, 研究方向为混杂系统的一致性控制, E-mail: yangmin1222@yeah.net;

栾小丽 (1979–), 女, 副教授, 研究方向为复杂系统先进控制及应用, E-mail: xlluan@jiangnan.edu.cn;

刘 飞 (1965–), 男, 教授, 研究方向为先进过程控制理论及应用, E-mail: fliu@jiangnan.edu.cn.