

# 一类非线性对象基于区间观测器的 $L_2$ 增益性能综合

何忠伟, 谢 巍<sup>†</sup>

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

**摘要:** 本文针对一类非线性系统, 首次考虑了基于区间观测器的  $L_2$  增益性能控制器设计问题. 该控制器的设计主要分两个步骤: 首先, 设计了该非线性系统的区间观测器, 使得观测器系统与原系统之间的误差系统为单调系统; 然后, 基于该区间观测器系统设计了观测器状态反馈控制律, 使得相应的闭环系统为渐近稳定且具有  $L_2$  增益性能. 最后, 仿真数例表明了本文所提出方法的有效性.

**关键词:** 区间观测器; 性能;  $L_2$  增益; Metzler 矩阵; 渐近稳定性

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## $L_2$ -gain performance synthesis for a class of nonlinear systems based on interval observer

HE Zhong-wei, XIE Wei<sup>†</sup>

(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

**Abstract:** The problem of  $L_2$ -gain performance controller based on interval observer is considered, for the first time, for a class of nonlinear systems. First, interval observer systems are designed to guarantee that the error dynamic system between the observer system and the original system is monotone. Then, based on the interval observer, the state feedback of interval observer system is designed to ensure the corresponding closed-loop system is asymptotically stable with an  $L_2$ -gain performance. Finally, the efficiency of the proposed approach is illustrated through a numerical example.

**Key words:** interval observer; performance;  $L_2$ -gain; Metzler matrix; asymptotic stability

### 1 引言(Introduction)

自从Thau在文献[1]中开始对非线性系统设计观测器以来, 非线性系统观测器设计及理论应用得到了广泛的关注<sup>[2-4]</sup>. 经过几十年的发展, 研究者们提出了大量有关构造非线性系统观测器的方法. 至今, 针对非线性系统观测器研究的方法主要有: 类李雅普诺夫方法<sup>[5]</sup>、坐标变换法<sup>[6]</sup>、扩展的卡尔曼滤波器<sup>[7]</sup>、自适应观测器<sup>[8]</sup>、区间观测器<sup>[9]</sup>、变结构观测器及反馈线性化技术等等. 最近, 区间观测器方法得到了深入地研究并取得了系列重要的成果<sup>[9-14]</sup>. 文献[9]中对非线性系统成功地设计了一类区间观测器, 且仅须利用测量输出区间内的部分信息及满足Metzler矩阵的观测器增益, 就可保证误差系统的状态为非负的并以上下界的形式对原系统的状态实时跟踪. 而经典的观测器设计要求误差系统为渐近收敛到零, 通常误差系统只是有界而不能完全保证收敛到零. 对于非线性系统的  $L_2$  增益性能问题, 基于Hamilton-Jacobi不等式方法已得到广泛而深入地研究<sup>[15-18]</sup>. 然而, 关于基于观测

器方法来研究非线性系统的控制性能问题还并不多见. 文献[19]基于观测器输出反馈讨论了最小相位非线性系统  $L_2$  增益干扰抑制问题并得到在某些额外限制条件下可解的充分条件, 但在保证问题可解性时限定条件较多.

本文主要的工作是把区间观测器设计方法引入到一类非线性系统的  $L_2$  增益性能研究中. 针对一类非线性系统的非线性向量函数, 假定其在一个依赖于区间观测器状态及测量输出的区间内取值并满足李普希茨条件, 从而测量值可考虑用一个合理的区间来代替单一点的测量值, 该假定的优点是能利用部分测量信息成功设计区间观测器. 结合上述非线性函数的假定, 本文提出的基于区间观测器的非线性系统  $L_2$  增益性能设计方法有如下两个方面的特点: 第一, 该方法要求所设计的观测器增益保证误差动态系统为单调的, 根据单调系统理论, 被观测的系统状态轨线介于区间观测器系统轨线的上界与下界之间, 从而达到任意时刻区间观测器系统与原系统的状态变量具有相同的

动态特性; 第二, 基于区间观测器系统设计了观测器线性状态反馈律, 得到了闭环系统为渐近稳定的且具有 $L_2$ 增益性能的线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)形式下的充分条件.

## 2 预备知识(Preliminaries)

对于任意向量 $x \in \mathbb{R}^n$ , 符号 $\|x\|$ 表示欧氏范数. 对于任意两向量 $x_1, x_2$ 之间的关系 $x_1 \leq x_2 (x_1 \geq x_2)$ 可解读为它们相应的元素之间的大小关系, 比如两实数向量 $x_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} \leq x_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ , 则满足 $a_{11} \leq a_{21}$ 且 $a_{12} \leq a_{22}$ . 对称正定矩阵 $P$ 记为 $P = P^T \succ 0$ . 实数矩阵 $A$ 的最大(最小)特征值记为 $\lambda_{\max}(A) (\lambda_{\min}(A))$ .

为了便于后面的讨论, 先给出如下定义.

**定义 1** 矩阵 $M^{n \times n}$ 称为Metzler矩阵, 如果其所有的非对角线上的元素均为非负的, 即对于Metzler矩阵 $M^{n \times n} = (a_{ij})_{n \times n}$ , 有 $a_{ij} \geq 0 (1 \leq i \neq j \leq n)$ .

根据单调系统理论<sup>[20]</sup>, Metzler矩阵 $M$ 所构造的系统 $\dot{x}(t) = Mx(t) + \phi_+(t)$ ,  $\phi_+(t) \geq 0$ , 其所有的解 $x(t)$ 满足: 当 $t \geq 0$ 时, 均为非负的( $x(t) \geq 0$ ). 本文将考虑如下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) + f(x, y, t), \\ y = Cx(t), \\ z = Dx(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^q$ ,  $z \in \mathbb{R}^l$ 分别为状态向量、干扰输入、控制输入、测量输出及控制输出. 矩阵 $(A, B_1, B_2, C, D)$ 为相容维数的常数矩阵. 非线性向量函数 $f(x, y, t)$ 满足假设1.

**假设 1** 对于任意的 $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ , 存在向量函数 $\underline{f}(\bar{x}, \underline{x}, y)$ ,  $\bar{f}(\bar{x}, \underline{x}, y)$ 满足

$$\underline{f}(\bar{x}, \underline{x}, y) \leq f(x, y, t) \leq \bar{f}(\bar{x}, \underline{x}, y), \forall t \geq 0,$$

并有向量函数 $\underline{f}(\bar{x}, \underline{x}, y)$ ,  $\bar{f}(\bar{x}, \underline{x}, y)$ 满足Lipschitz条件, 即存在常数 $a_k > 0 (k = 1, \dots, 6)$ , 使得

$$\begin{aligned} \|\bar{f}(\bar{x}, \underline{x}, y)\| &\leq a_1 \|\bar{x}\| + a_2 \|\underline{x}\| + a_3 \|y\|, \\ \|\underline{f}(\bar{x}, \underline{x}, y)\| &\leq a_4 \|\bar{x}\| + a_5 \|\underline{x}\| + a_6 \|y\|. \end{aligned}$$

针对上述非线性系统(1), 构造类-Luenberger型区间观测器系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1w + B_2u + L(y - C\hat{x}) + \bar{f}(\bar{x}, \underline{x}, y), \\ \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B_1w + B_2u + L(y - C\underline{x}) + \underline{f}(\bar{x}, \underline{x}, y). \end{cases} \quad (2)$$

根据非线性系统(1)及其观测器系统(2), 以下将给出它们的状态轨线之间的关系.

**引理 1** 假定存在观测器增益矩阵 $L$ 满足矩阵 $A - LC$ 为Metzler矩阵, 假设1及系统的初始条件 $\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$ 均满足, 则非线性系统(1)的解与其相

应的观测器系统(2)的解之间存在如下关系:

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), t \geq 0. \quad (3)$$

**证** 类似于文献[9]中的定理1, 构造误差动态系统并根据单调系统理论, 关系式(3)易得证.

**注 1** 状态变量 $x(t)$ 的有界性跟变量 $\underline{x}(t)$ 及 $\bar{x}(t)$ 的有界性相关, 在这意义下, 区间观测器系统(2)的输入信号 $y(t)$ 可认为依赖状态变量 $\underline{x}(t)$ 及 $\bar{x}(t)$ 的有界外部输入且存在关系 $\|y(t)\| \leq \|C\| \{\|\underline{x}(t)\| + \|\bar{x}(t)\|\}$ .

针对上述区间观测器系统(2), 定义新的变量 $\xi(t) = [\bar{x}^T(t) \underline{x}^T(t)]^T$ , 并设计如下观测器线性状态反馈控制律:

$$u = \underline{K}\bar{x} + \bar{K}\underline{x} = [\underline{K} \bar{K}] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \underline{x} \end{bmatrix} = K\xi, \quad (4)$$

其中观测器状态反馈控制增益 $\underline{K}$ 及 $\bar{K}$ 为将要设计的. 结合上述控制律(4), 区间观测器系统(2)可改写为

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} A - LC + B_2\underline{K} & B_2\bar{K} \\ B_2\underline{K} & A - LC + B_2\bar{K} \end{bmatrix} \xi + \\ &\begin{bmatrix} B_1w \\ B_1w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ly \\ Ly \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{f}(\bar{x}, \underline{x}, y) \\ \underline{f}(\bar{x}, \underline{x}, y) \end{bmatrix} = \\ &\tilde{M}\xi + \Upsilon + \Xi + F(\xi, y), \end{aligned} \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= M + \Delta K, \\ M &= \begin{bmatrix} A - LC & 0 \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_2 \end{bmatrix}, \\ K &= [\underline{K} \bar{K}], \Upsilon = \begin{bmatrix} B_1w \\ B_1w \end{bmatrix}, \\ \Xi &= \begin{bmatrix} Ly \\ Ly \end{bmatrix}, F(\xi, y) = \begin{bmatrix} \bar{f}(\bar{x}, \underline{x}, y) \\ \underline{f}(\bar{x}, \underline{x}, y) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**定义 2** 对于控制系统, 如果存在正常数 $\lambda > 0$ 及有干扰输入 $w$ 和控制输出 $z$ 满足

$$\sup_{w \neq 0, \|w\|_2 < \infty} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \lambda, \quad (6)$$

则控制系统称为具有 $L_2$ 增益性能指标值 $\lambda$ . 其中 $\|z\|_2 = (\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt)^{\frac{1}{2}}$ 为信号 $z$ 的 $L_2$ 范数.

## 3 主要结果(Main results)

本文将针对非线性系统设计区间观测器, 并借助于Lyapunov函数分析方法来研究基于区间观测器控制系统的 $L_2$ 增益性能, 下面的定理给出了本文的主要结果:

**定理 1** 对于非线性系统(1)满足条件 $2B_1^T B_1 \leq I$ , 如果存在观测器增益 $L$ 满足矩阵 $A - LC$ 为Metzler矩阵, 对称正定矩阵 $P = P^T \succ 0$ , 常数 $\lambda > 0$ 及衰减率 $\gamma > 0$ , 并设计观测器状态反馈控制律(4), 使得

$$\begin{bmatrix} \Omega & P & 2\sqrt{2}\Lambda & 2\Psi \\ P^T & -(\lambda^{-2} + 2)I & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2}\Lambda^T & 0 & -I & 0 \\ 2\Psi^T & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

则闭环系统(1)–(2)(4)为渐近稳定的且具有  $L_2$  增益性能指标值  $\lambda$ . 其中:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} LC \\ LC \end{bmatrix}, \quad \Psi = [D \ D]^T, \\ \kappa &= 2\{(\max_{k=1,2} a_k + a_3 \|C\|)^2 + (\max_{l=4,5} a_l + a_6 \|C\|)^2\}, \\ \Omega &= M^T P + PM + K^T \Delta^T P + P \Delta K + \gamma P + \kappa I. \end{aligned}$$

证 由上述非线性系统的状态变量  $x(t)$  与观测器状态变量  $\xi(t)$  构造新的变量  $\eta(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$ , 从而由非线性系统(1)、区间观测器系统(2)及观测器状态反馈控制律(4)所构成的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_2 K \\ 0 & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 w \\ \Upsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ F \end{bmatrix}, \\ z(t) = [D \ 0] \eta(t). \end{cases} \quad (8)$$

其中符号  $\tilde{M}$ ,  $\Upsilon$  及  $\Xi$  为上述式(5)中所定义的变量. 对于区间观测器系统(5), 选取如下 Lyapunov 函数:

$$V(\xi(t)) = \xi^T(t) P \xi(t). \quad (9)$$

由 Schur 补引理, 矩阵不等式(7)可改写为

$$M^T P + PM + K^T \Delta^T P + P \Delta K + \gamma P + \kappa I + \lambda^{-2} P^2 + 2P^2 + 8\Lambda \Lambda^T + 4\Psi \Psi^T < 0. \quad (10)$$

另外, 由条件  $2B_1^T B_1 \leq I$ , 并结合

$$\begin{aligned} \Upsilon^T \Upsilon &= \begin{bmatrix} w^T B_1^T & w^T B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 w \\ B_1 w \end{bmatrix} = \\ &w^T B_1^T B_1 w + w^T B_1^T B_1 w, \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} \lambda \Upsilon^T (\lambda^{-1} P \xi) + \lambda^{-1} \xi^T P (\lambda \Upsilon) &\leq \\ \lambda^2 \Upsilon^T \Upsilon + \xi^T \lambda^{-2} P P \xi &\leq \\ \lambda^2 w^T w + \lambda^{-2} \xi^T P P \xi. &\quad (11) \end{aligned}$$

由变量  $\xi(t)$  的定义及  $\|y(t)\| \leq 2\|C\| \|\xi(t)\|$ , 易知

$$z^T z \leq 4\xi^T \Psi \Psi^T \xi, \quad \Xi^T \Xi \leq 8\xi^T \Lambda \Lambda^T \xi. \quad (12)$$

根据不等式(10), 并结合式(11)–(12), 对 Lyapunov 函数(9)沿观测器系统(5)的状态轨线进行求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= \\ \dot{\xi}^T(t) P \xi(t) + \xi^T(t) P \dot{\xi}(t) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xi^T \{M^T P + PM + K^T \Delta^T P + P \Delta K\} \xi + \\ &(\Upsilon + \Xi + F)^T P \xi + \xi^T P (\Upsilon + \Xi + F) \leq \\ &\xi^T \{M^T P + PM + K^T \Delta^T P + P \Delta K\} \xi + \lambda^2 \Upsilon^T \Upsilon + \\ &\lambda^{-2} \xi^T P P \xi + \xi^T \kappa I \xi + \xi^T P P \xi + \Xi^T \Xi + \xi^T P P \xi \leq \\ &\xi^T \{M^T P + PM + K^T \Delta^T P + P \Delta K + \lambda^{-2} P^2 + \\ &2P^2 + \kappa I\} \xi + \lambda^2 w^T w + 8\xi^T \Lambda \Lambda^T \xi + z^T z - z^T z \leq \\ &\xi^T \{M^T P + PM + K^T \Delta^T P + P \Delta K + \lambda^{-2} P^2 + \\ &2P^2 + \kappa I + 8\Lambda \Lambda^T + 4\Psi \Psi^T\} \xi + \lambda^2 w^T w - z^T z < \\ &\xi^T (-\gamma P) \xi - (z^T z - \lambda^2 w^T w). \quad (13) \end{aligned}$$

首先, 考虑闭环系统的渐近稳定性. 当  $w = 0$ , 根据式(13)知  $\dot{V}(\xi(t)) < \xi^T (-\gamma P) \xi < 0$ , 结合 Lyapunov 函数  $V(\xi(t)) > 0$ , 知区间观测器系统(5)为渐近稳定的, 从而有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = 0. \quad (14)$$

由引理 1, 并结合变量  $\xi(t)$  的定义及式(14)可知  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , 从而由变量  $\eta(t)$  的定义同样可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \eta(t) = 0. \quad (15)$$

因此, 当  $w = 0$  时, 闭环系统(1)–(2)(4)或闭环系统(8)为渐近稳定的. 其次, 考虑闭环系统(1)–(2)(4)的  $L_2$  增益性能. 根据 Lyapunov 逆定理<sup>[21]</sup>及上述  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , 存在  $P_1^T = P_1 \succ 0$ , 使得其对应的 Lyapunov 函数满足  $V(x(t)) = x^T(t) P_1 x(t) > 0$  且  $\dot{V}(x(t)) < 0$ . 同时,

由  $P_1$  及  $P$  构造主对角线矩阵  $P_\eta = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$ , 根据代数学知识有对称正定矩阵  $P_\eta^T = P_\eta \succ 0$  且满足  $V(t, \eta(t)) = \eta^T(t) P_\eta \eta(t) > 0$ ,  $\dot{V}(t, \eta(t)) < 0$  及

$$\dot{V}(\eta(t)) = \dot{V}(x(t)) + \dot{V}(\xi(t)). \quad (16)$$

为了证明闭环系统的  $L_2$  增益性能指标, 考虑

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty [z^T(t) z(t) - \lambda^2 w(t) w(t) + \dot{V}(\eta(t))] dt = \\ &\int_0^\infty [z^T(t) z(t) - \lambda^2 w(t) w(t)] dt + \\ &V(\eta(+\infty)) - V(\eta(0)). \quad (17) \end{aligned}$$

由系统的初始条件及上述闭环系统的渐近稳定性,  $V(\eta(0)) = 0$ ,  $0 < V(\eta(+\infty)) < +\infty$ . 如果  $J < 0$ , 则  $\|z(t)\|_2 < \lambda \|w(t)\|_2$ .

对于闭环系统(8), 结合式(13)(16)及式(17), 有

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty [z^T(t) z(t) - \lambda^2 w(t) w(t) + \dot{V}(\eta(t))] dt = \\ &\int_0^\infty [z^T(t) z(t) - \lambda^2 w(t) w(t) + \dot{V}(\xi(t)) + \\ &\dot{V}(x(t))] dt \leq \\ &\int_0^\infty [z^T(t) z(t) - \lambda^2 w(t) w(t) + \dot{V}(\xi(t))] dt \leq \\ &-\gamma \int_0^\infty V(\xi(t)) dt < 0. \quad (18) \end{aligned}$$

式(18)表明  $\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt \leq \lambda^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt$ , 从而由定义2, 闭环系统(1)-(2)(4)关于区间观测器状态线性反馈控制  $u(t) = K\bar{x}(t) + \bar{K}\underline{x}(t)$  为渐近稳定的且具有  $L_2$  增益性能指标值  $\lambda$ .

**注2** 定理1中的矩阵不等式(7)为非线性的矩阵不等式, 因其中出现矩阵变量之间的乘积. 为了解决此问题, 对矩阵不等式(7)左乘  $\text{diag}\{X^T, I, I, I\}$  及右边乘  $\text{diag}\{X, I, I, I\}$ , 矩阵不等式(7)可改写为

$$\begin{bmatrix} \Pi & I & 2\sqrt{2}X^T\Lambda & 2X^T\Psi \\ I & -(\lambda^{-2}+2)I & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2}\Lambda^T X & 0 & -I & 0 \\ 2\Psi^T X & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{19}$$

其中:

$$\begin{aligned} \Pi &= X^T M^T + M X + W^T \Delta^T + \Delta W + \gamma X + \kappa I, \\ X &= P^{-1}, K = W P. \end{aligned}$$

**注3** 文献[9-10], 在其区间观测器的设计过程中均为预先给定满足矩阵  $A - LC$  为 Metzler 矩阵的观测器增益  $L$ , 显然这样增加了区间观测器设计的保守性. 为了解决此问题, 将针对三阶系统以线性矩阵不等式的形式给出 Metzler 矩阵的等价性条件并在仿真部分比较了该区间观测器设计的保守性更小, 同时也给出了满足 Metzler 矩阵的观测器增益矩阵  $L$  的存在性条件.

对于三阶系统, 其中  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ ,  $C = [c_1 \ c_2 \ c_3]$  及  $L = [l_1 \ l_2 \ l_3]^T$ . 矩阵  $A - LC$  为 Metzler 矩阵的等价条件为

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} l_2 c_1 - a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & l_3 c_2 - a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & l_1 c_3 - a_{13} \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} -a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L [c_1 \ 0 \ 0] + \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L [0 \ c_2 \ 0] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} L [0 \ 0 \ c_3] \leq 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$X = \begin{bmatrix} 17.7350 & 7.8079 & 6.4276 & -10.3850 & -2.0113 & -4.8119 \\ 7.8079 & 9.2915 & 2.8538 & -1.9270 & -2.2338 & -1.5842 \\ 6.4276 & 2.8538 & 10.2172 & -4.7517 & -1.4740 & -9.4919 \\ -10.3850 & -1.9270 & -4.7517 & 17.8852 & 8.0835 & 6.5854 \\ -2.0113 & -2.2338 & -1.4740 & 8.0835 & 9.5987 & 2.8541 \\ -4.8119 & -1.5842 & -9.4919 & 6.5854 & 2.8541 & 10.1163 \end{bmatrix}.$$

由  $X = P^{-1}$ , 对于定理1, 存在对称正定矩阵

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} l_3 c_1 - a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & l_1 c_2 - a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & l_2 c_3 - a_{23} \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} -a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L [c_1 \ 0 \ 0] + \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L [0 \ c_2 \ 0] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} L [0 \ 0 \ c_3] \leq 0. \end{aligned} \tag{21}$$

### 4 仿真数例(Numerical examples)

A) 考虑非线性系统(1),

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -7 & 7 & -1 \\ -0.5 & -20 & 1 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ C &= D = [-1 \ 1 \ 0.5], f = \begin{bmatrix} 0.5x_2 + \sin(0.8y) \\ -0.6x_1 \\ 0.8x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由假设1, 存在向量函数  $\underline{f}, \bar{f}$  满足

$$\begin{aligned} &[0.5\underline{x}_2 + \sin(0.8y) \ -0.6\underline{x}_1 \ 0.8\underline{x}_3]^T = \\ &\underline{f} \leq f \leq \bar{f} = \\ &[0.5\bar{x}_2 + \sin(0.8y) \ -0.6\bar{x}_1 \ 0.8\bar{x}_3]^T, \end{aligned}$$

且其满足如下Lipshitz条件:

$$\begin{aligned} \|\bar{f}\| &\leq 0.6 \|\underline{x}_1\| + 0.5 \|\bar{x}_2\| + 0.8 \|\bar{x}_3\| + 0.8 \|y\|; \\ \|\underline{f}\| &\leq 0.6 \|\bar{x}_1\| + 0.5 \|\underline{x}_2\| + 0.8 \|\underline{x}_3\| + 0.8 \|y\|. \end{aligned}$$

从而知  $\kappa = 16$ , 当衰减率  $\gamma = 2$  时, 由控制工具箱<sup>[22]</sup>, 求解线性矩阵不等式(19)-(21), 可得观测器增益  $L = [-2.3332 \ 0.6118 \ 6.9915]^T$ , 使得

$$A - LC = \begin{bmatrix} -9.3332 & 9.3332 & 0.1666 \\ 0.1118 & -20.6118 & 0.6941 \\ 9.9915 & 0.0085 & -8.4958 \end{bmatrix}$$

为 Metzler 矩阵; 同时有

$$W = [18.2977 \ -1.4283 \ -22.0814 \\ 13.5196 \ 4.6915 \ -12.7120],$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.3436 & -0.2001 & -0.4648 & 0.2909 & -0.1575 & -0.4489 \\ -0.2001 & 0.2729 & 0.0467 & -0.1617 & 0.1487 & 0.0547 \\ -0.4648 & 0.0467 & 1.8498 & -0.4609 & 0.0480 & 1.8084 \\ 0.2909 & -0.1617 & -0.4609 & 0.3591 & -0.2023 & -0.4961 \\ -0.1575 & 0.1487 & 0.0480 & -0.2023 & 0.2689 & 0.0492 \\ -0.4489 & 0.0547 & 1.8084 & -0.4961 & 0.0492 & 1.8997 \end{bmatrix}.$$

状态反馈控制律

$$K = WP = [25.7374 \quad -7.2646 \quad -78.4113 \quad 25.9433 \quad -6.2524 \quad -78.8482].$$

当干扰输入信号为  $w(t) = \begin{cases} 1, & 0.2 \leq t \leq 0.8, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

及系统初始条件为  $x(0) = [1 \ 0.5 \ 0.5]^T$  时, 仿真结果如图1所示. 图1表明当存在干扰输入时系统的状态轨线(实线)位于上界及下界区间观测器系统(虚线)之间并在任意时刻以区间的形式跟踪到原状态: 当定理1的条件均满足时, 非线性系统(1)及观测器系统为渐近稳定的, 且  $L_2$  增益性能指标值为  $\lambda = 0.1122$ ; 同样, 通过解线性矩阵不等式(19)可求解(如表1所示).

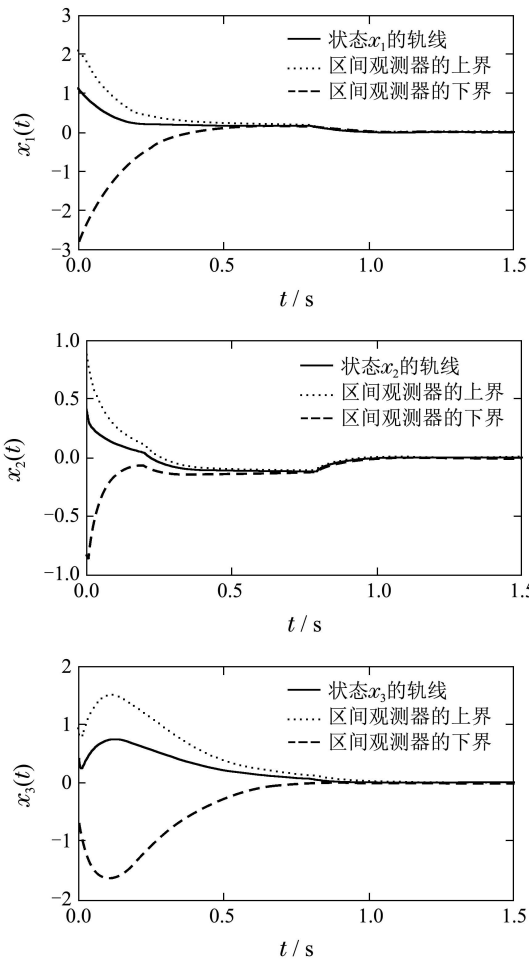


图 1 非线性系统与区间观测器系统的状态轨线  
Fig. 1 State trajectories of nonlinear and interval observer systems

表 1  $L_2$  增益性能指标值

Table 1  $L_2$ -gain performance values

计算增益 $L$ 的方法	满足 A-LC 为 Metzler 矩阵的 $L$	性能指标
文献[9]的方法给定 $L$	$L = [-3; 2; 5]$	0.1908
	$L = [-5; 2; 8]$	0.2427
	$L = [-3; 2; 4]$	0.2045
	$L = [-2; 1; 3]$	0.2246
本文注3的LMI求 $L$	$L = [-2.3332; 0.6118; 6.9915]$	0.1122

**注 4** 对比表1中的性能指标值可知, 文献[9]中给定  $L$  为满足 A-LC 为 Metzler 矩阵的方法得到的性能指标为 0.1908~0.2427, 而本论文注3提出的方法得到的性能指标为 0.1122, 从而该区间观测器设计的保守性更小.

**B)** 考虑文献[23]中出现的双灌系统(two-tank system), 并选取一个子系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} \sin(0.2x_2) \\ -0.1x_1 \end{bmatrix},$$

$$y(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

其中: 状态变量  $x(t)$  为水库水位,  $y(t)$  为测量输出. 由控制工具箱<sup>[22]</sup>求解式(19), 知  $\kappa = 0.16$ ,  $\gamma = 1$  时, 有观测器增益  $L = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1 \end{bmatrix}$  使得矩阵  $A - LC = \begin{bmatrix} -1 & 0.4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  为 Metzler 矩阵; 对于非线性项, 存在两向量函数满足  $\begin{bmatrix} \sin(0.2x_2) \\ -0.1\bar{x}_1 \end{bmatrix} \leq f \leq \begin{bmatrix} \sin(0.2x_2) \\ -0.1\underline{x}_1 \end{bmatrix}$ , 正定矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0.6377 & 0.7721 & 0.4485 & 0.9417 \\ 0.7721 & 2.4061 & 0.6773 & 2.3503 \\ 0.4485 & 0.6773 & 0.5593 & 0.5926 \\ 0.9417 & 2.3503 & 0.5926 & 3.0775 \end{bmatrix}$$

及控制器  $K = [-3.8265 \quad -7.0441 \quad -3.5473 \quad -7.0419]$  满足定理1中的所有条件, 当外部干扰输

入信号为  $w(t) = \begin{cases} 2, & 1.5 \leq t \leq 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  及系统的初始

条件为  $x(0) = [0.5 \ 0.5]^T$  时, 仿真结果如图2所示. 图2表明当存在干扰时, 非线性系统(1)及其观测器系统为渐近稳定的且区间观测器系统轨线在任意时刻跟踪到原状态轨线. 此时, 系统的  $L_2$  增益性能指标值为  $\lambda = 0.4658$ .

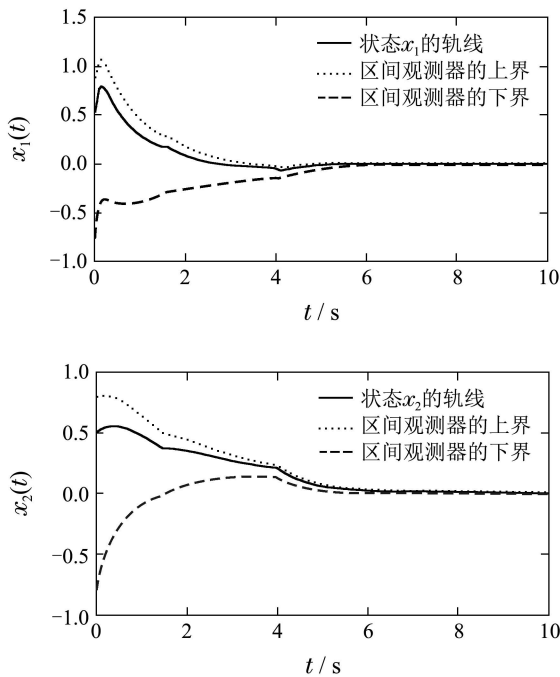


图2 双灌系统与区间观测器系统的状态轨线  
Fig. 2 State trajectories of two-tank and interval observer systems

## 5 结论(Conclusions)

本文基于区间观测器设计方法, 考虑了一类非线性系统的  $L_2$  增益性能控制器设计问题, 得到了保证闭环系统为渐近稳定的且具有  $L_2$  增益性能的线性矩阵不等式的条件, 为非线性系统的  $L_2$  增益性能控制问题研究提供了一种新的研究方法. 在未来的工作中将考虑减少所提的LMI条件的保守性.

## 参考文献(References):

- [1] THAU F E. Observing the state of nonlinear dynamic systems [J]. *International Journal of Control*, 1973, 17(3): 471 – 478.
- [2] RAJAMANI R. Observers for nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 1988, 43(3): 397 – 401.
- [3] PERTEW A M, MARQUEZ H J, ZHAO Q. Observer design for Lipschitz nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 2006, 51(7): 1211 – 1216.
- [4] FARZA M, M' SAAD M, FALL M L, et al. Continuous-discrete time observers for a class of MIMO nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 2014, 59(4): 1060 – 1065.
- [5] KOU S R, ELLIOTT D L, TARN T J. Exponential observers for nonlinear dynamic systems [J]. *Information and Control*, 1975, 29(3): 393 – 428.
- [6] BESTLE D, ZEITZ M. Canonical form observer design for nonlinear time variable systems [J]. *International Journal of Control*, 1983, 38(2): 419 – 431.
- [7] SORENSON H W. *Kalman Filtering. Theory and Application* [M]. New York: IEEE, 1985.
- [8] BASTIN G, GEVERS M R. Stable adaptive observers for nonlinear time varying systems [J]. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 1988, 33(7): 650 – 657.
- [9] EFIMOV D, RAISSI T, ZOLGHADRI A. Control of nonlinear and LPV systems: Interval observer-based framework [J]. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 2013, 58(3): 773 – 782.
- [10] RAISSI T, EFIMOV D, ZOLGHADRI A. Interval state estimation for a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 2012, 57(1): 260 – 265.
- [11] EFIMOV D, PERRUQUETTI W, RAISSI T, et al. Interval observers for time-varying discrete-time systems [J]. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 2013, 58(12): 3218 – 3224.
- [12] EFIMOV D, RAISSI T, CHEBOTAREV S, et al. Interval state observer for nonlinear time varying systems [J]. *Automatica*, 2013, 49(1): 200 – 205.
- [13] MAZENC F, DINH T N, NICULESCU S I. Robust interval observers and stabilization design for discrete-time systems with input and output [J]. *Automatica*, 2013, 49(11): 3490 – 3497.
- [14] MAZENC F, DINH T N. Construction of interval observers for continuous-time systems with discrete measurements [J]. *Automatica*, 2014, 50(10): 2555 – 2560.
- [15] VANDER SCHAFT A J.  $L_2$ -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H-infinite control [J]. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 1992, 37(6): 770 – 784.
- [16] VANDER SCHAFT A J.  *$L_2$ -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control* [M]. London: Springer, 2000.
- [17] HELTON J W, JAMES M R. *Extending H-infinite Control to Nonlinear Systems* [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1999.
- [18] ZHAO J, DAVID J HILL. On stability,  $L_2$ -gain and H-infinite control for switched systems [J]. *Automatica*, 2008, 44(5): 1220 – 1232.
- [19] JIANG Z P. Global output feedback control with disturbance attenuation for minimum-phase nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39(3): 155 – 164.
- [20] SMITH H L. *Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems, Volume 41 of Surveys and Monographs* [M]. Providence, RI: AMS, 1995.
- [21] JACQUES J, SLOTINE E, LI W P. *Applied Nonlinear Control* [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- [22] GAHINET G, NEMIROVSKI A, LAUB A J, et al. *LMI Control Toolbox for Use with MATLAB* [M]. Natick, MA, USA: The MathWorks Inc, 1995.
- [23] BLANCHINI F, MIANI S, MESQUINE F. A separation principle for linear switching systems and parametrization of all stabilizing controllers [J]. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 2009, 54(2): 279 – 292.

## 作者简介:

何忠伟 (1983-), 男, 博士研究生, 目前研究方向主要为区间观测器设计、鲁棒控制理论、LPV系统控制, E-mail: zhweihe@126.com;

谢巍 (1974-), 男, 教授, 目前研究方向主要为机器视觉、图像处理、鲁棒控制、传感器网络等, E-mail: weixie@scut.edu.cn.