

高斯渐进贝叶斯滤波器

周穗华, 张宏欣[†], 冯士民

(海军工程大学 兵器工程系, 湖北 武汉 430033)

摘要: 渐进贝叶斯方法将先验分布到后验分布的演化描述为一阶动态系统, 通过在伪时间上连续地引入观测信息实现后验状态估计. 该方法的一般形式解, 即动态系统的时间导数, 是难以得到的. 本文提出一种高斯型渐进贝叶斯滤波器. 首先在线性高斯条件下推导了时间导数的解析解; 然后证明了在该条件下, 由该解析解确定的一阶动态系统与常量状态估计的Kalman-Bucy滤波器是一致的, 且由此导出的高斯渐进贝叶斯滤波器与卡尔曼滤波器是一致的. 最后利用一阶Taylor展开推导了滤波器在非线性的近似解表达式, 并采用Monte Carlo方法给出了具体实现方法. 通过若干仿真算例表明, 新滤波器具有较高的精度, 且在一定精度条件下的时间复杂度低于一般粒子滤波器.

关键词: 非线性滤波; 渐进贝叶斯; 卡尔曼滤波器; 一阶动态系统; Monte Carlo方法

中图分类号: TP202 **文献标识码:** A

Gaussian progressive Bayesian filter

ZHOU Sui-hua, ZHANG Hong-xin[†], FENG Shi-min

(Department of Weaponry Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei 430033, China)

Abstract: Progressive Bayesian methods formulate the evolution from prior distribution to posterior distribution as a first order dynamic system, by incorporating the measurements in a continuous pseudo-time manner, to perform posterior state estimation. The general solution of time derivative of this dynamic system is usually nontrivial. A novel Gaussian type progressive Bayesian filter is proposed in this paper. First, the solution to this time-derivative is derived under linear Gaussian condition. Then, it is proved that the first order dynamic system determined by the derived solution is consistent with a Kalman-Bucy filter for constant state estimation, and the resultant Gaussian progressive Bayesian filter is consistent with Kalman filter. Thirdly, the filter is extended to the nonlinear case and an approximate solution is derived by using first order Taylor expansion. The corresponding Monte Carlo method for implementing the proposed filter for nonlinear problem is given. Simulation results demonstrate higher accuracy provided by the new filter, with lower time complexity than the particle filter at given accuracy.

Key words: nonlinear filtering; progressive Bayesian; Kalman filter; first order dynamic system; Monte Carlo method

1 引言(Introduction)

渐进贝叶斯(progressive Bayesian)是早在2003年就已提出的一种非线性滤波框架^[1], 其主要思想是引入一个渐进参数 λ , 即伪时间变量, 根据贝叶斯法则构建系统状态的同伦(Homotopy)函数, 使其在 $\lambda = 0$ 时为先验概率密度; $\lambda = 1$ 时为后验概率密度或联合概率密度. 通过施加特定的约束条件, 导出在 λ 从0到1连续变化时, 亦即系统状态从先验分布到后验分布变化时, 同伦函数的时变参数矢量 $\boldsymbol{\eta}$ 所满足的一阶常微分方程

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\lambda} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}, \lambda), \quad (1)$$

若求得(伪)时间导数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}, \lambda)$, 则可利用数值方法解得 $\lambda = 1$ 时的 $\boldsymbol{\eta}$, 进而求解出后验状态统计量. 因此, 如何求解 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}, \lambda)$ 是渐进贝叶斯方法研究的核心内容. 在这方面, 近年来形成了以研究者Hanebeck和Daum分别提出的两类方法, Hanebeck等采用混合高斯和/或Dirac函数^[2-4]等模型将同伦函数进行参数化, 此时 $\boldsymbol{\eta}$ 即为参数集, 再以最小均方差积分为约束条件, 导出参数集满足的一阶常微分方程, 即式(1). 该方法是一种可行的渐进贝叶斯方法, 但其缺点是仅能在标量观测模型条件下导出 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}, \lambda)$, 且其形式比较复杂, 较难实用. Steinbring等^[5]基于Hanebeck框架, 利用混合Dirac模型和高斯型似然函数导出了一个相对简洁

收稿日期: 2015-03-20; 录用日期: 2015-05-21.

[†]通信作者. E-mail: mylifeforthebattle@hotmail.com.

国防预研基金项目(51401020503)资助.

Supported by National Defense Pre-research Foundation (51401020503).

的算法,但仍只能处理标量观测问题.

与Hanebeck方法不同, Daum等^[6-8]首先将 $\boldsymbol{\eta}$ 直接视为系统状态,并将同伦函数归一化为概率密度函数,根据其所满足的Fokker-Planck方程(FPE)得到关于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}, \lambda)$ 的偏微分方程进行求解,由于直接处理系统状态,且引入了FPE, Daum提出的滤波框架具有简洁的形式和明确的物理意义,且本文将证明,该滤波框架能够得到线性高斯条件下的贝叶斯最优解,但根据笔者掌握的文献来看,尚未有一种可行且通用的基于Daum框架的非线性滤波算法, Daum在文献[7]中虽然给出了 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}, \lambda)$ 的一个Monte-Carlo(MC)近似解,但其求解过于复杂,并不适合滤波处理,并已被证明是在数值上是不稳定的^[9].

本文在假设系统噪声满足高斯分布的基础上,推导出一种新的高斯型渐进贝叶斯滤波器(Gaussian progressive Bayesian filter, GPBF). 首先基于Daum滤波框架,在线性高斯条件下推导了 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}, \lambda)$ 的解析解,证明了式(1)与Kalman-Bucy滤波解具有一致的形式;此时GPBF与卡尔曼滤波器是等价的. 进一步地,对非线性高斯系统,利用一阶Taylor展开导出了 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}, \lambda)$ 的一个近似解表达式,并基于MC方法给出了GPBF滤波器的粒子实现. 通过若干仿真算例将GPBF与粒子滤波器^[10](particle filter, PF)和典型的非线性高斯型滤波器^[11-13]性能进行分析比较,并给出了相应结论.

2 问题陈述(Problem formulation)

考虑如下非线性系统模型:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_k &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \boldsymbol{w}_{k-1}, \\ \boldsymbol{y}_k &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k, \end{aligned}$$

其中: $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^d$ 为 k 时刻的 d 维状态向量, $\boldsymbol{y}_k \in \mathbb{R}^m$ 为 m 维观测向量; 函数 $\boldsymbol{a}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{h}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\boldsymbol{w}_k \in \mathbb{R}^d$ 为 k 时刻状态噪声向量, $\boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^m$ 为观测噪声向量,且 $\boldsymbol{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q})$, $\boldsymbol{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{R})$, \boldsymbol{Q} 为过程噪声协方差矩阵, \boldsymbol{R} 为观测噪声协方差矩阵, 噪声向量各分量为独立同分布(i.i.d).

根据贝叶斯法则, k 时刻状态后验概率密度函数可表示为

$$p(\boldsymbol{x}_k | \boldsymbol{Y}^k) = \frac{p(\boldsymbol{y}_k | \boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k | \boldsymbol{Y}^{k-1})}{p(\boldsymbol{y}_k | \boldsymbol{Y}^{k-1})}, \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{Y}^k = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k\}$ 为 k 时刻的历史观测值序列. $p(\boldsymbol{y}_k | \boldsymbol{Y}^{k-1}) = \int_{\mathbb{R}^d} p(\boldsymbol{y}_k | \boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k | \boldsymbol{Y}^{k-1})d\boldsymbol{x}$ 为

与状态无关的归一化常数. 设变量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, 记 $h(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{y}_k | \boldsymbol{x}_k)$, $g(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}_k | \boldsymbol{Y}^{k-1})$, 由式(2)构造如下的同伦函数:

$$q(\boldsymbol{x}, \lambda) = \frac{g(\boldsymbol{x})h^\lambda(\boldsymbol{x})}{K(\lambda)}, \quad (3)$$

其中变量 $\lambda \in [0, 1]$, $K(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\boldsymbol{x})h^\lambda(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ 为与 \boldsymbol{x} 无关的归一化项. 设 λ 从0到1连续的变化, 同伦函数 $q(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 定义了从先验分布($\lambda = 0$)到后验分布($\lambda = 1$)的变化过程中的概率分布. 将这过程中状态 \boldsymbol{x} 的变化描述为如下的微分方程:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\lambda} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda). \quad (4)$$

状态向量 \boldsymbol{x} 可视为 \mathbb{R}^d 标准基下某点的坐标, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 则可看做 λ 时该点的速度, 假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 在样本空间处处有定义, 则它表示样本从先验分布到后验分布“流动”的速度场. 此即Daum方法的物理意义.

由式(4)可知, $q(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 满足零扩散项(diffusion term)的Fokker-Planck方程:

$$\frac{\partial q(\boldsymbol{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = -\nabla \cdot (q(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda)), \quad (5)$$

其中 $\nabla \cdot (\cdot)$ 为散度算子. 对式(3)取自然对数并求关于 λ 的偏导, 结合式(5)可得

$$\begin{aligned} (\log h(\boldsymbol{x}) - \mathbb{E}[\log h(\boldsymbol{x})])q(\boldsymbol{x}, \lambda) = \\ -\nabla \cdot (q(\boldsymbol{x}, \lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda)). \end{aligned} \quad (6)$$

上式利用了 $\frac{\partial \log K(\lambda)}{\partial \lambda} = \mathbb{E}[\log h(\boldsymbol{x})]$. 根据该式, 文献[8]给出了非线性条件下 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 的MC积分近似解:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda) \approx \frac{1}{Nq(\boldsymbol{x}, \lambda)} \sum_{i=1}^N \Phi(\boldsymbol{x}_i, \lambda) \frac{c(2-d)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)^T}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i\|}. \quad (7)$$

其中: $\boldsymbol{x}_i \sim q(\boldsymbol{x}, \lambda)$, $i = 1, 2, \dots, N$, N 为样本数, c 为调节系数. 式(7)的问题在于: a) $q(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 求值需要采用分布拟合算法, 难于在线求解. b) 仅适用于问题维数 > 2 情况. c) 已经证明^[9]该式在数值上是不稳定的.

如何根据偏微分方程(6)导出适于一般滤波问题求解的 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda)$, 并以合理的计算复杂度实现是本文所要研究的问题.

3 线性高斯条件下 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 的解(The linear Gaussian solution of $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda)$)

3.1 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 的线性高斯解推导(Derivation of linear Gaussian solution of $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda)$)

对于线性系统, 假设先验概率密度 $g(\boldsymbol{x})$ 满足高斯分布; 似然函数 $h(\boldsymbol{x})$ 为高斯型, 即

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\boldsymbol{P}_{k|k-1}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^T \cdot \right. \\ &\quad \left. \boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1}(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\boldsymbol{R}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^T \cdot \right. \\ &\quad \left. \boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})\right), \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ 为先验均值, $\boldsymbol{P}_{k|k-1}$ 为先验协方差矩阵,

\mathbf{H} 为观测矩阵. 将式(8)和(9)代入式(3), 根据文献[14]中52–53页的推导可知同伦函数 $q(\mathbf{x}, \lambda)$ 亦为高斯分布, 即

$$q(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{((2\pi)^d |\mathbf{P}_{k|k}^\lambda|)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \epsilon_{k|k}^\top (\mathbf{P}_{k|k}^\lambda)^{-1} \epsilon_{k|k}\right). \quad (10)$$

其中 $\epsilon_{k|k} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$. 注意到 $q(\mathbf{x}, \lambda)$ 实际上是 λ 条件下的 \mathbf{x} 的后验概率密度, 即

$$q(\mathbf{x}, \lambda) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}^k, \lambda),$$

则

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda &= \mathbb{E}[\mathbf{x} | \lambda, \mathbf{Y}^k], \\ \mathbf{P}_{k|k}^\lambda &= \mathbb{E}[\epsilon_{k|k}^\lambda (\epsilon_{k|k}^\lambda)^\top | \lambda, \mathbf{Y}^k] \end{aligned}$$

分别为 λ 条件下的后验均值及协方差矩阵, 其中 $\epsilon_{k|k}^\lambda = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda$.

在线性高斯条件下, 设粒子流速度场 $f(\mathbf{x}, \lambda)$ 具有如下形式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} + \mathbf{b}(\lambda), \quad (11)$$

其中: $\mathbf{A}(\lambda) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathbf{b}(\lambda) \in \mathbb{R}^d$. 记 $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$, 注意到式(6)右端的形式, 则将其重写为

$$\begin{aligned} \log(h(\mathbf{x})) - \mathbb{E}[\log(h(\mathbf{x}))] &= \\ -\nabla \cdot \mathbf{f} - (\nabla \log(q(\mathbf{x}, \lambda)))^\top \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (12)$$

将式(9)–(10)和(12)代入式(6)可得:

$$\begin{aligned} (\epsilon_{k|k}^\lambda)^\top (\mathbf{P}_{k|k}^\lambda)^{-1} \mathbf{f} - \text{tr}(\mathbf{A}(\lambda)) &= \\ (\epsilon_{k|k}^\lambda)^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k - \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{x} + \\ \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k}^\lambda) + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda)^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda. \end{aligned} \quad (13)$$

上式中利用了 $\mathbb{E}[\mathbf{s}^\top \mathbf{M} \mathbf{s}] = \text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{P}_{ss}) + \mathbf{s}^\top \mathbf{M} \mathbf{s}$, 其中: \mathbf{s} 为任意实向量, \mathbf{M} 为相应维度的任意实矩阵, \mathbf{P}_{ss} 为 \mathbf{s} 的协方差矩阵. 对式(13)两边乘以 $\epsilon_{k|k}^\lambda$, 取期望 $\mathbb{E}[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | \lambda, \mathbf{Y}^k]$, 利用如下关系

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\epsilon_{k|k}^\lambda (\epsilon_{k|k}^\lambda)^\top (\mathbf{P}_{k|k}^\lambda)^{-1} \mathbf{A}(\lambda) \mathbf{x}] &= \mathbf{A}(\lambda) \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda, \\ \mathbb{E}[\epsilon_{k|k}^\lambda (\epsilon_{k|k}^\lambda)^\top] \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k - \frac{1}{2} \mathbb{E}[\epsilon_{k|k}^\lambda \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{x}] &= \\ \mathbf{P}_{k|k}^\lambda \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k - \frac{1}{2} \mathbb{E}[\mathbf{x} \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{x}] + \\ \frac{1}{2} \mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{x}] &= \\ \mathbf{P}_{k|k}^\lambda \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda), \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{f}) &= \mathbf{A}(\lambda) \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda + \mathbf{b}(\lambda) = \\ \mathbf{P}_{k|k}^\lambda \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda). \end{aligned} \quad (14)$$

根据式(14)右端的形式, 可设

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\lambda) &= -\alpha \mathbf{P}_{k|k}^\lambda \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}, \\ \mathbf{b}(\lambda) &= -(1 - \alpha) \mathbf{P}_{k|k}^\lambda \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda + \\ &\quad \mathbf{P}_{k|k}^\lambda \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k, \end{aligned} \quad (15)$$

将式(15)–(16)代入式(13), 可以得到如下关系:

$$\begin{aligned} (\epsilon_{k|k}^\lambda)^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k - \alpha \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{x} + \\ (2\alpha - 1) \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda + \alpha \text{tr}(\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k}^\lambda) + \\ (1 - \alpha) (\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda)^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda = \\ (\epsilon_{k|k}^\lambda)^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k - \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{x} + \\ \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k}^\lambda) + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda)^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda. \end{aligned} \quad (17)$$

显然 $\alpha = \frac{1}{2}$, 由式(15)–(16)可得 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 在线性高斯条件下的表达式为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{P}_{k|k}^\lambda \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \frac{\mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda}{2}). \quad (18)$$

由于需要在(0, 1]区间内每个 λ 的离散化值上进行求解, 式(18)在 $\Delta\lambda$ 取较小值时会导致计算量过大. 为此可利用如下关系:

$$\mathbf{P}_{k|k}^\lambda \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top (\lambda \mathbf{H}^\top \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H} + \mathbf{R})^{-1}, \quad (19)$$

则 $\mathbf{A}(\lambda)$ 可仅由先验协方差矩阵表示如下:

$$\mathbf{A}(\lambda) = -\frac{1}{2} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top (\lambda \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H}. \quad (20)$$

根据 $\mathbf{P}_{k|k}^\lambda$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda$ 定义, 并利用式(20), λ 条件下状态的后验均值及协方差矩阵可表示为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + (\lambda \mathbf{I} + 2\lambda^2 \mathbf{A}(\lambda)) \cdot \\ &\quad \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^\lambda = \mathbf{P}_{k|k-1} + 2\lambda \mathbf{A}(\lambda) \mathbf{P}_{k|k-1}. \quad (22)$$

将式(21)–(22)代入(16), $\mathbf{b}(\lambda)$ 可仅以先验信息表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\lambda) &= (\mathbf{I} + 2\lambda \mathbf{A}(\lambda)) [(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{A}(\lambda)) \cdot \\ &\quad \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k + \mathbf{A}(\lambda) \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]. \end{aligned} \quad (23)$$

至此, 式(11) (20)和(23)给出了 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 在线性高斯条件下的以先验信息表达的解析解.

3.2 与Kalman-Bucy滤波器解的一致性(Consistency with Kalman-Bucy filter)

考虑如下的连续时间线性随机系统:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_t}{dt} &= \mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, \end{aligned} \quad (24)$$

其中: \mathbf{x}_t 为连续时间状态向量, \mathbf{F}_t 为漂移项, \mathbf{H}_t 为观测矩阵, $\mathbf{w}_t, \mathbf{v}_t$ 分别为满足零均值的高斯过程的状态噪声和观测噪声, 且 $E[\mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^T] = \mathbf{Q}_t$, $E[\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^T] = \mathbf{R}_t$, 且 \mathbf{Q}_t 和 \mathbf{R}_t 均为对角矩阵.

对于式(24)描述的系统, Kalman-Bucy滤波器^[15]以一阶线性系统形式给出了最小均方无偏估计解 $\hat{\mathbf{x}}_t$ 及其协方差矩阵 \mathbf{P}_t , 即

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{x}}_t}{dt} = \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_t), \\ \frac{d\mathbf{P}_t}{dt} = \mathbf{F}_t \mathbf{P}_t + \mathbf{P}_t \mathbf{F}_t^T - \mathbf{K}_t \mathbf{R}_t \mathbf{K}_t + \mathbf{Q}_t, \\ \mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t \mathbf{H}_t \mathbf{R}_t^{-1}. \end{cases} \quad (25)$$

对于GPBF, 根据 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}^\lambda$ 的定义可知, 两者均为 k 时刻 $(0, 1]$ 区间上 λ 的连续函数, 因此略去离散时刻下标, 记: $\hat{\mathbf{x}}_\lambda = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^\lambda$, $\mathbf{P}_\lambda = \mathbf{P}_{k|k}^\lambda$, $\mathbf{K}_\lambda = \mathbf{P}_\lambda \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}$. 为求 \mathbf{P}_λ 关于 λ 的导数, 利用式(22), 可得

$$\frac{d\mathbf{P}_\lambda}{d\lambda} = 2\lambda \frac{d\mathbf{A}(\lambda)}{d\lambda} \mathbf{P}_{k|k-1} + 2\mathbf{A}(\lambda) \mathbf{P}_{k|k-1}, \quad (26)$$

其中: $\frac{d\mathbf{A}(\lambda)}{d\lambda}$ 可由定义求得, 即

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}(\lambda)}{d\lambda} &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{A}(\lambda)}{\Delta\lambda} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (27)$$

其中: $\mathbf{N} = \lambda \mathbf{M} + \mathbf{R}$, $\mathbf{M} = \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T$.

上式推导中利用了

$$(\mathbf{Z} + \epsilon \mathbf{X})^{-1} = \mathbf{Z}^{-1} - \epsilon \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{Z}^{-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

其中 ϵ 为一任意小的正数. 将式(27)代入式(26), 化简得

$$\frac{d\mathbf{P}_\lambda}{d\lambda} = -\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}.$$

利用式(19)得到 \mathbf{P}_λ 关于 λ 的导数; 另对式(18)取关于 \mathbf{x} 的期望. 可得到下列表达式:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{x}}_\lambda}{d\lambda} = \mathbf{K}_\lambda (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_\lambda), \\ \frac{d\mathbf{P}_\lambda}{d\lambda} = -\mathbf{K}_\lambda \mathbf{R} \mathbf{K}_\lambda^T, \\ \mathbf{K}_\lambda = \mathbf{P}_\lambda \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}. \end{cases} \quad (28)$$

综上, 由式(25)和式(28)可知线性高斯条件下, 在 λ 连续变化过程中, 对于 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 决定的一阶线性系统, 其均值和协方差矩阵与零过程噪声的常数状态系统的Kalman-Bucy滤波器解是一致的. 这个结论说明, 式(18)给出了线性系统状态空间中满足高斯分布的样本从先验分布到后验分布的一种变化形式, 即在任意 λ 时间上均满足给定 λ 条件下的后验分布.

3.3 与卡尔曼滤波器的一致性(Consistency with Kalman filter)

利用 λ 条件下状态后验均值和协方差矩阵. 在式

(21)–(22)中令 $\lambda = 1$, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k}^{\lambda=1} &= \\ \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{M} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} &= \\ (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k|k-1}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{M} + \mathbf{R})^{-1}, \quad (30)$$

即为Joseph型卡尔曼增益表达式. 则有

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\lambda=1} &= \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) &= \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{k|k}^{\lambda=1} \mathbf{H}^T \mathbf{R} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) &= \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}). \end{aligned} \quad (31)$$

上式利用了

$$\mathbf{P}_{k|k}^{\lambda=1} \mathbf{H}^T \mathbf{R} = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{M} + \mathbf{R})^{-1}.$$

再一次地, $\mathbf{M} = \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T$. 该式的推导过程可见文献 [15].

由于GPBF对状态的估计值在 $\lambda = 1$ 时得到, 因此, 从式(29)–(31)可知, GPBF 与卡尔曼滤波器(KF)是一致的.

4 GPBF的非线性扩展(Nonlinear extension of GPBF)

根据线性高斯条件下解的形式, 假设非线性条件下速度场的解具有如下形式:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\lambda), \quad (32)$$

其中: $\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为非线性观测方程, $\mathbf{B}(\lambda) \in \mathbb{R}^{d \times m}$, $\mathbf{u}(\lambda) \in \mathbb{R}^d$ 均为与 \mathbf{x} 无关的项. 将 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ 在状态预测值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 附近做一阶泰勒展开, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \Delta \mathbf{x}) \approx \\ \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \Delta \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (33)$$

其中: $\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$, $\Delta \mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{P}_{k|k-1})$.

$$\mathbf{J}_{k|k-1} = \left(\frac{\partial^T \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$$

为 \mathbf{h} 在点 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 处的Jacobian矩阵. 将式(32)和式(33)代入式(12), 利用第3节中线性高斯解的推导过程可得

$$\begin{aligned} E[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)] &= \mathbf{P}_{k|k}^\lambda \mathbf{J}_{k|k-1}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})), \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) &= \mathbf{P}_{k|k}^\lambda \mathbf{J}_{k|k-1}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \\ &\quad \frac{\mathbf{J}_{k|k-1} \Delta \mathbf{x}}{2}). \end{aligned} \quad (34)$$

为将式(34)表示为统计量形式, 利用式(19), 并注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{J}_{k|k-1}^T &= E[\Delta \mathbf{x} (\mathbf{J}_{k|k-1} \Delta \mathbf{x})^T | \mathbf{Y}^{k-1}] = \\ E[\Delta \mathbf{x} (\Delta \mathbf{h})^T | \mathbf{Y}^{k-1}], \end{aligned} \quad (35)$$

其中再次利用了式(33), $\Delta \mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}$, $\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}$

$= E[\mathbf{h}(\mathbf{x}) | \mathbf{Y}^{k-1}]$. 类似地, 注意到

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T = E[\Delta \mathbf{h} \Delta \mathbf{h}^T | \mathbf{Y}^{k-1}]. \quad (36)$$

将式(36)和(35)代入式(20)和式(23), 并记

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{yy} = E[\Delta \mathbf{h} \Delta \mathbf{h}^T | \mathbf{Y}^{k-1}], \quad (37)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{xy} = E[\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{h}^T | \mathbf{Y}^{k-1}], \quad (38)$$

可得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\lambda) &= -\frac{1}{2} \mathbf{P}_{k|k-1}^{yy} \mathbf{C}(\lambda), \\ \mathbf{u}(\lambda) &= \frac{\mathbf{U}(\lambda)}{2} \mathbf{y}_k + \frac{\mathbf{V}(\lambda)}{2} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}, \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$$\mathbf{U}(\lambda) = \lambda^2 \mathbf{S}(\lambda) \mathbf{P}_{k|k-1}^{yy} + 2 \mathbf{P}_{k|k-1}^{xy} + 6 \lambda \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{P}_{k|k-1}^{xy},$$

$$\mathbf{V}(\lambda) = 2 \mathbf{B}(\lambda) + \lambda \mathbf{S}(\lambda),$$

$$\mathbf{S}(\lambda) = \mathbf{P}_{k|k-1}^{xy} \mathbf{C}(\lambda) \mathbf{P}_{k|k-1}^{yy} \mathbf{C}(\lambda),$$

$$\mathbf{C}(\lambda) = (\lambda \mathbf{P}_{k|k-1}^{yy} + \mathbf{R})^{-1}.$$

至此, 式(32)和式(39)给出了 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 在非线性高斯条件下的解.

通过第3节和本节的推导结果(式(20) (23) (32) (39))可知, $\mathbf{A}(\lambda)$, $\mathbf{b}(\lambda)$ 和 $\mathbf{B}(\lambda)$, $\mathbf{u}(\lambda)$ 均与系统状态和观测值无关. 在线性/非线性条件下, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 都是当前观测信息 (\mathbf{y}_k) 与先验估计值 ($\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, $\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}$) 的线性加权. 因此, 线性/非线性 GPBF 本质上仍是一种线性估计器, 这与线性/非线性 KF 是一致的, 但其通过 λ 参数矩阵渐进的引入当前观测信息, 这是与卡尔曼滤波最重要的区别.

5 算法实现(Algorithm implementation)

GPBF 的算法实现主要分为状态和误差矩阵的时间更新 (time update) 以及观测更新 (measurement update) 两个部分, 其中时间更新是状态和误差矩阵依据状态方程在时间上的传播. 若能求得上一时刻观测更新后的误差矩阵, 可采用任一非线性滤波器的时间更新步骤实现; 状态的观测更新则是利用前述给出的 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 表达式, 在 $\lambda \in (0, 1]$ 区间内进行数值积分求解. 而误差矩阵的观测更新仅在线性高斯条件下是易于处理的, 因为 $\lambda = 1$ 时的状态误差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k}^{\lambda=1}$ 可直接解析地获得(由式(29)给出). 但对于非线性情况, 虽然已经得到了 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$, 但导出 $\mathbf{P}_{k|k}^{\lambda=1}$ 的近似计算公式仍是困难的.

一种方法是采用非线性卡尔曼滤波的观测更新式, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{W}_k \mathbf{P}_{k|k-1}^{yy} \mathbf{W}_k^T, \\ \mathbf{W}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1}^{xy} (\mathbf{P}_{k|k-1}^{yy})^{-1}. \end{aligned} \quad (40)$$

若要直接利用式(40)进行误差矩阵的测量更新, 则须

满足以下条件

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k}^{\lambda=1}, \quad (41)$$

该式表示 $\mathbf{P}_{k|k}$ 是状态 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{\lambda=1}$ 的一致误差矩阵. 这一点在线性条件下是成立的(见第3.3小节). 而在非线性条件下尚未证明, 因此式(41)是缺乏理论依据的.

实际上, 通过 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 的定义以及所得 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 的几种表达式的形式, 可以得到一个比较有意义的结果: $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 实际上是对高斯系统状态空间的每个随机样本进行渐进的观测更新, 最终 ($\lambda = 1$ 时) 得到满足后验(高斯)分布的随机样本, 这使得 GPBF 非常适合采用 MC 方法, 即若干随机样本(粒子)进行实现. 此外, 由于能够直接采用粒子进行传播, 因而避免了时间更新和观测更新过程对于 $\mathbf{P}_{k|k}^{\lambda=1}$ 在计算形式上的依赖. 此时, 求解 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 所需的相关统计量可近似为

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{yy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{h}^{(i)} (\Delta \mathbf{h}^{(i)})^T, \quad (42)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{x}^{(i)} (\Delta \mathbf{h}^{(i)})^T, \quad (43)$$

其中:

$$\Delta \mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},$$

$$\Delta \mathbf{h}^{(i)} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)}) - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1},$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)}), \quad (44)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)}, \quad (45)$$

N 为粒子个数, $\mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)}$ 为第 i 个时间更新后的粒子. 由式(42)–(45)以及当前观测值, 结合非线性 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ 表达式, 对每个粒子可得到关于 k 时刻状态的一阶线性系统. 通过步长为 $\Delta \lambda$ 的数值积分求解, 首先对该系统进行 Euler 离散化

$$\mathbf{x}_{k|k}^{(n+1)\Delta\lambda, (i)} = \mathbf{x}_{k|k}^{n\Delta\lambda, (i)} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k|k}^{n\Delta\lambda, (i)}, n\Delta\lambda) \cdot \Delta\lambda, \quad (46)$$

其中: $n = 1, 2, \dots, M-1$, $M = 1/\Delta\lambda$, 初值 $\mathbf{x}_{k|k}^{0, (i)}$ $= \mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)}$, 可得 $\lambda = 1$ 时的粒子 $\mathbf{x}_{k|k}^{\lambda=1, (i)}$ 为

$$\mathbf{x}_{k|k}^{\lambda=1, (i)} \approx \mathbf{x}_{k|k}^{(i)} + \sum_{n=1}^{M-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k|k}^{n\Delta\lambda, (i)}, n\Delta\lambda) \cdot \Delta\lambda,$$

则 k 时刻的状态估计值为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_{k|k}^{\lambda=1, (i)}.$$

注 虽然采用 MC 方法的 GPBF 需要对每一个粒子进行步长为 $\Delta \lambda$ 的数值积分, 但在应用中该方法只需取少量粒子 (50~100) 即可得到较好的效果, 在相同精度下远小于 PF 算法所需的粒子个数. $\Delta \lambda$ 的取值一般为 0.02~0.3 即可, 过小的步长通常对精度的提升没有显著作用, 而且会大幅增加时间复杂度. 除了不需要显式 (explicitly) 计算 $\mathbf{P}_{k|k}^{\lambda=1}$ 外, 粒子传

播的另一优势是能够保留一定的高阶矩特性,适于处理较为复杂的非线性模型^[16].

6 仿真结果及分析(Simulation results & analysis)

为验证前述结论的合理性以及GPBF的有效性,本节给出3个仿真算例,即连续Wiener过程加速度(CWPA)模型、多维非稳定增长(MNG)模型以及只测角跟踪(BOT)模型进行仿真,算例1为连续线性Wiener过程加速度(CWPA)模型,用于检验GPBF与KF在数值上和理论证明的一致性;算例2为可变维度的非稳定增长(MNGM)模型,用于对比GPBF和PF在问题维数规模变化时的性能.算例3为一个三维空间目标跟踪模型,用于考察GPBF的滤波精度,并同时给出几种非线性高斯滤波器作参考.如无特别说明,仿真中GPBF的粒子数量均为100个, $\Delta\lambda = 0.1$.此外,出于直观考虑,仿真算例中均采用如下定义的均方根误差(RMSE):

$$\text{RMSE} := \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \text{tr}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T]},$$

其中: \mathbf{x}_k 为 k 时刻目标实际状态, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 为目标状态估计值, T 为观测值序列长度.

6.1 连续Wiener过程加速模型(Continuous-time Wiener process accelerate model)

CWPA模型为目标加速度受随机扰动的连续时间运动模型,以随机微分方程描述如下:

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{x}_t + \mathbf{L}\mathbf{w}_t, \quad (47)$$

其中: t 时间目标状态向量为 $\mathbf{x}_t = (x_t, y_t, \dot{x}_t, \dot{y}_t, \ddot{x}_t, \ddot{y}_t)^T$, x_t, y_t 为目标的平面位置坐标,常数矩阵 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 4} \end{pmatrix}$, $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, \mathbf{w}_t 为功率谱密度为 $\mathbf{Q}_c = 0.1\mathbf{I}_{2 \times 2}$ 的二维白高斯过程噪声.为适用滤波算法,对式(47)进行离散化,离散化模型为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}_{k-1},$$

其中: \mathbf{x}_k 为 k 时刻目标状态, $k=1, 2, \dots, T$. $\mathbf{q}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{6 \times 1}, \mathbf{Q})$, 状态转移矩阵 $\mathbf{A} = \exp(\mathbf{F}\Delta t)$, 噪声协方差矩阵

$$\mathbf{Q} = \int_0^{\Delta t} \exp(\mathbf{F}(\Delta t - \tau))\mathbf{L}\mathbf{Q}_c\mathbf{L}^T \exp(\mathbf{F}(\Delta t - \tau))^T d\tau,$$

Δt 为离散化步长.以平面位置坐标作为观测量,观测方程为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k,$$

其中观测矩阵 $\mathbf{H} = (\mathbf{I}_{2 \times 2} \mathbf{0}_{2 \times 4})$.

设 $\Delta t = 0.1\text{s}$, $T = 80$.滤波器初始分布为 $\mathcal{N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{P}_{0|0})$, 初始状态 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_{6 \times 1}$, 初始误差矩阵 $\mathbf{P}_{0|0} =$

$\text{diag}\{0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.5, 0.5\}$.高斯观测噪声 $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{2 \times 1}, 0.014\mathbf{I}_{2 \times 2})$.图1给出了采用KF与GPBF进行100次MC计算得到RMSE对比.表1给出了100次MC计算所得RMSE的均值和标准差.综合图1和表1来看,可知在线性高斯条件下,GPBF与KF的估计误差是基本相同的,且随着粒子数增加和步长的减小越来越接近.这与第3.3小节中证明的结论是一致的.

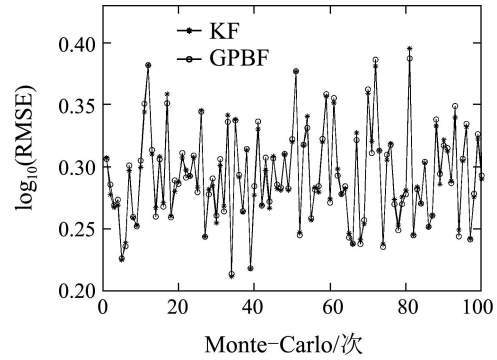


图1 GPBF与KF对比:100次MC仿真RMSE结果

Fig. 1 Comparison of GPBF with Kalman filter: RMSEs of 100 Monte Carlo runs

表1 GPBF与KF的RMSE均值及标准差对比

Table 1 Comparison of GPBF with Kalman filter: mean and variance of RMSEs

GPBF执行参数	100次RMSE均值		100次RMSE标准差	
	KF	GPBF	KF	GPBF
$N=100, \Delta\lambda=0.1$	0.296	0.297	0.041	0.044
$N=500, \Delta\lambda=0.02$	0.2926	0.2924	0.038	0.037
$N=1000, \Delta\lambda=0.01$	0.288263	0.288265	0.0391	0.0390

6.2 多维非稳定增长模型(Multivariable non-stationary growth model)

MNG模型是非线性滤波中一个基准测试问题—单变量非稳定增长模型的多维扩展^[17],是不含采样时间的离散模型,其状态空间模型为

$$\mathbf{x}_k = \phi\mathbf{x}_{k-1} + \beta \frac{\sum_{i=1}^d \mathbf{x}_{k-1,i}}{1 + (\sum_{i=1}^d \mathbf{x}_{k-1,i})^2} + \gamma \cos(1.2(k-1))\mathbf{I}_{d \times 1} + \mathbf{w}_{k-1},$$

$$\mathbf{y}_{k,j} = \begin{cases} \frac{\mathbf{x}_{k,2j-1}^2 + \mathbf{x}_{k,2j}^2}{20} + \mathbf{v}_{k,j}, & d \text{ 为非0偶数,} \\ \frac{\mathbf{x}_k^2}{20} + \mathbf{v}_k, & d = 1, \end{cases}$$

其中: d 为状态维数, $\mathbf{x}_{k,i}$ 为 \mathbf{x}_k 的第 i 个分量,类似表示的意义相同.模型参数为: $\phi = 0.5$, $\beta = 25$, $\gamma = 8$;仿真设置为:时刻 $k = 1, 2, \dots, T$, $T = 150$;过程噪声 $\mathbf{w}_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, 10^2\mathbf{I}_{d \times d})$,观测噪声 $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0,$

$1^2 \mathbf{I}_{\frac{d}{2} \times \frac{d}{2}}), v_k \sim \mathcal{N}(0, 1^2)$. 状态初值 $x_0 = 0.1$. 滤波器初始分布为 $\mathcal{N}(x_0, P_{0|0})$, 初始误差矩阵 $P_{0|0} = 0.1$. 仿真中PF采用的粒子数为10000.

图2给出了 $d = 10$ 条件下GPBF和PF进行100次MC仿真计算得到的RMSE, 可知GPBF在100次MC仿真中均表现出了明显优于PF的性能; 且误差波动较小, 性能稳定. 图3给出在状态维数 $d = 1$ 以及 $d = 2, 4, 6, \dots, 20$ 的条件下, GPBF和PF算法经100次MC仿真所得RMSE的误差条曲线(errorbar), 由图可知, 在本例的模型维数 d 超过4时, GPBF的RMSE开始小于PF, 且随 d 增大时性能显著优于PF, 这个结果是合理的. 根据式(46)可知, GPBF是以反馈形式在数值积分过程中逐步地改变粒子分布, 仅用较少粒子即可获得理想的结果. 而PF在高维情况下的权值容易出现退化^[18](degeneracy), 使得重采样变得低效. 此外, 从图中还可以看到, GPBF在100次MC计算中的RMSE方差亦小于PF, 这表明本例中GPBF的稳定性要好于PF.

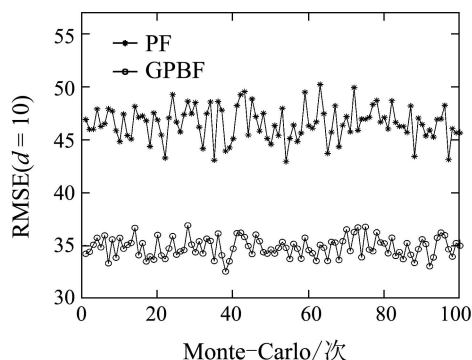


图2 状态维度 $d = 10$ 时100次MC仿真的RMSE结果

Fig. 2 RMSEs of 100 Monte Carlo runs at $d = 10$

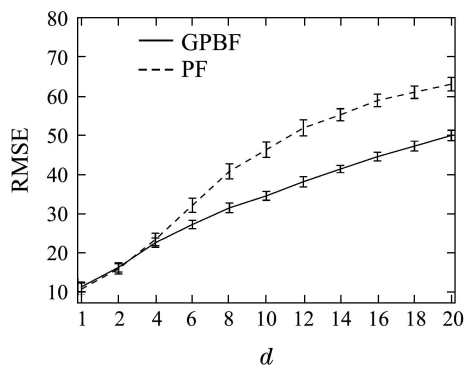


图3 状态维度增长时RMSE的均值和标准差

Fig. 3 Mean and standard deviation of RMSEs with state dimension increment

6.3 空间目标跟踪模型(3-dimensional target tracking model)

本算例为一个低速飞行器跟踪问题模型, 目标状态为 $\mathbf{x}_t = [\boldsymbol{\rho}_k^T, \boldsymbol{\zeta}_k^T]^T$, $\boldsymbol{\rho}$ 为目标的空问直角坐标系位置矢量, $\boldsymbol{\zeta}$ 为速度矢量. 假设目标高度 h_k 能被实时测量.

观测矢量为 $\mathbf{y}_k = [b_k, r_k, h_k, s_k]^T$, b_k 为观测点 $(0, 0)^T$ 到目标的方位角, r_k 为观测点到目标的距离, s_k 为距离变化率. 相应的测量模型为

$$\begin{aligned} b_k &= \arctan\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_{k,2}}{\boldsymbol{\rho}_{k,1}}\right) + \mathbf{v}_{k,1}, \\ r_k &= \sqrt{\boldsymbol{\rho}_{k,1} + \boldsymbol{\rho}_{k,2} + \boldsymbol{\rho}_{k,3}} + \mathbf{v}_{k,2}, \\ h_k &= \boldsymbol{\rho}_{k,3} + \mathbf{v}_{k,3}, \\ s_k &= \frac{\boldsymbol{\rho}_k \boldsymbol{\zeta}_k^T}{r_k} + \mathbf{v}_{k,4}, \end{aligned}$$

其中 \mathbf{v}_k 为观测噪声矢量, 且 $\mathbf{v}_{k,1} \sim \mathcal{N}(0, (\frac{\pi}{9})^2)$, $\mathbf{v}_{2,3,4} \sim \mathcal{N}(0, 0.1^2)$. 目标运动状态方程为

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \Delta t \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix}.$$

过程噪声 $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{6 \times 1}, \mathbf{Q})$, 观测采样间隔 $\Delta t = 1$, 此时过程噪声协方差矩阵

$$\mathbf{Q} = 10 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix}.$$

目标初始状态 $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 50, 5, 5, 0.1]$, 状态初始分布为 $p_{0|0}(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_{0|0})$, 其中 $\hat{\mathbf{x}}_0 = [2, 2, 50, 6, 6, 0]$, $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{I}_{6 \times 6}$. 观测点数 $T = 100$.

以上设置在速度分量上引入了较大的过程噪声, 增加了目标运动状态的随机性; 此外, 角度观测的误差较大, 而其余的距离等观测值则比较精确, 加上观测模型的强非线性, 会使得多维空间中状态后验概率分布呈现极不规则的形状, 增大了高斯假设型滤波器(包括GPBF)和一般PF算法的处理难度.

用于对比的非线性滤波器为无迹卡尔曼滤波器(unsented KF, UKF), 求容积卡尔曼滤波器(cubature KF, CKF), PF, 以及集合卡尔曼滤波器(ensemble KF, EnKF). EnKF一般较少用于目标跟踪^[19-20], 但因其对卡尔曼滤波中相关协方差矩阵的近似方法与GPBF是一致的, 因此有必要将其与GPBF进行对比. 仿真中EnKF的粒子数设置为1000.

图4给出了根据以上几种滤波器¹的100次MC仿真RMSE值得到的误差分布曲线. 图中 $p(\text{RMSE})$ 为RMSE的概率分布密度. 由于各个滤波器均不同程度在若干次MC仿真中表现出大估计误差, 因而在误差分布上产生了长拖尾, 但比较来看, GPBF的RMSE集中分布在 $0 \sim 100$ 的范围内, 且最小RMSE的出现概率最大, 说明GPBF在大多数仿真中都给出了最小的RMSE. 进一步从表2中给出的各个滤波器RMSE均值和标准差可知, GPBF误差均值和波动均为最小. 可见GPBF具有较高的精度和稳定性. 此外可以看到PF在本例中性能最差, 可推断此时PF粒子权值已经严重退

¹由于PF算法误差过大, 为直观起见不在图中给出, 仅在表2中给出其RMSE均值和方差.

化而导致滤波发散; UKF和CKF则由于较大的过程噪声和强非线性观测模型使得求高斯积分的误差增大. EnKF虽然与GPBF一样采用粒子近似协方差矩阵,但本质上和UKF及CKF的处理过程是相似的. 因此在本例中的性能仍劣于GPBF.

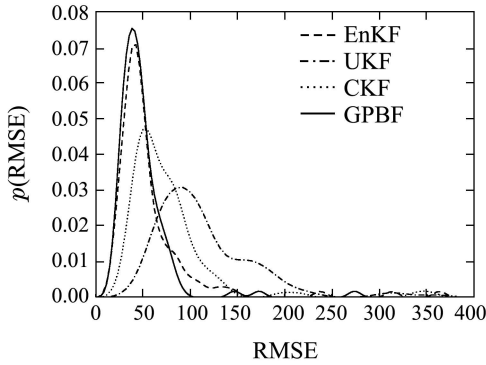


图4 各滤波器100次MC仿真RMSE的误差分布曲线
Fig. 4 RMSE distribution from 100 Monte Carlo runs

表2 各个滤波器的RMSE均值及方差
Table 2 Mean and variance of RMSE

滤波器	100次MC仿真RMSE均值	标准差
UKF	84.70	83.30
CKF	54.93	49.38
EnKF($N = 1000$)	46.73	50.76
PF($N = 10000$)	198.57	152.59
GPBF	36.98	31.65

6.4 算法执行时间(Time consumption of implementation)

为进一步评估GPBF的性能,采用前述算例将不同条件下GPBF和PF以及EnKF的执行时间和进行对比.

表3, 4分别给出了对算例2和算例3, GPBF与PF的执行时间和相应RMSE. 可知给定粒子数下GPBF耗时均高于PF和EnKF,且在 $\Delta\lambda$ 较小时的计算代价较高,但两者的增加/减小对性能提升并不关键,GPBF仅用100个粒子就可达到与PF使用10000个粒子时相当的误差水平;在算例3中的EnKF采用2000个粒子时²误差仍大于GPBF. 可见从算法应用角度看,GPBF的效率应优于PF和EnKF.

表3 算例2平均执行时间及RMSE均值

Table 3 Average running time and mean RMSE of case 2

滤波器(执行参数)	执行时间/s	RMSE均值
GPBF($N = 100, \Delta\lambda = 0.1$)	0.11	22.73
PF($N = 100$)	0.097	30.16
PF($N = 10000$)	3.52	22.82
GPBF($N = 500, \Delta\lambda = 0.005$)	2.42	22.02

²粒子数 > 2000 时EnKF易出现病态矩阵导致发散.

表4 算例3平均执行时间及RMSE均值

Table 4 Average running time and mean RMSE of case 3

滤波器(执行参数)	执行时间/s	RMSE均值
GPBF($N = 100, \Delta\lambda = 0.1$)	0.12	34.95
EnKF($N = 100$)	0.027	54.08
EnKF($N = 2000$)	0.459	44.20
GPBF($N = 500, \Delta\lambda = 0.005$)	3.02	33.41

7 总结(Conclusions)

针对渐进贝叶斯方法中,描述状态从先验分布到后验分布演化的一阶动态系统难于求解的问题. 提出高斯渐进贝叶斯滤波器. 分别对线性高斯条件下和非线性高斯条件下滤波器的解以及算法实现问题给出了相应的证明和结果,仿真算例表明,新滤波器具有较高的精度和比较合理的时间复杂度. 需要说明的是:

a) 虽然本文得到了 $f(\mathbf{x}, \lambda)$ 在非线性高斯条件下的近似解表达式,但尚未给出该条件下 $\lambda = 1$ 时的状态一致误差矩阵或其迭代计算公式,因此GPBF的执行需要借助粒子实现,不能直接说明渐进引入观测值带来的性能提升. 而且粒子算法所导致的计算量在某些低功耗要求的嵌入式系统上是不可接受的,使其能够进一步实用化,是需要继续研究的问题.

b) 虽然在仿真中GPBF表现出优于经典非线性高斯滤波器和粒子滤波器的性能,但这不能说明GPBF具有绝对的优势,对于滤波问题,经常对于不同问题采用不同的方法,本文算例的选取更多是为了验证理论分析的正确性和GPBF的可行性.

参考文献(References):

- [1] HANEBECK U, BRIECHLE K, RAUH A. Progressive Bayes: A new framework for nonlinear state estimation [C] // *SPIE Proceedings of Multisensor, Multisource Information Fusions*. Orlando: SPIE, 2003: 256 – 267.
- [2] HANEBECK U, FEIERMANN O. Progressive Bayesian estimation for nonlinear discrete-time systems: the filter step for scalar measurements and multidimensional states [C] // *IEEE Conference on Decision and Control*. Washington D.C.: IEEE, 2003: 5366 – 5371.
- [3] HANEBECK U, STEINBRING J. Progressive Gaussian filtering based on dirac mixture approximations [C] // *IEEE International Conference on Information Fusion*. Singapore: IEEE, 2012: 1697 – 1704.
- [4] HANEBECK U, STEINBRING J. Progressive Gaussian filtering with a twist [C] // *IEEE International Conference on Information Fusion*. Istanbul: IEEE, 2013: 1103 – 1110.
- [5] STEINBRING J, HANEBECK U. Progressive Gaussian filtering using explicit likelihoods [C] // *IEEE International Conference on Information Fusion*. Salamanca: IEEE, 2014: 1 – 8.
- [6] DAUM F, HUANG J. Nonlinear filters with particle flow induced by log-homotopy [C] // *SPIE Proceedings of Signal and Data Processing*. San Francisco: SPIE, 2009: 2937 – 2945.

- [7] DAUM F. Coulomb's law particle flow for nonlinear filter [C] // *SPIE Proceedings of Signal Processing and Sensor Fusion*. San Diego: SPIE, 2011: 3351 – 3362.
- [8] DAUM F, HUANG J. Particle flow with non-zero diffusion for nonlinear filters [C] // *SPIE Proceedings of Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition*. Baltimore: SPIE, 2013: 4509 – 4516.
- [9] TAO Y, MEHTA P G, MEYN S P. Feedback particle filter [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2013, 58(10): 2037 – 2043.
- [10] GORDON N, SALMOND D, SMITH A. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation [J]. *IEEE Proceedings of Radar and Signal Processing*, 1993, 140(2): 107 – 113.
- [11] SIMON J, JEFFERY U, HUGH D. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2000, 45(3): 477 – 481.
- [12] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2009, 56(6): 1254 – 1269.
- [13] EVENSEN G. The ensemble Kalman filter: theoretical formulation and practical implementation [J]. *Ocean Dynamics*, 2003, 56(2): 343 – 367.
- [14] BAR-SHALOM Y, LI X R. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*[M]. New York: John Wiley&Sons, 2005: 50 – 54.
- [15] SIMON D. *Optimal State Estimation* [M]. New York: John Wiley&Sons, 2006: 22 – 27.
- [16] KOTECHA J, DJURIC P. Gaussian particle filtering [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(10): 2592 – 2601.
- [17] MIHAYLOVA L, CARMÍ A. Particle algorithms for filtering in high dimensional state spaces: A case study in group object tracking [C] // *IEEE International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processing*. New York: IEEE, 2011: 5932 – 5935.
- [18] SYNDER C, BENGTTSSON T, BICKEL P, et al. Obstacles to high-dimensional particle filtering [J]. *Monthly Weather Review*, 2008, 136(1): 4629 – 4640.
- [19] SINGH N, BHAUMIK S, BHATTACHARYA S. Tracking of ballistic target on reentry using ensemble kalman filter [C] // *IEEE India Annual Conference*. Kochi: IEEE, 2012: 508 – 513.
- [20] 胡振涛, 张勇, 刘先省. 基于量测迭代更新集合卡尔曼滤波的机动目标跟踪算法 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(11): 1517 – 1523. (HU Zhentao, ZHANG Yong, LIU Xianxing. Maneuvering target tracking algorithm based on ensemble Kalman filter with observation iterated update [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(11): 1517 – 1523.)

作者简介:

周穗华 (1962–), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为目标特性及信息处理技术, E-mail: zsrice@139.com;

张宏欣 (1987–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为非线性滤波、目标跟踪, E-mail: mylifeforthebattle@hotmail.com;

冯士民 (1986–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为非线性滤波、数据融合, E-mail: fengshimin_86@126.com.