

非线性抛物型偏差分系统迭代学习控制

戴喜生¹, 郭亚君¹, 田森平^{2†}, 李克讷¹

(1. 广西科技大学 电气与信息工程学院, 广西 柳州 545006; 2. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 本文研究了一类时空离散的非线性抛物型偏差分系统的迭代学习控制问题. 首先, 针对系统含有不确定系数与非线性特点, 设计了开环P型迭代学习控制算法; 然后, 建立了输出跟踪误差沿迭代轴收敛的充分条件, 并利用离散Gronwall不等式、 λ 范数以及压缩映射原理, 详细给出了收敛性分析证明. 最后通过仿真实例说明了算法的有效性.

关键词: 迭代学习控制; 收敛性分析; 偏差分系统; 非线性

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Iterative learning control of nonlinear parabolic partial difference systems

DAI Xi-sheng¹, GUO Ya-jun¹, TIAN Sen-ping^{2†}, LI Ke-ne¹

(1. School of Electrical and Information Engineering, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou Guangxi 545006, China;
2. School of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The iterative learning control (ILC) technique is applied to a class of spatial-temporal discrete nonlinear parabolic partial difference systems. For the discussion purpose, an open-loop P-type iterative learning algorithm is designed for the systems containing uncertain coefficients and nonlinear terms. Then, the sufficient condition of the tracking error to converge is established, and the convergence analysis is discussed using discrete Gronwall inequality, λ -norm and the contraction mapping principle. Furthermore, a simulation example is given to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: iterative learning control; convergence analysis; partial difference systems; nonlinear

1 引言(Introduction)

偏差分系统是一类系统状态同时含有两个或两个以上独立变量的差分系统. 某些分布参数系统离散化后即成为偏差分系统, 因此本质上它也是一种具有分布式特点的离散动态系统. 偏差分系统用来描述图像处理^[1]、分子轨道模型^[2]等, 另外在偏微分数值计算^[3-4]中也经常涉及. 目前对偏差分系统(有的是偏差分方程)的研究取得了大量的研究成果. 如系统解的存在唯一性^[5-6]、稳定性^[7]、振荡准则^[8-10]等. 但对偏差分系统的跟踪控制问题鲜有报道. 类似偏微分系统跟踪控制, 偏差分系统跟踪控制比一般的常差分系统跟踪控制问题相对困难.

迭代学习控制是一种模仿人类具有学习能力的先进智能控制方式, 最早起源于工业机器人控制问

题^[11-12]. 对于某些有限时间重复运行的动态系统, 迭代学习控制有着显著的优点: 不需要系统模型的精确信息, 但能达到对期望轨迹的完全跟踪. 经过近30多年的发展, 迭代学习控制在理论和应用两方面都取得了丰富的研究成果. 如应用在智能交通系统、生物医学工程、注塑机注塑过程、炼钢过程等实际问题的控制中(见参考文献[13-16]). 而在理论上, 从研究对象看, 大部分研究成果主要是集中参数系统(常微分或差分方程描述的动态系统), 对分布式系统(如由偏微分方程或偏差分方程给出的动态系统)的迭代学习控制目前研究不多^[17-20]. 特别地, 就作者所知, 偏差分系统的迭代学习控制问题尚无研究.

本文研究一类非线性抛物型偏差分系统的迭代学习控制问题. 在适当的初边值条件下, 设计了开环

收稿日期: 2015-03-25; 录用日期: 2015-06-23.

†通信作者. E-mail: ausptian@scut.edu.cn.

国家自然科学基金项目(61364006, 61374104), 广西优秀中青年骨干教师培养工程, 广西高等学校科研一般项目(2013YB175)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61364006, 61374104), Project of Outstanding Young Teachers' Training in Higher Education Institutions of Guangxi and Guangxi Higher Education Science Research Projection (2013YB175).

P型学习控制律并给出了在该算法作用下使得系统的输出跟踪误差收敛的充分条件. 在证明收敛性过程中, 不同于一般的离散系统对状态估计通常采用解的表达式(基本解或常数变易公式给出的), 基于偏差分方程直接利用某些基本不等式和离散形式的 Gronwall不等式对系统状态进行估计, 再借助压缩映射原理证明算法的收敛性. 仿真实例也说明了算法的有效性.

2 系统描述及准备(System statement and preliminary)

考虑如下的非线性偏差分系统:

$$\Delta_2 q(i, j) = a(j)\Delta_1^2 q(i-1, j) + f(q(i, j), u(i, j), j), \quad (1a)$$

$$y(i, j) = g(q(i, j), j) + h(j)u(i, j). \quad (1b)$$

系统(1)中: i, j 是空间和时间的离散变量, $1 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J, I, J$ 为给定的整数; $a(j), h(j)$ 为不确定的有界实数序列, 且 $a(j) > 0$. $q(i, j), u(i, j), y(i, j) \in \mathbb{R}$ 分别表示系统(1)的系统状态, 控制输入和控制输出. $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, J] \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \times [0, J] \rightarrow \mathbb{R}$ 都是非线性函数, 满足下面的一致全局 Lipschitz 条件:

$$\begin{cases} |f(q_1, u_1, j) - f(q_2, u_2, j)| \leq \\ l_f(|q_1 - q_2| + |u_1 - u_2|), \\ |g(q_1, j) - g(q_2, j)| \leq l_g(|q_1 - q_2|), \end{cases} \quad (2)$$

其中 l_f, l_g 为常数.

系统(1)中的差分形式定义如下:

$$\Delta_2 q(i, j) = q(i, j+1) - q(i, j), \quad (3a)$$

$$\Delta_1^2 q(i-1, j) = q(i+1, j) - 2q(i, j) + q(i-1, j). \quad (3b)$$

设系统(1)相应的初边值条件为

$$q(0, j) = 0 = q(I+1, j), \quad 1 \leq j \leq J, \quad (4)$$

$$q(i, 0) = \varphi(i, 0), \quad 1 \leq i \leq I. \quad (5)$$

对系统(1), 一般的控制任务是: 已知某一给定的期望输出 $y_d(i, j)$, 要找到对应的理想输入 $u_d(i, j)$. 实际上, 由于系统的不确定性, 理想控制 $u_d(i, j)$ 是不易直接求出的. 因此借助于迭代学习控制方法, 逐步寻找 $u_d(i, j)$. 使对给定的目标 $y_d(i, j)$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(i, j) = y_d(i, j), \quad 1 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J,$$

其中 $y_k(i, j)$ 是迭代 k 次的控制输出, 即实现系统实际输出对期望输出的精确跟踪.

对于系统(1), 本文采用下面的 P 型迭代学习控制算法:

$$u_{k+1}(i, j) = u_k(i, j) + \gamma(j)e_k(i, j), \quad (6)$$

其中: $e_k(i, j) = y_d(i, j) - y_k(i, j), k$ 为迭代次数, $\gamma(j)$ 为学习增益.

符号约定: 对函数 $v(i) \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq I, \|\cdot\|$ 表示为 $\|v\| = (\sum_{i=1}^I v(i)^2)^{\frac{1}{2}}$. 设 λ 为一个正常数, 对二元函数 $\varphi(i, j): [0, I] \times [0, J] \rightarrow \mathbb{R}$, 其 λ 范数表示为 $\|\varphi\|_\lambda^2 = \sup_{0 \leq j \leq J} \{\|\varphi(\cdot, j)\|^2 \lambda^j\}$.

3 收敛性分析(Convergence analysis)

下面的引理将在算法收敛性分析中用到.

引理 1^[7] 设 $\{v(i)\}, \{B(i)\}, \{D(i)\}$ 为实数序列, 且 $i \geq 0$, 由

$$v(i+1) \leq B(i)v(i) + D(i), \quad i \geq 0, \quad (7)$$

那么有

$$v(j) \leq \prod_{i=0}^{j-1} B(i)v(0) + \sum_{i=1}^{j-1} D(i) \prod_{s=i+1}^{j-1} B(s), \quad j \geq 0. \quad (8)$$

通过学习算法(6), 对于系统(1)的控制输入 $u(i, j)$, 在迭代 k 次后可得到控制输入为 $u_k(i, j)$, 相应的系统描述可表示为

$$\Delta_2 q_k(i, j) = a(j)\Delta_1^2 q_k(i-1, j) + f(q_k(i, j), u_k(i, j), j), \quad (9a)$$

$$y_k(i, j) = g(q_k(i, j), j) + h(j)u_k(i, j), \quad (9b)$$

设在迭代过程中, 系统(9)的初边值条件与系统(1)的相同, 即

$$q_k(0, j) = 0 = q_k(I+1, j), \quad 1 \leq j \leq J, \quad (10)$$

$$q_k(i, 0) = \varphi(i, 0) = \varphi_k(i, 0), \quad 1 \leq i \leq I. \quad (11)$$

这里边值条件(10)类似于一般偏微分方程的 Dirichlet 边界条件(第一类边值条件), 初值条件(11)是恒等初值条件, 即每次迭代学习过程都从同一初值出发.

在系统迭代 k 次后, 相应的差分形式表示为

$$\Delta_2 q_k(i, j) = q_k(i, j+1) - q_k(i, j), \quad (12a)$$

$$\Delta_1^2 q_k(i-1, j) = q_k(i+1, j) - 2q_k(i, j) + q_k(i-1, j). \quad (12b)$$

定理 1 若算法(6)中的学习增益 $\gamma(j)$ 满足 $|1 - h(j)\gamma(j)|^2 < 0.5, 0 \leq j \leq J$, 则当迭代次数 $k \rightarrow \infty$ 时, 系统(1)的输出误差 $e_k(i, j)$ 在下面意义下收敛为零, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(\cdot, j)\|^2 = 0, \quad 0 \leq j \leq J. \quad (13)$$

证 由算法(6), 可以得到

$$\begin{aligned} e_{k+1}(i, j) &= \\ e_k(i, j) + y_k(i, j) - y_{k+1}(i, j) &= \\ e_k(i, j) - h(j)(u_{k+1}(i, j) - u_k(i, j)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (g(q_{k+1}(i, j), j) - g(q_k(i, j), j)) = \\ & [1 - h(j)\gamma(j)]e_k(i, j) - \\ & [g(q_{k+1}(i, j), j) - g(q_k(i, j), j)]. \end{aligned} \quad (14)$$

对式(14)两边同时平方:

$$\begin{aligned} & e_{k+1}^2(i, j) = \\ & \{[1 - h(j)\gamma(j)]e_k(i, j) - \\ & [g(q_{k+1}(i, j), j) - g(q_k(i, j), j)]\}^2 \leq \\ & 2[1 - h(j)\gamma(j)]^2 e_k^2(i, j) + \\ & 2[g(q_{k+1}(i, j), j) - g(q_k(i, j), j)]^2. \end{aligned} \quad (15)$$

再对式(15)两边从 $i = 1$ 到 I 求和, 得

$$\begin{aligned} & \|e_{k+1}(\cdot, j)\|^2 \leq \\ & 2[1 - h(j)\gamma(j)]^2 \|e_k(\cdot, j)\|^2 + \\ & 2l_g \|q_{k+1}(\cdot, j) - q_k(\cdot, j)\|^2 \leq \\ & 2\lambda_{h\gamma} \|e_k(\cdot, j)\|^2 + 2l_g \|\bar{q}_k(\cdot, j)\|^2. \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)中的

$$\begin{aligned} & \lambda_{h\gamma} = \sup_{0 \leq j \leq J} \{1 - h(j)\gamma(j)\}^2, \\ & \bar{q}_k(i, j) = q_{k+1}(i, j) - q_k(i, j). \end{aligned}$$

从式(16)看出, 为了证明 $\|e_k(\cdot, j)\|^2$ 的收敛性, 需要先估计 $\|\bar{q}_k(\cdot, j)\|^2$. 由式(9a)(12a)得

$$\begin{aligned} & q_k(i, j + 1) = \\ & a(j)\Delta_1^2 q_k(i - 1, j) + \\ & f(q_k(i, j), u_k(i, j), j) + q_k(i, j). \end{aligned} \quad (17)$$

同理

$$\begin{aligned} & q_{k+1}(i, j + 1) = \\ & a(j)\Delta_1^2 q_{k+1}(i - 1, j) + \\ & f(q_{k+1}(i, j), u_{k+1}(i, j), j) + q_{k+1}(i, j). \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)减式(17), 并由式(12b)可得

$$\begin{aligned} & \bar{q}_k(i, j + 1) = \\ & a(j)[\Delta_1^2 q_{k+1}(i - 1, j) - \Delta_1^2 q_k(i - 1, j)] + \\ & [f(q_{k+1}(i, j), u_{k+1}(i, j), j) - \\ & f(q_k(i, j), u_k(i, j), j)] + \bar{q}_k(i, j) = \\ & a(j)[\bar{q}_k(i + 1, j) - 2\bar{q}_k(i, j) + \\ & \bar{q}_k(i - 1, j)] + [f(q_{k+1}(i, j), u_{k+1}(i, j), j) - \\ & f(q_k(i, j), u_k(i, j), j)] + \bar{q}_k(i, j). \end{aligned} \quad (19)$$

对上式两边同时平方, 并由 $(a+b+c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ 可得

$$\begin{aligned} & (\bar{q}_k(i, j + 1))^2 = \\ & \{a(j)[\bar{q}_k(i + 1, j) - 2\bar{q}_k(i, j) + \\ & \bar{q}_k(i - 1, j)] + [f(q_{k+1}(i, j), u_{k+1}(i, j), j) - \\ & f(q_k(i, j), u_k(i, j), j)] + \bar{q}_k(i, j)\}^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3a^2(j)\{[\bar{q}_k(i + 1, j) - 2\bar{q}_k(i, j) + \\ & \bar{q}_k(i - 1, j)]\}^2 + 3\{f(q_{k+1}(i, j), u_{k+1}(i, j), j) - \\ & f(q_k(i, j), u_k(i, j), j)\}^2 + 3\{\bar{q}_k(i, j)\}^2. \end{aligned} \quad (20)$$

对上式两边同时从 $i = 1$ 到 I 求和, 并运用 Lipschitz 条件(2), 得

$$\begin{aligned} & \|\bar{q}_k(\cdot, j + 1)\|^2 \leq \\ & 3a^2(j) \sum_{i=1}^I \{\bar{q}_k(i + 1, j) - 2\bar{q}_k(i, j) + \\ & \bar{q}_k(i - 1, j)\}^2 + 3\|f(q_{k+1}(i, j), u_{k+1}(i, j), j) - \\ & f(q_k(i, j), u_k(i, j), j)\|^2 + 3\|\bar{q}_k(\cdot, j)\|^2 \leq \\ & 3a^2(j) \sum_{i=1}^I \{\bar{q}_k(i + 1, j) - 2\bar{q}_k(i, j) + \\ & \bar{q}_k(i - 1, j)\}^2 + 3l_f (\|q_{k+1}(\cdot, j) - q_k(\cdot, j)\|^2 + \\ & \|u_{k+1}(\cdot, j) - u_k(\cdot, j)\|^2) + 3\|\bar{q}_k(\cdot, j)\|^2 = \\ & 3a^2(j) \sum_{i=1}^I \{\bar{q}_k(i + 1, j) - 2\bar{q}_k(i, j) + \\ & \bar{q}_k(i - 1, j)\}^2 + 3l_f \|\bar{u}_k(\cdot, j)\|^2 + \\ & (3 + 3l_f) \|\bar{q}_k(\cdot, j)\|^2 \triangleq \\ & \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \end{aligned} \quad (21)$$

运用边界条件 $\bar{q}_k(0, j) = 0 = \bar{q}_k(I + 1, j)$, $1 \leq j \leq J$, 则式(21)中 Σ_1 为

$$\begin{aligned} & \Sigma_1 = 3a^2(j) \sum_{i=1}^I \{\bar{q}_k(i + 1, j) - 2\bar{q}_k(i, j) + \\ & \bar{q}_k(i - 1, j)\}^2 \leq \\ & 3a^2(j) \sum_{i=1}^I \{3\bar{q}_k^2(i + 1, j) + 12\bar{q}_k^2(i, j) + \\ & 3\bar{q}_k^2(i - 1, j)\} = \\ & 54a^2(j) \sum_{i=1}^I \bar{q}_k^2(i, j) - 9a^2(j)\bar{q}_k^2(1, j) - \\ & 9a^2(j)\bar{q}_k^2(I, j) \leq 54a^2(j)\|\bar{q}_k(\cdot, j)\|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

把式(22)代入式(21)得

$$\begin{aligned} & \|\bar{q}_k(\cdot, j + 1)\|^2 \leq \\ & (54a^2(j) + 3 + 3l_f) \|\bar{q}_k(\cdot, j)\|^2 + \\ & 3l_f \|\bar{u}_k(\cdot, j)\|^2 \leq \\ & M_1 \|\bar{q}_k(\cdot, j)\|^2 + M_2 \|\bar{u}_k(\cdot, j)\|^2, \end{aligned} \quad (23)$$

其中:

$$M_1 = \sup_{1 \leq j \leq J} \{54a^2(j) + 3 + 3l_f\}, \quad M_2 = 3l_f,$$

式(23)可写成

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I \bar{q}_k^2(i, j + 1) \leq \\ & M_1 \sum_{i=1}^I \bar{q}_k^2(i, j) + M_2 \sum_{i=1}^I \bar{u}_k^2(i, j). \end{aligned} \quad (24)$$

对式(24)运用引理1和初值条件(11)得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \bar{q}_k^2(i, j) &\leq \\ M_1^j \sum_{i=1}^I \bar{q}_k^2(i, 0) + \sum_{t=0}^{j-1} M_2 \sum_{i=1}^I \bar{u}_k^2(i, t) M_1^{j-t-2} = \\ \sum_{t=0}^{j-1} M_2 \sum_{i=1}^I \bar{u}_k^2(i, t) M_1^{j-t-2}. \end{aligned} \quad (25)$$

由算法(6)可知

$$(\bar{u}_k(i, j))^2 = (u_{k+1}(i, j) - u_k(i, j))^2 \leq \gamma^2 e_k^2(i, j), \quad (26)$$

这里 $\gamma = \sup_{0 \leq j \leq J} \gamma(j)$. 因此式(25)为

$$\|\bar{q}_k(\cdot, j)\|^2 \leq \gamma^2 M_2 \sum_{t=0}^{j-1} \|e_k(\cdot, t)\|^2 M_1^{j-t-2}. \quad (27)$$

把式(27)代入式(16)并左右同乘 λ^j ($0 < \lambda < 1$), 并取 $\lambda M_1 < 1$, 则可得

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}(\cdot, j)\|^2 \lambda^j &\leq \\ 2\lambda_{h\gamma} \|e_k(\cdot, j)\|^2 \lambda^j + \\ 2l_g \gamma^2 M_2 \sum_{t=0}^{j-1} \|e_k(\cdot, t)\|^2 \lambda^t (\lambda M_1)^{j-t-2} \lambda^2 &\leq \\ 2\lambda_{h\gamma} \|e_k\|_\lambda^2 + 2l_g \gamma^2 M_2 \lambda^2 \sum_{t=0}^{j-1} \|e_k\|_\lambda^2 (\lambda M_1)^{j-t-2} = \\ (2\lambda_{h\gamma} + 2l_g \gamma^2 M_2 \lambda^2 \sum_{t=0}^{j-1} (\lambda M_1)^{j-t-2}) \|e_k\|_\lambda^2 &\leq \\ (2\lambda_{h\gamma} + 2l_g \gamma^2 M_2 \frac{\lambda^2}{1 - \lambda M_1}) \|e_k\|_\lambda^2, \end{aligned} \quad (28)$$

记

$$\rho \triangleq 2\lambda_{h\gamma} + 2l_g \gamma^2 M_2 \frac{\lambda^2}{1 - \lambda M_1},$$

因为 λ 充分小, 所以可使得 $2l_g \gamma^2 M_2 \frac{\lambda^2}{1 - \lambda M_1} < 1$, 并由定理1的条件知 $2\lambda_{h\gamma} < 1$, 因此 $\rho < 1$. 从而由式(28)递推有

$$\|e_{k+1}\|_\lambda^2 \leq \rho \|e_k\|_\lambda^2 \leq \dots \leq \rho^k \|e_1\|_\lambda^2, \quad (29)$$

这样当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\|e_{k+1}\|_\lambda^2 \rightarrow 0$. 最后因为

$$\begin{aligned} 0 \leq \|e_k(\cdot, j)\|^2 &= \lambda^{-j} \lambda^j \|e_k(\cdot, j)\|^2 \leq \\ \sup_{0 \leq j \leq J} \{\|e_k(\cdot, j)\|^2 \lambda^j\} \lambda^{-J} &= \lambda^{-J} \|e_k\|_\lambda^2, \end{aligned} \quad (30)$$

那么, 由夹逼准则可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(\cdot, j)\|^2 = 0, 0 \leq j \leq J. \quad (31)$$

定理1证明完毕.

注1 由于偏差分系统时间和空间变量离散且都是有限范围, 因此根据定理1的结论(13)以及 $\|e_k(\cdot, j)\|^2 = \sum_{i=1}^I e_k^2(i, j)$ 可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(i, j) = 0, 1 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J$.

注2 一般的, 常微分或差分系统迭代收敛性条件不等式右端为常数1(对增益矩阵的要求). 类似参考文献[13, 20], 本文定理1的收敛性条件则为0.5, 增益矩阵选择范围相对较窄. 实际上, 分布参数系统的迭代收敛性条件较复杂, 如参考文献[17-19].

4 仿真(Simulations)

以下的仿真实例将说明本文所用算法的有效性. 设系统(1)的期望输出为

$$y_d(i, j) = 2\pi \sin\left(\frac{i-1}{5}\right) (1 - e^{-2(I+1-i)}) \sin j, \quad (32)$$

其中: $(i, j) \in [1, 10] \times [0, 200]$, $I=10, J=200$, 系统(1)中的非线性函数 f, g 为

$$\begin{cases} f(q_k(i, j), u_k(i, j), j) = \\ a(j)q_k(i, j) - 0.1 \sin(q_k(i, j)) + cu_k(i, j), \\ g(q_k(i, j), j) = w(j) \cos(q_k(i, j)), \end{cases} \quad (33)$$

这里: $b(j) = -0.3 - \frac{8}{20j}, c = 1, w(j) = 0.5 + e^{-8j}$.

设系统(1)的系数为

$$a(j) = 0.2 - \frac{1}{20j}, h(j) = 0.8 + e^{-4j}, \gamma(j) = 0.8.$$

容易计算得 $\sup_{1 \leq j \leq J} \{1 - h(j)\lambda(j)\} < 0.5$, 满足定理1的条件. 下面的图1-6为仿真结果.

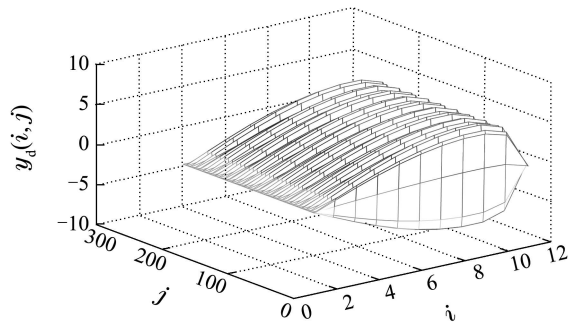


图1 期望输出曲面
Fig. 1 Desired output

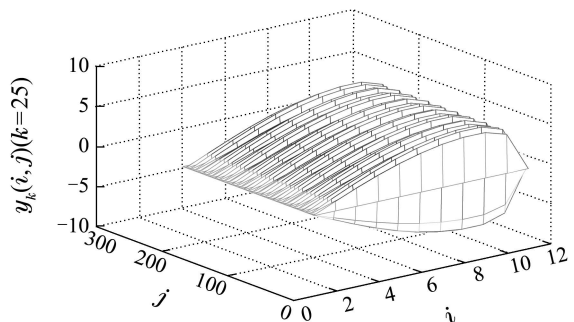


图2 迭代25次后的输出曲面
Fig. 2 The twenty-fifth iterative output

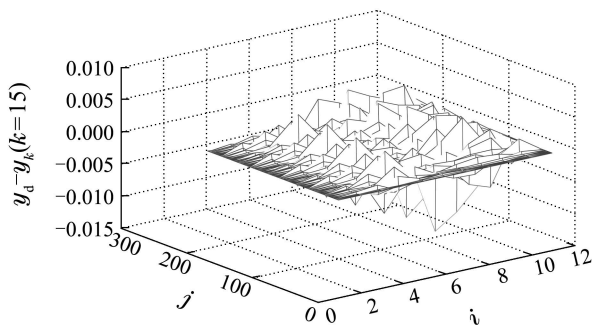
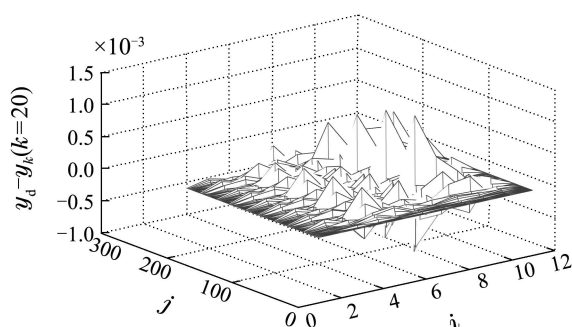
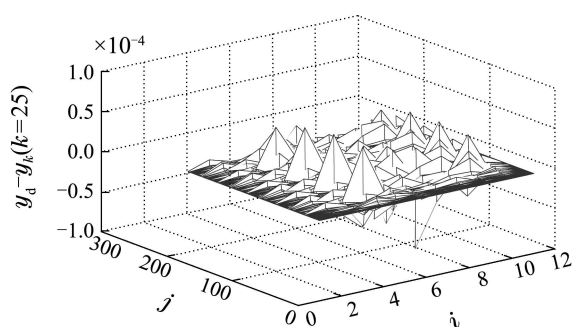
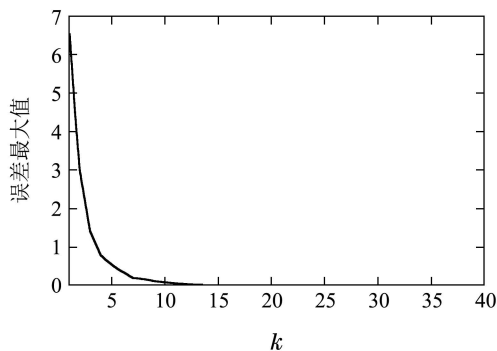
图 3 误差曲面($k = 15$)Fig. 3 Error surface ($k = 15$)图 4 误差曲面($k = 20$)Fig. 4 Error surface ($k = 20$)图 5 误差曲面($k = 25$)Fig. 5 Error surface ($k = 25$)

图 6 迭代-误差最大值变化曲线

Fig. 6 Iterative number-max tracking error

图1-6中: 图1是期望输出曲面, 图2是相应的迭代25次后的输出曲面, 图3-5 是分别迭代15, 20, 25次的输出误差跟踪曲面. 从图3-5可以看出随着

迭代次数的增加, 输出跟踪误差的收敛性越来越好, 迭代25次后的误差为 8.5200×10^{-5} , 图6是误差最大值收敛轨迹. 从图6可以看出, 在迭代到15次时, 输出对期望轨迹已经基本实现了完全跟踪, 因此仿真结果验证了本文算法对偏差分系统(1)的有效性.

5 结论(Conclusions)

分布式系统的迭代学习控制问题因其状态空间函数涉及多维函数空间, 研究相对较复杂. 而这类系统在实际中涉及较多. 本文研究了一类非线性偏差分系统的迭代学习控制问题. 在适当的初边值条件下, 所设计的P型学习算法能保证系统的输出误差沿迭代轴收敛. 此外, 在收敛性证明过程中无需求出系统解的表达式, 系数有界但不确定. 仿真实例也验证了算法的有效性. 未来可进一步研究由偏差分方程组给定的多输入多输出系统的迭代学习控制问题.

参考文献(References):

- [1] BERTRMA E S, LEO O C. Resistive grid image filtering: input/output analysis via the CNN Framework [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 1999, 39(7): 531 - 548.
- [2] 李向平. 分子轨道的偏差分方程法 [J]. *化学学报*, 1982, 40(8): 688 - 698.
(LI Xiangping. Molecular orbital method of partial difference equation [J]. *Acta Chimica Sinica*, 1982, 40(8): 688 - 698.)
- [3] COURANT R, FRIEDRICHS K, LEWY H. On partial difference equations of mathematical physics [J]. *IBM Journal of Research and Development*. 1967, 11(2): 215 - 234.
- [4] MORTON K W, MAYERS D F. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction* [M]. London: Cambridge University Press, 2005.
- [5] LIU S T, CHENG S S. Existence of positive solution for partial difference equations [J]. *Far East Journal Mathematical Science*, 1997, 5(3): 387 - 392.
- [6] CHENG S S. *Partial Difference Equations, Vol. 3 of Advances in Discrete Mathematics and Applications* [M]. New York: Taylor & Francis, 2003.
- [7] XIE S L, CHENG S S. Stability criteria for parabolic type partial difference equations [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1996, 75(1): 57 - 66.
- [8] WONG P J Y, AGARWAL R P. Oscillation criteria for nonlinear partial difference equations with delays [J]. *Computer Mathematics with Applications*, 1996, 32(6): 57 - 86.
- [9] ZHANG B G, LIU S T, CHENG S S. Oscillation of class of delay partial difference equations [J]. *Journal of Difference Equations and Applications*, 1995, 1(3): 215 - 226.
- [10] ZHANG B G, LIU S T. On the oscillation of two partial difference equations [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1997, 206(2): 480 - 492.
- [11] UCHIYAMA M. Formation of high-speed motion pattern of mechanical arm by trial [J]. *Transactions of Society of Instrumentation and Control Engineers*, 1978, 14(6): 706 - 712.
- [12] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning [J]. *Journal of Robotic System*, 1984, 1(2): 123 - 140.

- [13] 谢胜利, 田森平, 谢振东. 迭代学习控制的理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
(XIE Shengli, TIAN Senping, XIE Zhendong. *The Theory and Application of Iterative Learning Control* [M]. Beijing: Science Press, 2005.)
- [14] 孙明轩, 黄宝键. 迭代学习控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
(SUN Mingxuan, HUANG Baojian. *Iterative Learning Control* [M]. Beijing: Press of National Defense Industry, 1999.)
- [15] 池荣虎, 侯忠生, 隋树林. 快速路入口匝道的非参数自适应迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(6): 1011 – 1015.
(CHI Ronghu, HOU Zhongsheng, SUI Shulin. Non-parameter adaptive iterative learning control for the freeway traffic ramp metering [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(6): 1011 – 1015.)
- [16] 王友清, 周东华, 高福荣. 迭代学习控制的二维模型理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2013.
(WANG Youqing, ZHOU Donghua, GAO Furong. *A Two-Dimensional Model Theory and Its Application of Iterative Learning Control* [M]. Beijing: Science Press, 2013.)
- [17] 戴喜生, 田森平. 一阶强双曲分布参数系统的迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 1086 – 1089.
(DAI Xisheng, TIAN Shenping. Iterative learning control for first order strong hyperbolic distributed parameter systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1086 – 1089.)
- [18] QU Z H. An iterative learning algorithm for boundary control of a stretched moving string [J]. *Automatica*, 2002, 38(5): 821 – 827.
- [19] HUANG D Q, XU J X. Steady-state iterative learning control for a class of nonlinear PDE processes [J]. *Journal of Process Control*, 2011, 21(8): 1155 – 1163.
- [20] DAI X S, TIAN S P, PENG Y J, et al. Closed-loop P-type iterative learning control of uncertain linear distributed parameter systems [J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2014, 1(3): 267 – 273.

作者简介:

戴喜生 (1976–), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为迭代学习控制与随机控制, E-mail: mathdxs@163.com;

郭亚君 (1988–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为偏差分系统的迭代学习控制, E-mail: gxutgyj@163.com;

田森平 (1961–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为迭代学习控制理论与算法, E-mail: ausptian@scut.edu.cn;

李克讷 (1978–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为机器人技术, E-mail: likene@163.com.