

# 受外界干扰的离散多智能体系统的均方有界一致性

莫立坡, 潘婷婷<sup>†</sup>

(北京工商大学 理学院, 北京 100048)

**摘要:** 对有外界干扰的二阶离散多智能体系统, 研究了在马尔可夫切换拓扑结构下的均方有界一致性问题. 首先, 设计了一个带有智能体位置和速度信息的控制协议. 其次, 在随机有界干扰的情况下, 借助于矩阵分析方法以及Lyapunov函数, 得到了闭环系统实现均方有界一致所需的代数条件, 同时给出了各智能体状态误差的上界. 最后, 数值仿真验证了理论结果的有效性.

**关键词:** 离散多智能体系统; 随机有界干扰; 马尔可夫切换; 一致性

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Mean-square bounded consensus of discrete-time multi-agent systems with external disturbance

MO Li-po, PAN Ting-ting<sup>†</sup>

(School of Science, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China)

**Abstract:** This paper deals with the mean-square bounded consensus problem of second-order discrete-time multi-agent systems with stochastic bounded external disturbance under Markovian switching topological structures. Firstly, a control protocol is designed, which is based on the position and velocity information of each agent. Secondly, in the case of stochastic bounded external disturbance, the algebraic conditions for the closed-loop system to achieve the mean-square bounded consensus are obtained by using the methods of matrix analysis and Lyapunov function. Simultaneously, the upper bound of each agent state error is also given. Finally, numerical simulations are given to illustrate the effectiveness of the theoretical results.

**Key words:** discrete-time multi-agent systems; stochastic bounded disturbance; Markovian switching; consensus

### 1 引言(Introduction)

由于在众多领域的广泛应用, 多智能体系统的一致性问题的研究受到了许多学者的关注. 例如, 对于领导-跟随问题, Hu和Hong等人研究二阶连续系统的跟踪问题, 利用Lyapunov函数方法, 得到了在系统存在通信时延时仍能实现一致性的条件<sup>[1]</sup>. 对于动态领导者的信息不能被准确获得的情况, 文[2]借助了观测器估计方法, 使系统实现了领导跟随一致. 文[3]进一步设计了两类分布式控制协议, 在一定条件下, 均实现了各智能体对动态领导者的跟踪一致. 对于离散系统的相关讨论, 文[4]给出了动态平均一致算法, 文[5]利用矩阵理论得到了系统实现一致性的条件. 对于更复杂的高阶多智能体系统, 文[6]提出了一个新的动态邻居协议, 得到了高阶系统实现渐进一致的条件. 多智能体

系统的构造进一步复杂化, 针对由不同阶智能体构成的异构多智能系统, 文[7]讨论控制输入中没有速度测量值的情况, 利用图论以及Lyapunov方法, 给出系统实现一致的条件. 随后, 文[8]在拓扑结构联合连通的前提下, 证明了异构系统可以实现领导跟踪一致.

一方面, 在实际工程应用中, 系统往往会受到外界干扰, 这时就需要考虑存在外界干扰的多智能体系统. 针对此类系统, 利用鲁棒控制方法, 文[9-13]分别研究了一阶、二阶和高阶系统的一致性, 得到了系统实现鲁棒一致、 $H_\infty$ 一致和 $L_2$ - $L_\infty$ 一致的充分条件. 针对可测的外界干扰, 文[14-15]利用Lyapunov方法证明了系统可以实现一致性. 当干扰具有随机性, 例如白噪声干扰时, 文[16-17]研究了通信环境具有噪声干扰的多智能系统, 通过采样技术证明了在采样

收稿日期: 2015-03-26; 录用日期: 2015-10-09.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: pantingting03@163.com; Tel.: +86 18600341927.

本文责任编辑: 方浩.

国家自然科学基金项目(61304155), 北京市组织部优秀人才项目(2012D005003000005)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61304155) and Beijing Municipal Government Foundation for Talents(2012D005003000005).

周期足够小的前提下,系统可以实现渐进一致.当领导-跟随系统存在外界干扰时,文[18]利用线性矩阵不等式方法,给出系统的拓扑结构固定以及切换这两种情况实现稳定性所需条件.文[19]则分别研究了无领导者和有领导者的情况,基于对邻居信息和干扰的估计来设计控制协议,证明了最终该协议能使系统实现一致.对于智能体的未知信息,文[20]借助观测器来设计控制协议,在系统增益满足适当条件的前提下,多智能体系统可以实现有界跟踪一致.另一方面,在多智能体系统中,智能体间的通信由于噪声等随机因素的影响,往往具有不确定性.学者们通常采用马尔可夫切换模型来描述此类系统.对于此类模型的多智能体系统,文[21]利用线性矩阵不等式的方法,得到了使系统实现均方一致性的条件.针对二阶系统,文[22]利用矩阵分析方法,得到了系统实现均方一致的充要条件.

实际工程系统不仅会受到外界干扰,而且通信结构也可能会发生变换.为了实际工程需要,研究马尔可夫切换下存在外界干扰的多智能体系统的一致问题很有意义.因此,本文相较于文[15],对智能体间的通信情况复杂化,采用更接近实际应用的马尔可夫切换系统进行研究.本文主要研究存在随机有界外部干扰的二阶离散多智能体系统,假定其拓扑结构是马尔可夫切换的,基于智能体位置与速度的反馈信息设计控制协议,利用矩阵分析方法以及Lyapunov函数,得到了使闭环系统达到均方有界一致的代数条件.相比现有文献(文[23-24]等)给出的实现系统一致性的线性矩阵不等式条件,本文给出了代数条件,此条件更易验证,具有明显的创新性.

**符号说明:**  $\mathbb{N}$ 表示正整数集合;  $\mathbb{R}$ 表示实数集合;  $\mathbb{R}^{m \times n}$ 表示  $m \times n$ 维实数矩阵的全体;  $I_n$ 表示  $n \times n$ 维单位矩阵;  $\mathbf{0}_n$ 表示  $n \times n$ 维元素全为0的矩阵; 对于矩阵  $P$ ,  $\lambda(P)$ 表示其特征值,  $\lambda_{\min}(P)$ 与  $\lambda_{\max}(P)$ 分别表示其最小特征值与最大特征值,  $\rho(P)$ 表示谱半径,  $\|P\|$ 表示矩阵范数.

## 2 预备知识(Preliminaries)

考虑由  $n$ 个智能体构成的多智能体系统,每个智能体用一个节点表示,智能体  $i$ 用  $v_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ )表示.智能体间通信情况用节点间的边表示,例如边  $(v_i, v_j)$ 表示智能体  $j$ 能够收到来自智能体  $i$ 的信息.由节点集  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 、边集  $E \subseteq V \times V$ 和一个邻接矩阵  $A = [a_{ij}]$ 构成一个图  $G = (V, E, A)$ .在图  $G$ 中,如果  $(v_j, v_i) \in E$ ,则称智能体  $j$ 是智能体  $i$ 的邻居,智能体  $i$ 的全部邻居用  $N_i = \{j : (v_j, v_i) \in E\}$ 表示.节点之间的连通关系用邻接矩阵  $A = [a_{ij}]$ 表示.其中邻接矩阵  $A$ 中的元素  $a_{ij}$ 取值为0或1,当  $(v_j,$

$v_i) \in E$ 时,  $a_{ij} = 1$ ,否则  $a_{ij} = 0$ .拉普拉斯矩阵  $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,其中  $l_{ij} = -a_{ij}$ ,  $i \neq j$ ,  $l_{ii} = \sum_{i \neq j} a_{ij}$ .

在这篇文章中,假设多智能体间的拓扑结构是马尔可夫切换的.设  $\sigma(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ 是一个齐次、离散时间马尔可夫链,其状态空间为  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ .转移概率矩阵  $\Gamma = [\gamma_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,其中元素  $\gamma_{ij} = P\{\sigma(k+1) = j | \sigma(k) = i\}$ ,  $\forall i, j \in M$ ,即第  $i$ 个拓扑结构转换为第  $j$ 个拓扑结构的概率为  $\gamma_{ij}$ .记  $L_{\sigma(k)}$ 为其相应的拉普拉斯矩阵,取值于集合  $\{L_1, L_2, \dots, L_m\}$ .

**引理 1**<sup>[25]</sup> 若  $A, B, C$ 和  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,其中  $|A| \neq 0$ ,且  $AC = CA$ ,则分块矩阵  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ,有

$$|M| = |AD - CB|.$$

**引理 2** 二次方程  $y^2 + a_1y + a_2 = 0$ 的根在单位圆内等价于二次方程  $(1+a_1+a_2)z^2 + (2-2a_2)z + 1 - a_1 + a_2 = 0$ 的根均在左半平面,其中  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ .

**证** 必要性: 令二次方程  $y^2 + a_1y + a_2 = 0$ 的根  $y = \frac{z+1}{z-1}$ ,由于  $|y| < 1$ ,故  $z < 0$ .将此根代入原方程有

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + a_1\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + a_2 = 0,$$

即方程

$$(1+a_1+a_2)z^2 + (2-2a_2)z + 1 - a_1 + a_2 = 0$$

的根均在左半平面.

充分性. 由于双线性变换  $y = \frac{z+1}{z-1}$ 为一一映射,故充分性显然.

**引理 3**<sup>[26]</sup> 劳思判据. 二次方程的各项系数均为正数的充要条件是方程的根均在左半平面.

**例** 假设二次方程  $h^2 + a_1h + a_2 = 0$ 的根为  $h_1, h_2$ ,则方程系数  $a_1 > 0, a_2 > 0$ 的充要条件为  $h_1 < 0, h_2 < 0$ .

**引理 4**<sup>[27]</sup> 图  $G$ 的拉普拉斯矩阵  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,有以下结论:

1) 0是矩阵  $L$ 的重数为1的特征值,其右特征向量为  $\mathbf{1}_n = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,即  $L\mathbf{1}_n = 0$ .

2) 如果图  $G$ 含有生成树,则0是  $L$ 的一个特征值,其他  $n-1$ 个特征值均具有正实部.

## 3 系统模型以及稳定性分析(System model and stability analysis)

### 3.1 存在外部干扰的系统模型(Models of systems with external disturbance)

考虑由  $n$ 个智能体构成的多智能体系统,第  $i$ 个智能体的动态方程表示为

$$\begin{cases} x_i(k+1) = x_i(k) + v_i(k), \\ v_i(k+1) = v_i(k) + u_i(k) + w_i(k), \\ i \in 1, \dots, n, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_i(k) \in \mathbb{R}$ ,  $v_i(k) \in \mathbb{R}$ ,  $u_i(k) \in \mathbb{R}$  分别代表智能体  $i$  的位置、速度以及控制输入,  $w_i(k) \in \mathbb{R}$  表示系统存在的外部随机干扰, 并假设  $w_i(k)$  在概率意义下有界, 即  $P\{|w_i(k)| < \bar{\delta}\} = 1$ .

类似于文[22], 带有智能体自身以及其邻居智能体的位置和速度反馈信息, 设计线性控制协议如下:

$$u_i(k) = k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij}(k)(x_j(k) - x_i(k)) + k_2 \sum_{j \in N_i} a_{ij}(k)(v_j(k) - v_i(k)), \quad (2)$$

其中  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$  为待确定的控制增益, 由于通信拓扑结构是马尔可夫切换的, 故  $a_{ij}(k)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  是随拓扑结构的变化而相应变化的, 系统的拉普拉斯矩阵为  $L_{\sigma(k)}$ ,  $\sigma(k) \in M$ .

记

$$\begin{aligned} x(k) &= (x_1(k), \dots, x_n(k))^T, \\ v(k) &= (v_1(k), \dots, v_n(k))^T, \\ w(k) &= (w_1(k), \dots, w_n(k))^T, \end{aligned}$$

则系统(1)在采用控制协议(2)的条件下可写成如下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ -k_1 L_{\sigma(k)} & I_n - k_2 L_{\sigma(k)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ v(k) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n \\ I_n \end{bmatrix} w(k). \quad (3)$$

$$\bar{L}_{j\sigma} = \begin{bmatrix} l_{11} - l_{j1} & \cdots & l_{1j-1} - l_{jj-1} & l_{1j+1} - l_{jj+1} & \cdots & l_{1n} - l_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{j-11} - l_{j1} & \cdots & l_{j-1j-1} - l_{jj-1} & l_{j-1j+1} - l_{jj+1} & \cdots & l_{j-1n} - l_{jn} \\ l_{j+11} - l_{j1} & \cdots & l_{j+1j-1} - l_{jj-1} & l_{j+1j+1} - l_{jj+1} & \cdots & l_{j+1n} - l_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} - l_{j1} & \cdots & l_{nj-1} - l_{jj-1} & l_{nj+1} - l_{jj+1} & \cdots & l_{nn} - l_{jn} \end{bmatrix},$$

其中  $l_{ij}$  为  $L_{\sigma}$  中的相应元素.

$$\text{记 } \phi_{j\sigma} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & I_{n-1} \\ -k_1 \bar{L}_{j\sigma} & I_{n-1} - k_2 \bar{L}_{j\sigma} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ I_{n-1} \end{bmatrix},$$

则系统(4)可简化为

$$\varepsilon_j(k+1) = \phi_{j\sigma} \varepsilon_j(k) + H \delta_j(k). \quad (5)$$

至此, 多智能体系统(1)的均方有界一致问题转化为系统(5)的均方有界稳定问题.

接下来, 将给出这篇文章的主要结果.

**定理 1** 考虑系统(1), 控制协议(2)可以使其达

**定义 1** 考虑系统(1)具有马尔可夫切换拓扑结构, 此系统在采用控制协议(2)的条件下称为均方有界一致, 如果存在正实数  $A, B \in \mathbb{R}$ , 使得如下不等式成立:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E[|x_i(k) - x_j(k)|^2] &< A, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} E[|v_i(k) - v_j(k)|^2] &< B, \\ i &\neq j, i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

这篇文章的目的是研究拓扑结构马尔可夫切换的系统(3)实现均方有界一致的代数条件.

### 3.2 均方有界一致性分析(Mean square bounded consensus analysis)

在这一节中, 将讨论拓扑结构是马尔可夫切换的, 并且存在随机有界外部干扰的多智能体系统, 分析此系统的均方有界一致性问题. 事实上, 可以选择任一智能体  $j$  与智能体  $i$  作比较, 记  $\xi_i(k) = x_i(k) - x_j(k)$ ,  $\zeta_i(k) = v_i(k) - v_j(k)$ , 以及  $\delta_i(k) = w_i(k) - w_j(k)$ , 则多智能体系统(3)可转化为如下形式:

$$\varepsilon_j(k+1) = \begin{bmatrix} I_{n-1} & I_{n-1} \\ -k_1 \bar{L}_{j\sigma} & I_{n-1} - k_2 \bar{L}_{j\sigma} \end{bmatrix} \varepsilon_j(k) + \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ I_{n-1} \end{bmatrix} \delta_j(k), \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(k) &= (\xi_1(k), \dots, \xi_{j-1}(k), \xi_{j+1}(k), \dots, \xi_n(k), \\ &\quad \zeta_1(k), \dots, \zeta_{j-1}(k), \zeta_{j+1}(k), \dots, \zeta_n(k))^T, \\ \delta_j(k) &= (\delta_1(k), \dots, \delta_{j-1}(k), \delta_{j+1}(k), \dots, \delta_n(k))^T, \end{aligned}$$

对应此种变换, 得到变化后的降维的拉普拉斯矩阵

到均方有界一致, 如果在某一拓扑结构  $\sigma, \sigma \in M$  下, 存在某一智能体  $h, h \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 此智能体与智能体  $i$  作比较后得到的相应降维拉普拉斯矩阵  $\bar{L}_{h\sigma}$ , 使得控制增益参数  $k_1, k_2$  满足如下等式:

$$\begin{cases} k_1 \lambda > 0, \\ (k_2 - k_1) \lambda > 0, \\ 4 + k_1 \lambda - 2k_2 \lambda > 0, \end{cases} \quad (6)$$

其中  $\lambda \in \bigcup_{\sigma=1}^m \{\lambda(\bar{L}_{h\sigma}), \sigma \in M\}$ .

**证** 假定  $\lambda_i$  为  $\bar{L}_{h\sigma}$  的第  $i$  个特征值, 因  $|I_{n-1}| \neq 0$ ,

且  $I_{n-1}(-k_1 \bar{L}_{h\sigma}) = -k_1 \bar{L}_{h\sigma} I_{n-1}$ , 故利用引理1, 有

$$\begin{aligned} \det(zI_{2(n-1)} - \phi_{h\sigma}) &= \\ \det \begin{bmatrix} (z-1)I_{n-1} & -I_{n-1} \\ k_1 \bar{L}_{h\sigma} & (z-1)I_{n-1} + k_2 \bar{L}_{h\sigma} \end{bmatrix} &= \\ \det\{(z-1)I_{n-1}[(z-1)I_{n-1} + k_2 \bar{L}_{h\sigma}] + & \\ k_1 \bar{L}_{h\sigma} I_{n-1}\} &= \\ \prod_{i=1}^{n-1} \{(z-1)[(z-1)I_{n-1} + k_2 \lambda_i] + k_1 \lambda_i\} &= \\ \prod_{i=1}^{n-1} [z^2 + (k_2 \lambda_i - 2)z + 1 + k_1 \lambda_i - k_2 \lambda_i]. & \quad (7) \end{aligned}$$

矩阵  $\phi_{h\sigma}$  的所有特征值均在单位圆内等价于二次多项式(7)的根均在单位圆内, 根据引理2, 此条件等价于多项式  $r(s) = k_1 \lambda s^2 + (2k_2 \lambda - 2k_1 \lambda)s + 4 + k_1 \lambda - 2k_2 \lambda$  的根均在左半平面. 根据引理3, 满足此条件需多项式  $r(s)$  的系数均大于零, 即参数  $k_1, k_2$  满足不等式组(6)的条件, 从而有  $\rho(\phi_{h\sigma}) < 1$ , 故  $\|\phi_{h\sigma}\| < 1$ .

考虑随机Lyapunov函数, 令  $P_{\sigma(k), \sigma(k) \in M}$  为一类正定对称矩阵集合,

$$V(\varepsilon_h(k)) = \varepsilon_h^T(k) P_{\sigma(k)} \varepsilon_h(k).$$

记  $\bar{\mu} = \lambda_{\max}\{P_{\sigma(k)}\}$ ,  $\underline{\mu} = \lambda_{\min}\{P_{\sigma(k)}\}$ ,  $\bar{\phi} = \{\phi_{h\sigma} \mid \|\phi_{h\sigma}\| = \max_{\sigma \in M} \{\|\phi_{h\sigma}\|\}\}$ , 由于  $\|\phi_{h\sigma}\| < 1$ , 故  $\|\bar{\phi}\| < 1$ , 对于随机有界的外部干扰  $w_i(k)$ , 有  $P\{\|\delta_h(s)\| \leq 2\bar{\delta}\} = 1$ , 且  $\|H\| \leq 1, \gamma_{ij} \leq 1$ . 则当  $k \rightarrow \infty$  时,

$$\begin{aligned} E[V(\varepsilon_h(k))] &= \\ E[\varepsilon_h^T(k) P_{\sigma(k)} \varepsilon_h(k)] &= \\ \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} [\phi_{h\sigma(k-1)} \varepsilon_h(k-1) + H\delta_h(k-1)]^T P_{\sigma(k)} \cdot & \\ [\phi_{h\sigma(k-1)} \varepsilon_h(k-1) + H\delta_h(k-1)] &= \\ \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \{ \phi_{h\sigma(k-1)} \sum_{\sigma(k-1)=1}^m \gamma_{\sigma(k-2)\sigma(k-1)} [\phi_{h\sigma(k-2)} \cdot & \\ \varepsilon_h(k-2) + H\delta_h(k-2)] + H\delta_h(k-1) \}^T P_{\sigma(k)} \cdot & \\ \{ \phi_{h\sigma(k-1)} \sum_{\sigma(k-1)=1}^m \gamma_{\sigma(k-2)\sigma(k-1)} \cdot & \\ [\phi_{h\sigma(k-2)} \varepsilon_h(k-2) + & \\ H\delta_h(k-2)] + H\delta_h(k-1) \} &\leq \\ \vdots & \\ [\bar{\phi}^k \varepsilon_h(0) + \sum_{s=0}^{k-1} \bar{\phi}^{k-1-s} H\delta_h(s)]^T P_{\sigma(k)} \cdot & \\ [\bar{\phi}^k \varepsilon_h(0) + \sum_{s=0}^{k-1} \bar{\phi}^{k-1-s} H\delta_h(s)] &\leq \\ \left( \frac{1 - \|\bar{\phi}\|^k}{1 - \|\bar{\phi}\|} 2\bar{\delta} \right) \bar{\mu} \left( \frac{1 - \|\bar{\phi}\|^k}{1 - \|\bar{\phi}\|} 2\bar{\delta} \right) &\leq \end{aligned}$$

$$\frac{4\bar{\mu}\bar{\delta}^2}{(1 - \|\bar{\phi}\|)^2},$$

则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[\|\varepsilon_h(k)\|^2] \leq \frac{4\bar{\mu}\bar{\delta}^2}{\underline{\mu}(1 - \|\bar{\phi}\|)^2}.$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E[|x_i(k) - x_j(k)|^2] &= \\ \lim_{k \rightarrow \infty} E[|x_h(k) - x_j(k) - (x_h(k) - x_i(k))|^2] &< \\ 2 \lim_{k \rightarrow \infty} E[|x_h(k) - x_j(k)|^2 + |x_h(k) - x_i(k)|^2] &< \\ 2 \lim_{k \rightarrow \infty} E[\|\varepsilon_h(k)\|^2] &\leq \\ \frac{8\bar{\mu}\bar{\delta}^2}{\underline{\mu}(1 - \|\bar{\phi}\|)^2} &< +\infty. \end{aligned}$$

类似地,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[|v_i(k) - v_j(k)|^2] \leq \frac{8\bar{\mu}\bar{\delta}^2}{\underline{\mu}(1 - \|\bar{\phi}\|)^2} < +\infty.$$

因此, 系统(5)实现了均方有界稳定, 定理得证.

**推论** 考虑系统(1), 在图  $G$  含有生成树的情况下, 控制协议(2)可以使其达到均方有界一致, 如果控制增益参数  $k_1, k_2$  满足不等式(6).

**证** 根据引理4, 由于图  $G$  含有生成树, 故拉普拉斯矩阵  $L$  只有一个0特征根, 则  $\text{rank}(L) = n - 1$ . 假设根节点的编号1, 否则对智能体重新编号即可, 故矩阵  $L$  的后  $n - 1$  行的行向量是线性无关的. 而对于根节点1来说, 其入度为0, 即矩阵  $L$  第1列的后  $n - 1$  行元素  $l_{21} = l_{31} = \dots = l_{n1} = 0$ . 因此, 去掉矩阵

$$L \text{ 的第1行第1列元素后的矩阵 } \tilde{L} = \begin{bmatrix} l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

的行向量也是线性无关的. 由于对此  $n - 1$  个线性无关的行向量作平移(减去某一行向量)并不影响其相

$$\text{关性, 故 } \bar{L} = \begin{bmatrix} l_{22} - l_{12} & \cdots & l_{2n} - l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n2} - l_{12} & \cdots & l_{nn} - l_{1n} \end{bmatrix} \text{ 的行向量}$$

仍是线性无关的, 即  $\text{rank}(\bar{L}) = n - 1$ . 所以矩阵  $\bar{L}$  无0特征值. 此时控制增益参数  $k_1, k_2$  可以满足不等式(6), 使得系统达到均方有界一致.

**注1** 推论中对拓扑结构含有生成树的要求是充分条件, 并不是必要条件. 只要保证了降维后的拉普拉斯矩阵满足不等式(6), 此多智能体系统仍能实现有界一致, 见下部分的仿真实例的第一部分, 在选取的拓扑结构并不含有生成树时, 智能体的位置和速度仍能达到有界一致.

**注2** 文[15]研究了固定拓扑结构下存在白噪声干扰的一阶多智能体系统. 与文[15]相比较, 本文将系统阶数拓展到二阶, 讨论智能体间的通信是具有不确定性、更接近实际的马尔可夫切换拓扑. 因此, 本文的研究更具有实际价值.

**注3** 文[24]讨论存在未知外部有界干扰的多智能体系统, 给出了可以使系统实现一致的线性矩阵不等式条件, 而对于矩阵不等式的验证往往是比较困难的. 与文[24]相比较, 本文对于有界干扰给出了闭环系统实现均方一致时控制增益参数所满足的代数条件, 该代数条件更容易验证. 另外, 两篇文章的分析方法也完全不同.

### 4 数值仿真(Numerical simulations)

这部分将通过MATLAB仿真实例来说明上述结果的正确性. 假设  $n = 4, m = 3$ , 即离散多智能体系统存在4个智能体, 拓扑结构在3种情况间切换. 其中通信拓扑间的转移概率为

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.35 & 0.15 \end{bmatrix}.$$

**注4** 由于转移概率矩阵的对角元素不等于0, 故通信拓扑发生改变的等待时间服从几何分布. 即一种拓扑结构以概率  $1 - \gamma_{ii}$  转换为另一种拓扑结构, 以概率  $\gamma_{ii}$  维持原拓扑结构.

假设随机有界干扰  $w(k)$  服从  $[0, 1]$  上的均匀分布, 此时, 显然有  $P\{\|w(k)\| \leq 1\} = 1$ . 分别针对拓扑结构不含生成树以及含有生成树这两种情况, 仿真智能体的位置与速度的轨迹.

#### 4.1 拓扑结构不含生成树(Topological structures without spanning tree)

当拓扑结构不含生成树时, 3种可切换的结构如图1所示.

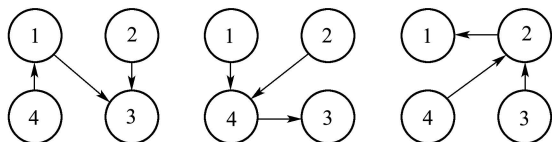


图1 不含生成树的拓扑结构图

Fig. 1 Topological structures without spanning tree

3个相应的降维的拉普拉斯矩阵分别为

$$\bar{L}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{L}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

此时容易计算降维矩阵  $\bar{L}_{11}, \bar{L}_{12}, \bar{L}_{13}$  的特征值均为1, 重数为3, 则不等式(6)中  $\lambda = 1$ , 因此, 可选取反馈满足不等式(6)的增益参数  $k_1 = 0.2, k_2 = 0.35$  进行MATLAB仿真.

图2和图3分别表示拓扑结构不含生成树时各智能体相对于智能体1的位置和速度的误差轨迹, 从图中可以看出, 各智能体的位置和速度最终达到有界一致.

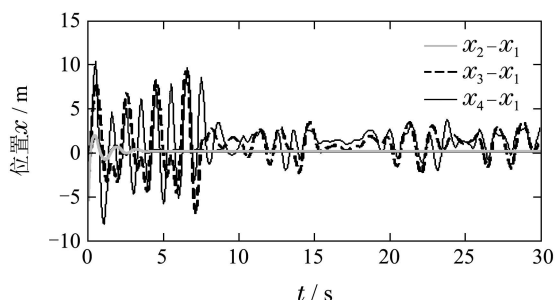


图2 拓扑结构不含生成树的各智能体位置轨迹

Fig. 2 Position trajectory of agents without spanning tree

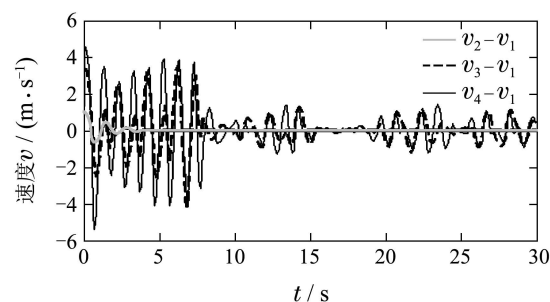


图3 拓扑结构不含生成树的各智能体速度轨迹

Fig. 3 Velocity trajectory of agents without spanning tree

#### 4.2 拓扑结构含有生成树(Topological structures with spanning tree)

当拓扑结构含有生成树时, 3种可切换的结构如图4所示.

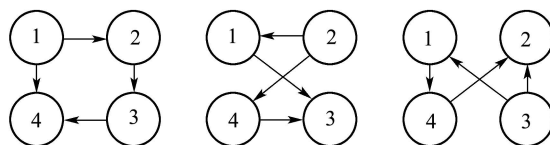


图4 含有生成树的拓扑结构图

Fig. 4 Topological structures with spanning tree

3个相应的降维的拉普拉斯矩阵分别为

$$\bar{L}_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{L}_{22} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

此时容易计算降维矩阵 $\bar{L}_{11}$ ,  $\bar{L}_{22}$ ,  $\bar{L}_{23}$ 的特征值均为2,1,1, 则可选取满足不等式(6)的反馈增益参数 $k_1 = 0.2$ ,  $k_2 = 0.3$ 进行MATLAB仿真.

图5和图6分别表示拓扑结构含有生成树时各智能体相对于智能体1的位置和速度的误差轨迹, 从图中可以看出, 各智能体的位置和速度最终达到有界一致.

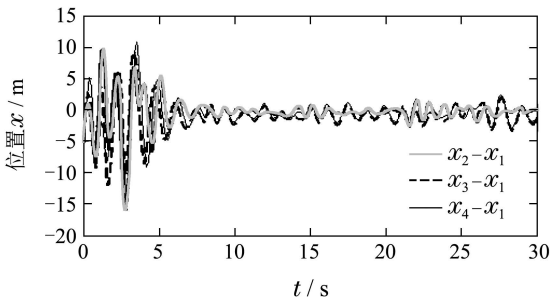


图5 拓扑结构含有生成树的各智能体位置轨迹

Fig. 5 Position trajectory of agents with spanning tree

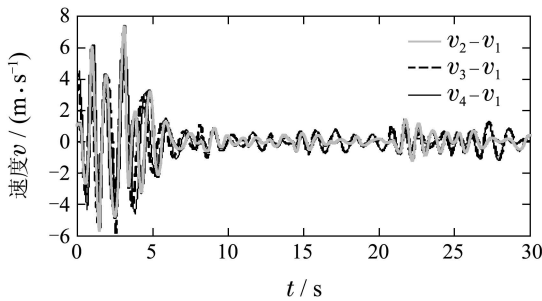


图6 拓扑结构含有生成树的各智能体速度轨迹

Fig. 6 Velocity trajectory of agents with spanning tree

**注5** 从仿真结果看, 相比文[15], 马尔可夫切换拓扑结构下的有界一致比固定拓扑结构下的有界一致波动性大, 但有界一致仍可以实现.

## 5 结论(Conclusions)

考虑离散多智能体系统, 其拓扑结构为马尔可夫切换网络, 利用矩阵分析方法以及Lyapunov函数, 得到了多智能体系统存在随机有界外部干扰的前提下实现均方有界一致时所需满足的代数条件. 最后, 通过数值仿真验证了所得结论的有效性. 接下来的工作可以考虑系统存在建模误差的情况, 将系统推广到高阶, 系统增益参数需满足的条件.

## 参考文献(References):

- [1] HU J P, HONG Y G. Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays [J]. *Physica A*, 2007, 374(2): 853 – 863.
- [2] HONG Y G, CHEN G H, BUSHNELL L. Distributed observers design for leader-following control of multi-agent networks [J]. *Automatica*, 2008, 44(3): 846 – 850.
- [3] XU X L, CHEN S Y, HUANG W, et al. Leader-following consensus of discrete-time multi-agent systems with observer-based protocols [J]. *Neurocomputing*, 2013, 118(17): 334 – 341.
- [4] ZHU M H, MARTINEZ S. Discrete-time dynamic average consensus [J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 322 – 329.
- [5] XIE D M, WANG S K. Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with fixed topology [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, 387(1): 8 – 16.
- [6] ZHANG Wenguang, GUO Zhengai. Research on consensus control for a class of high-order multi-agent systems [C] // *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*. Beijing: EI, 2011: 885 – 888. (张文广, 郭振凯. 一类高阶多智能体系统的一致控制研究 [C] // 第30届中国控制会议论文集. 北京: EI, 2011: 885 – 888.)
- [7] ZHENG Y S, WANG L. Consensus of heterogeneous multi-agent systems without velocity measurements [J]. *International Journal of Control*, 2012, 85(7): 906 – 914.
- [8] MO L P, NIU Y G, PAN T T. Consensus of heterogeneous multi-agent systems with switching jointly-connected interconnection [J]. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, 2015, 427(13): 132 – 140.
- [9] WANG L, LIU Z X, GUO L. Robust consensus of multi-agent systems with noise [C] // CHENG D Z, WU M. *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*. Beijing: Beihang University Press, 2007: 737 – 741.
- [10] YOUNG G F, SCARDOVI L, LEONARD N E. Robustness of noisy consensus dynamics with directed communication [C] // *American Control Conference*. Baltimore: IEEE, 2010, 6312 – 6317.
- [11] LIN P, JIA Y, LI L. Distributed robust  $H_\infty$  consensus control in directed networks of agents with time-delay [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(8): 643 – 653.
- [12] MO L P, JIA Y M.  $H_\infty$  consensus of a class of high-order multi-agent systems with time-delay [J]. *IET Control Theory and Application*, 2011, 5(1): 247 – 253.
- [13] MO Lipo, ZHOU Yanjie, ZHOU Hongbo. L-two – L-infinity consensus in uncertain high-order multi-agent systems with a leader [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(9): 1125 – 1131. (莫立坡, 周艳杰, 周洪波. 带Leader的不确定高阶多智能体系统的 $L_2 - L_\infty$ 一致 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(9): 1125 – 1131.)
- [14] HU J P, FENG G. Distributed tracking control of leader-follower multi-agent systems under noisy measurement [J]. *Automatica*, 2010, 46(8): 1382 – 1387.
- [15] LI T, ZHANG J F. Mean square average-consensus under measurement noises and fixed topologies: necessary and sufficient conditions [J]. *Automatica*, 2009, 45(8): 1929 – 1936.
- [16] LI T, ZHANG J F. Sampled-data based average consensus control for networks of continuous-time integrator agents with measurement noises [C] // CHENG D Z, WU M. *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*. Beijing: Beihang University Press, 2007: 716 – 720.
- [17] LI T, ZHANG J F. Sampled-data based average consensus with measurement noises: convergence analysis and uncertainty principle [J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2009, 52(11): 2089 – 2103.

- [18] SUN Y Z, ZHAO D H, RUAN J. Consensus in noisy environments with switching topology and time-varying delays [J]. *Physica A*, 2010, 389(19): 4149 – 4161.
- [19] CAO W J, MA T S, LIN Y J, et al. Distributed consensus of multi-agent systems with external disturbances [C] // *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*. Nanjing, China: IEEE, 2014: 5596 – 5601.
- [20] CHENG Y L, XIE D M. Distributed observer design for bounded tracking control of leader-follower multi-agent system in a sampled-data setting [J]. *International Journal of Control*, 2014, 87(1): 41 – 51.
- [21] ZHANG Y, TIAN Y P. Consentability and protocol design of multi-agent systems with stochastic switching topology [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1195 – 1201.
- [22] CHEN W S, LI X B. Observer-based consensus of second-order multi-agent system with fixed and stochastically switching topology via sampled data [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(3): 567 – 584.
- [23] ZHANG X X, LIU X P. Consensus of second-order multi-agent systems with disturbances generated by nonlinear exosystems under switching topologies [J]. *Journal of the Franklin Institute* 2014, 351(1): 473 – 486.
- [24] JIN X. Robust adaptive consensus protocols design for multi-agent systems with bounded disturbances and time-delays [C] // *Proceedings of 2010 Chinese Control and Decision Conference*. China: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2010: 2695 – 2700.
- [25] ZHANG Yan. Properties and applications of partitioned matrix determinant [J]. *Journal of Higher Correspondence nEducation (Natural Sciences)*, 2010, 23(6): 31 – 33.  
(张燕. 分块矩阵行列式的性质及其应用 [J]. 高等函授学报(自然科学版), 2010, 23(6): 31 – 33.)
- [26] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [27] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.

### 作者简介:

莫立坡 (1980–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为鲁棒控制、多智能体系统的一致性, E-mail: molipo@th.btbu.edu.cn;

潘婷婷 (1989–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为多智能体系统的一致性, E-mail: pantingting03@163.com.