

多智能体系统一致性的递阶结构设计

席裕庚^{1,3}, 李晓丽^{2,3†}

(1. 上海交通大学 自动化系, 上海 200240; 2. 东华大学 信息科学与技术学院, 上海 201620;
3. 系统控制与信息处理教育部重点实验室, 上海 200240)

摘要: 针对多智能体系统的一致性协作, 研究了以提高群体一致性收敛速度为目标的多层递阶拓扑结构设计问题. 首先讨论了满足物理拓扑约束并具有更优性能的递阶拓扑结构存在的可能性. 在此基础上, 根据一致性问题的收敛时间性能指标, 将递阶结构设计转化为一个与多层递阶系统中所有子图拉普拉斯矩阵特征值相关的优化问题. 通过将连通图转换为若干点导出子图和它们之间的关联图, 提出一个该优化问题的双层拓扑结构设计算法, 并基于该算法发展了满足物理拓扑结构约束的多层递阶结构设计算法. 仿真算例表明由此设计的递阶协作过程可有效加快多智能体群体一致性的收敛速度.

关键词: 多智能体系统; 分布式控制系统; 一致性; 递阶系统; 递阶协作; 协作性能

中图分类号: TP11 **文献标识码:** A

Hierarchical structure design for multi-agent consensus

XI Yu-geng^{1,3}, LI Xiao-li^{2,3†}

(1. Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;
2. School of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 201620, China;
3. Key Laboratory of System Control and Information Processing, Ministry of Education, Shanghai 200240, China)

Abstract: The hierarchical structure design problem for multi-agent consensus is investigated for optimizing the group cooperation performance. The possibility of finding a hierarchical structure with better performance for multi-agent consensus under given physical topology constraints is discussed. According to the convergence time index of consensus, the hierarchical structure design problem is then converted into an optimization problem involving the Laplacian eigenvalues of all subgraphs in the multi-layer hierarchical structure. A two-layer structure design algorithm is developed by transforming a connected graph to some vertex-induced subgraphs and their interconnection graph. Based on this algorithm, a multi-layer hierarchical structure design algorithm is derived for multi-agent consensus under given physical communication topology constraints. Moreover, numerical simulations are provided to demonstrate that the consensus velocity can be improved effectively by the developed hierarchical cooperation scheme.

Key words: multi-agent system; distributed control system; consensus; hierarchical system; hierarchical cooperation; cooperation performance

1 引言(Introduction)

群体协作系统的一个典型特征是其个体数目往往很大, 几十甚至成百上千. 在系统协作过程中, 尽管每个个体均采用较简单的分布式算法, 但整个群体状态的收敛过程涉及到庞大的个体数目, 使协作任务的收敛速度受到一定制约^[1]. 与此类自发的群体行为不同, 如果对群体的协作加以合理的组织, 则可望有效地提高合作的效率. 实际上, 在自然界的生物群体、人类社会以及人造的工程系统中广泛存在着递阶组织结

构^[2-4], 在这些组织中, 整个群体由若干子群组成, 每个子群再被分为更细的子群, 最终群体呈现一种多层递阶的结构. 在递阶的组织结构下, 个体之间的交互行为将不再是单层的, 整个群体以同层内的个体交互为基础, 采取自底向上或自顶向下的问题处理原则. 系统在递阶结构下能够得到更加有效的组织, 从而能处理更为庞大的问题^[5-6]. 在文献[7]中, 递阶的层次结构更被认为是复杂网络系统的一种核心组织原则.

在一致性问题上, 群体状态的不一致程度以指数

收稿日期: 2015-05-12; 录用日期: 2015-08-07.

†通信作者. E-mail: xlli@dhu.edu.cn; Tel.: +86 21-67792175.

国家自然科学基金项目(61203073, 61221003, 61433002, 71361130012), 教育部博士点基金项目(20120073110017, 20120075120008), 系统控制与信息处理教育部重点实验室开放课题基金项目(SCIP2012002)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61203073, 61221003, 61433002, 71361130012), Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20120073110017, 20120075120008) and Foundation of Key Laboratory of System Control and Information Processing, Ministry of Education, China (SCIP2012002).

速度缩减,且其收敛速度上界为 $e^{-\lambda_2 t}$,其中 λ_2 为群体通信拓扑结构拉普拉斯矩阵的第2小特征值^[8],因此,研究者们常用 λ_2 来刻画群体收敛的速度.根据矩阵分析的基本原理,任意单层拓扑结构的拉氏矩阵特征值与其边权之间存在正相关性.假设边权(文献[9]中称为边转移率)存在线性约束,Stephen Boyd等^[9]设计了最优的边权分布,确保系统状态尽快达到一致;对于离散一致性系统,他们讨论了最快的分布式线性平均问题,通过适当的边权分配来最小化离散平均一致性过程的迭代步数^[10].当边的权与其相关两顶点自主体的位置存在函数关系时,文献[11]给出了最大化的最优自主体位置分布.文献[12]在拉普拉斯矩阵谱优化问题的研究中,综合考虑了边的权和节点的权的调整和配置,通过缩减 λ_2 和 λ_{\max} 之间的差来获取更好的自主体协作性能.上述工作分别通过优化边权以及节点权等手段,来改善原有单层拓扑结构的谱分布.

近年来,基于递阶结构的多智能体系统和车辆网络的协作控制已得到关注和研究^[13-16],主要的研究工作可大致分为两类.第1类是直接根据协作控制的需要任意配置递阶结构,如Stephen L. Smith等^[17]针对循环追踪问题设计了一个将 N 个自主体平均分配为 n_2 个子群、每个子群包含 n_1 个自主体($N = n_1 \times n_2$)的系统分割思路,并给出了系统执行递阶循环追踪过程中收敛速度的提高率与参数 n_1, n_2 之间的关系. Shinji Hara等的研究工作进一步将其推广到其他协作问题中^[18].上述研究方案中,协作速度与系统结构参数的关系建立在拓扑结构均匀分解的思想下,没有考虑到多智能体系统拓扑结构的约束.

随着递阶协作研究的广泛开展,另一类工作从给定拓扑结构约束的前提下出发,研究以提高协作性能为目标的递阶结构设计和协作控制问题^[19-25].与上述工作不同的是,这类研究是在已有拓扑结构下,基于群体协作性能与其拓扑结构之间的内在联系,根据控制目标设计或构造合理的多层递阶协作结构.递阶协作结构设计本质上是研究群体系统中的个体于何时、以何种方式利用这些可获取的邻居信息,使整个系统的协作性能得到优化.如文献[19-20]提出了递阶一致性算法,并证明了通过对群体系统原始的单层拓扑结构进行适当的递阶分解,可使递阶的一致性过程比标准的单层一致性过程具有更快的收敛速度,但是文中缺乏具体的拓扑结构递阶分解算法.为此,文献[22-23]根据个体相对于领导者(或虚拟领导者)之间的可能最短路径将其分配到递阶结构的相应层级上,并以此为基础进行群体协作控制,使整个系统的多层协作拓扑结构呈现为一种始于领导者的生成树或类似树形结构.这些工作尽管取得了一定的研究进展,但并没有回答文献[19-20]提出的优化问题.文献[24]提出了通过融合下层网络中的若干邻近节点形成上层网络中超节点的思想来构造和描述多尺度

网络,但同样没有给出获得多层递阶结构的具体方法.在这个背景下,文献[25-26]从拓扑结构递阶分解的方法入手,研究以优化协作性能为目标的多智能体多层拓扑结构设计问题.与这项工作相对应的,复杂网络研究领域也展开了类似的关于如何发现递阶社团结构的研究,如文献[27]通过从原始复杂网络中提取所有最大派系(也称“最大团”,指复杂网络中的最大全连通子图),并以最大耦合强度为指标逐步融合最大派系形成递阶的系统结构.

本文基于上述研究工作,特别是文献[25]的基本思路和文献[26]提出的双层拓扑设计方法,综合了多智能体一致性问题的多层递阶拓扑结构设计的一般框架,并提出了具体的设计算法.论文首先基于协作性能与拓扑结构代数参数之间的关联关系,建立拓扑结构优化问题的数学模型,该模型可描述为多层拓扑结构代数参数的寻优问题,即通过把原始拓扑结构中的通信边分配到不同层次构成子图,使与子图结构相关的表征群体收敛速度的指标最优,该非线性整数规划问题的穷举求解是一个NP难问题.为提高计算效率,本文通过对拉普拉斯矩阵相关特征值和特征向量的分析,设计了一个将任意连通图分解为若干分离子图的双层拓扑结构设计算法,通过对双层拓扑结构设计算法的递归调用,进一步给出了多层递阶拓扑结构的设计算法,最后通过数字仿真验证了算法的有效性.

2 系统描述与预备知识 (System description and preliminaries)

本文以基本的一阶标准一致性算法为例研究以优化协作性能为目标的递阶拓扑结构设计.考虑到描述的完整性和连续性,首先对协作系统及其基本性质做如下描述:

一阶多智能体系统为 $\dot{x}_i = u_i, i = 1, \dots, N$,其中: x_i 为智能体 i 的状态, u_i 为其控制输入,由智能体根据自身及通信邻居的信息构造.整个群体的拓扑结构可由无向通信图 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 描述, \mathcal{V} 为参与协作的智能体节点集合, \mathcal{E} 为整个群体中的通信连边集合.单个智能体的通信邻居集可据此定义为 $N_i = \{j \in \mathcal{V} | (i, j) \in \mathcal{E}\}$.

由文献[1, 20],标准的一致性算法形如

$$u_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)), \quad (1)$$

其中相互通信的智能体 i 和 j 之间的影响系数规范为 $a_{ij} = 1$.定义 $x = \text{col}(x_1, \dots, x_N)$,则群体动力学方程可描述为

$$\dot{x} = -Lx(t), \quad (2)$$

其中 $L(G) = [l_{ij}]$ 为通信拓扑结构 G 的拉普拉斯矩阵,它的每个非对角线元素满足:若 $(i, j) \in \mathcal{E}$,则 $l_{ij} = -a_{ij}$,否则 $l_{ij} = 0$;而 L 的对角线元素为同一行的非对角线元素之和的负值 $l_{ii} = -\sum_{j \in N_i} a_{ij}$.

对于上述无向图 G ,其拉普拉斯矩阵 L 存在 N 个非

负特征值:

$$\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_N(G) = \lambda_{\max}(G),$$

其中第2小特征值 $\lambda_2(G)$ 也称为群体系统代数连通度. 研究发现, $\lambda_2(G)$ 的取值与系统一致性协作的可行性和收敛速度等重要性质直接相关: 首先, 定义 $\delta(t) = x(t) - \frac{1}{N}1_N^T x(0)1_N$ 为群体状态不一致度, 其中 1_N 为维数为 N 的全1向量. 根据文献[1], 在标准的一致性算法(1)的作用下, 群体状态不一致度以指数速度缩减:

$$\frac{\|\delta(t)\|_2}{\|\delta(0)\|_2} \leq e^{-\lambda_2 t}. \quad (3)$$

整体系统状态达到一致的时间可近似表达为 $\frac{1}{\lambda_2(G)} \ln \frac{\|\delta(0)\|_2}{\varepsilon}$, 其中 ε 为预先给出的群体状态不一致度的允许偏差, 它是一致性算法(1)停止的判断准则. 由于 ε 和 $\delta(0)$ 与算法(1)本身无关, 因此, 可将 $\frac{1}{\lambda_2(G)}$ 作为群体一致性收敛时间的测度.

为了便于后面的讨论, 这里引用图拉普拉斯矩阵特征值的几个重要性质.

引理 1^[28-29] 将无向图 G 的特征值记为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N = \lambda_{\max}$, 则

- i) $L(G)$ 总是对称的半正定矩阵;
- ii) $\lambda_1 = 0$;
- iii) 若 $G \in C$ (C 为所有连通图的集合), 则 $\lambda_2 > 0$, 即拉普拉斯矩阵 $L(G)$ 的0特征值的重数为1; 否则 $L(G)$ 的0特征值重数等于 G 中连通子图的数目;
- iv) 对于任意向量 $z = \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_N)$, 满足

$$z^T L z = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} a_{ij} (z_j - z_i)^2.$$

对于无向图 G 的拉普拉斯矩阵 $L(G)$, 其特征多项式和谱分别表示为 $\det(\lambda I - L(G))$ 和 $\sigma(G) = \lambda_1(G), \lambda_2(G), \dots, \lambda_{\max}(G)$. 对于非连通图, 具有下面的特征:

引理 2 (文献[29]中定理3.1) 假设非连通图 G' 由 s 个分离的子图 G_1, G_2, \dots, G_s 组成, 即 $G' = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_s$ 且 $G_i \cap G_j = \emptyset, i \neq j$, 则有

$$\det(\lambda I - L(G')) = \prod_{k=1}^s \det(\lambda I - L(G_k)),$$

以及

$$\sigma(G') = \sigma(G_1) \cup \sigma(G_2) \cup \dots \cup \sigma(G_s).$$

3 递阶分解结构及其实施框架(The hierarchical decomposition structure and its implementation framework)

3.1 一致性问题的递阶结构(The hierarchical structure of consensus)

本文讨论的一致性问题的递阶结构具有连通的拓扑结构, 其

多层递阶分解结构具有下列特征^[19,25]: 除了最高层, 递阶结构每一层中包含着若干个分离的子图, 每个子图同时在上层中被映射为一个节点, 并通过上层的子图发生关联; 递阶结构的最高层为一个连通图; 而最低层包含群体中的所有智能体节点. 图1为递阶组织结构的示意图.

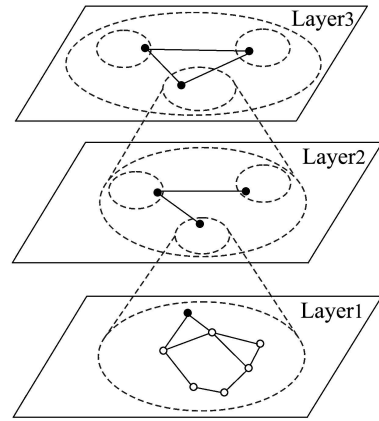


图 1 递阶结构示意图

Fig. 1 A graph of hierarchical structure

基于上述递阶结构的一致性协作可采用自底向上的执行过程^[19,25]: 首先, 标准的一致性算法(1)在最低层中每个子图内部智能体之间执行, 当最低层所有子图中智能体的状态不一致度小于可允许的偏差值时, 该层的一致性操作结束, 算法(1)上移至第2层, 其中的每个子图开始新的一致性演化过程. 通过这种方式, 一致性协作将在每层的每个子图内进行, 并不断向上推移, 直到最上层的节点实现状态一致.

3.2 一致性问题递阶结构设计的建模(Modeling of hierarchical structure design for consensus)

定义群体协作系统的物理通信约束拓扑结构为 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}) \in C$. 在此结构约束下, 构造 r 层递阶结构 $G_j^i, j = 1, \dots, s^i, i = 1, \dots, r$, 其中 s^i 为第 i 层中的子图数目, 则第 i ($1 \leq i \leq r$)层的子图为 $G_1^i, \dots, G_{s^i}^i$, 要求这些子图的顶点和边集合满足如下约束:

$$(\mathcal{V}_1^i \cup \dots \cup \mathcal{V}_{s^i}^i) \subseteq \mathcal{V}, (\mathcal{E}_1^i \cup \dots \cup \mathcal{E}_{s^i}^i) \subseteq \mathcal{E},$$

特别地 $(\mathcal{V}_1^1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_{s^1}^1) = \mathcal{V}, s^r = 1$.

根据上一节描述的一致性问题的递阶实施过程, 可以看出: 要提高整体系统一致性的收敛速度, 其基本要求是递阶结构中的所有子图(除单节点子图外, 因单节点子图不存在于子图内的一致性收敛过程)都能满足 $\lambda_2(G_j^i) \geq \lambda_2(G)$, 其中 G_j^i 为递阶结构中第 i 层的第 j 个子图. 如果 $\frac{1}{\lambda_2(G_j^i)} \ll \frac{1}{\lambda_2(G)}$, 每层子图的收敛时间远小于单层拓扑结构 G 下的一致收敛时间, 则即使系统经过多层递阶协作, 也可能比 G 下的一次协作速度快.

图2表示一个群体的物理通信约束拓扑结构, 其中 $\lambda_2(G) = 0.5505$. 现将 G 构建为图3所示的双层递

阶结构,其中图3(b)表示递阶结构的第1层,包含了3个子图 G_1^1, G_2^1, G_3^1 ,满足 $\lambda_2(G_j^1) = 3 > \lambda_2(G), j = 1, \dots, 3$.图3(a)表示递阶结构的第2层,满足 $\lambda_2(G_1^2) = 3 > \lambda_2(G)$.

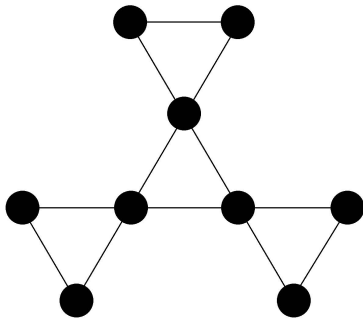
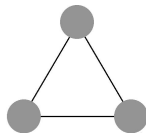
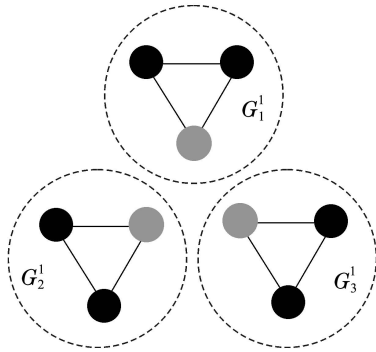


图2 9个个体的物理通信约束拓扑结构
Fig. 2 The physical communication constraint topology of 9 agents



(a) 第2层 G_1^2



(b) 第1层 G_1^1, G_2^1, G_3^1

图3 基于图2构成的双层递阶结构(其中黑色节点仅参与第1层的一致性协作,灰色节点按照递阶协作分别参与两层协作过程)

Fig. 3 The two-layer hierarchical structure based on Fig. 2 (The black nodes perform consensus cooperation on the first layer, while the grey nodes take part in consensus cooperation on both layers according to the hierarchical cooperation scheme)

图2所示多智能体系统的整体一致性收敛时间测度为 $t_p = \frac{1}{0.5505} \approx 1.82$.与之相比较,图3所示相应递阶系统的第1层收敛时间测度为 $t_1 = \max\{\frac{1}{\lambda_2(G_j^1)}, j = 1, \dots, 3\} = \frac{1}{3}$,第2层收敛时间测度为 $t_2 = \frac{1}{\lambda_2(G_1^2)} = \frac{1}{3}$,则递阶协作的总时间远小于原始单层协作时间 $t = t_1 + t_2 \approx 0.67 < t_p$.

记递阶结构中第 i 层所有子图(除单节点子图外)第2小特征值的最小值为 λ_2^i ,即

$$\lambda_2^i = \min\{\lambda_2(G_j^i), j = 1, 2, \dots, s^i\}, \quad (4)$$

则其倒数 $\frac{1}{\lambda_2^i}$ 近似刻画了该层的收敛时间,而整个 r 层递阶群体一致性收敛的总时间测度为 $\sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_2^i}$.

因此,以优化一致性协作性能为目标的递阶拓扑结构设计可描述为:设系统的整体拓扑结构约束为 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}) \in C$,基于 \mathcal{V} 和 \mathcal{E} 构造多层递阶拓扑结构 $G_j^i, j = 1, \dots, s^i, i = 1, \dots, r$,使得

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_2^i}, \\ &\text{s.t. } \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_2^i} < \frac{1}{\lambda_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

该问题是一个多层拓扑结构代数参数的寻优问题,其中涉及到多层结构中每个子图的拉普拉斯矩阵第2小特征值,需要确定原始拓扑结构的每条边出现在多层结构中的哪一层以及哪一子图中,该问题具有复杂的非线性整数规划的特征,是一个NP难问题.

注1 虽然上面图2和图3所示的例子表明,求解(5)给出的优化问题可以得到合理的递阶结构,加快整体一致性收敛的速度,但对于任意拓扑结构 G ,并不能保证问题(5)一定有可行解.例如某些强关联的拓扑结构中每一个体已能获得其他所有个体的信息,其一致性收敛指标已达到最优,进一步分解为递阶结构不能满足式(5)中的约束条件,此时分解问题无解.

4 递阶拓扑结构设计算法(A hierarchical topology structure design algorithm)

4.1 双层拓扑结构设计算法(A two-layer topology structure design algorithm)

本节讨论基于 G 的所有节点的连接关系构造一个双层拓扑结构,其中底层为 G 的若干点导出分离子图 $G_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1), \dots, G_s = (\mathcal{V}_s, \mathcal{E}_s)$,第2层为底层子图相对于 G 的关联拓扑关系.

参考式(5),从优化底层一致性收敛时间的角度考虑,笔者期望最小化所有子图 G_1, \dots, G_s 最小非零特征值的倒数(每个子图的一致性收敛时间测度,单节点子图除外)的最大值,该目标具体为

$$\begin{aligned} &\min \lambda_2^*, \\ &\text{s.t. } \lambda_2^* = \min\{\lambda_2(G_i), i = 1, \dots, s\} > \lambda_2(G). \end{aligned} \quad (6)$$

底层的点导出子图 G_1, \dots, G_s 的设计可通过去除 G 的某些连边获得.根据引理1性质iii),当无向连通图 $G \in C$ 通过删除若干条边 \mathcal{E}_0 形成 G' (由 s 个分离的子图 G_1, \dots, G_s 构成 $G' = G - \mathcal{E}_0$)后, G' 中连通子图的数目等于 $L(G')$ 的0特征值重数,即

$$\lambda_1(G') = \dots = \lambda_s(G') = 0, \lambda_{s+1}(G') > 0.$$

进一步根据引理2,所有子图 G_1, \dots, G_s 的特征值都包含在图 G' 的特征值集合中. 因此

$$\begin{aligned} & \min\{\lambda_2(G_i), i = 1, \dots, s\} = \\ & \min\{\lambda_i(G') > 0\} = \lambda_{s+1}(G'). \end{aligned}$$

问题(6)转化为:优化被删除的边集 \mathcal{E}_0 ,使所获得的新图 G' 的拉普拉斯矩阵第 $s+1$ 个特征值尽量大.

$$\begin{cases} \max_{G'=G-\mathcal{E}_0} \lambda_{s+1}(G'), \\ \text{s.t. } \lambda_{s+1}(G') > \lambda_2(G), \\ \lambda_1(G') = \dots = \lambda_s(G') = 0. \end{cases} \quad (7)$$

注2 根据文献[29],删除图的边后,其拉普拉斯矩阵特征值不增,新图 G' 的 λ_2 不可能比原图 G 的 λ_2 大,但新图 G' 的 $\lambda_3, \lambda_4 \dots$ 可以大于原图 G 的 λ_2 . 特别当删除图的边导致原图分解为 s 个子图后,每个连通子图的 λ_2 在新图 G' 中至少已是 λ_{s+1} ,有可能满足式(7)的约束条件. 此外,对于分解中出现某个子图为单节点(即该节点保留独立进入上层)的情况下,其不存在一致性收敛的问题,也无相应的 λ_2 ,它不出现在式(5)的约束中,但在式(7)的约束中可以得到反映.

为了使集合 $\{\lambda_k(G'), 1 \leq k \leq s\}$ 中的最大值 $\lambda_s(G')$ 达到0时, $\lambda_{s+1}(G')$ 尽可能大,在删边引起 $\lambda_s(G')$ 减少一定量的前提下,应使 $\lambda_{s+1}(G')$ 的减小量尽量小,因此可考虑以下述准则对 G 删边:

准则1 相对于删除其他边,应删除导致特征值 λ_{s+1} 和 λ_s 减小量比值 $\frac{\Delta\lambda_{s+1}}{\Delta\lambda_s}$ 最小的边.

按上述准则,可以用试凑方法来获得满足条件的删除边,但这将导致极大的计算量. 为此,把删除图 G 中某条边 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 看成是对该边的权值 $a_{ij} > 0$ 不断减小直至为0的过程,借助于灵敏度分析的方法来观察削弱哪些边的权值可以使上述比值最小.

对于图 G ,其拉普拉斯矩阵为 L ,假定图 G 中某条边的权减小了一个极小的值 μ ,相应的拉普拉斯矩阵变为 $\mathcal{L} = L - \mu L^I$,其中 $L^I = [l_{ij}^I]$ 是一个对称的半正定矩阵,其元素满足:若边 (i, j) 的权减小了 μ ,则 $l_{ij}^I = -1$,否则 $l_{ij}^I = 0$; 对角线元素 $l_{kk}^I = -\sum_{h=1}^N l_{kh}^I$.

对于选定了某条边的情况,即 L^I 确定时, $\mathcal{L} = L - \mu L^I$ 可看作是 \mathcal{L} 关于 μ 的函数,其特征值 $\lambda_k(\mathcal{L})$ 也是 μ 的函数. 用 $\lambda_k(\mathcal{L})$ 在 $\mu = 0$ 处的一阶泰勒展开来逼近它,可得

$$\lambda_k(\mathcal{L}(\mu)) \approx \lambda_k(\mathcal{L}(0)) + \mu \frac{d\lambda_k(\mathcal{L}(\mu))}{d\mu} \Big|_{\mu=0}. \quad (8)$$

将拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L} = L - \mu L^I$ 关于其特征值 λ_k 的单位右特征向量记为 v_k ,则 λ_k 可描述为下列函数:

$$\lambda_k = v_k^T \mathcal{L} v_k = v_k^T (L - \mu L^I) v_k. \quad (9)$$

根据式(9), $\lambda_k(\mathcal{L})$ 对于 μ 的梯度为

$$\frac{d\lambda_k}{d\mu} = \frac{dv_k^T}{d\mu} (L - \mu L^I) v_k - v_k^T L^I v_k +$$

$$v_k^T (L - \mu L^I) \frac{dv_k}{d\mu}.$$

注意到 $L - \mu L^I$ 是实对称矩阵,则有

$$\begin{aligned} & \frac{dv_k^T}{d\mu} (L - \mu L^I) v_k + v_k^T (L - \mu L^I) \frac{dv_k}{d\mu} = \\ & 2 \frac{dv_k^T}{d\mu} (L - \mu L^I) v_k = 2 \frac{dv_k^T}{d\mu} \lambda_k v_k = \\ & 2 \lambda_k \frac{dv_k^T v_k}{d\mu} = 0, \end{aligned}$$

因此

$$\frac{d\lambda_k(\mathcal{L}(\mu))}{d\mu} \Big|_{\mu=0} = -v_k^T (L) L^I v_k (L), \quad (10)$$

其中 $v_k(L)$ 是相应于 $\lambda_k(L)$ 的单位右特征向量. 合并式(8)和式(10),则 $\lambda_k(\mathcal{L}(\mu))$ 可近似表达为

$$\lambda_k(\mathcal{L}(\mu)) = \lambda_k(L) - \mu v_k^T (L) L^I v_k (L). \quad (11)$$

根据单层优化分解问题的目标(7)和准则1,这里将选择最小化 $\frac{\|\Delta\lambda_{s+1}\|}{\|\Delta\lambda_s\|} = \frac{\lambda_{s+1}(L) - \lambda_{s+1}(\mathcal{L}(\mu))}{\lambda_s(L) - \lambda_s(\mathcal{L}(\mu))}$ 的边,并将其权减小 μ . 由式(11)该问题即为

$$\min_{L^I} \frac{v_{s+1}^T (L) L^I v_{s+1} (L)}{v_s^T (L) L^I v_s (L)}. \quad (12)$$

根据引理1性质iv),式(12)可进一步化为

$$\min_{(i,j)} \left\{ \frac{(v_{s+1,i}(L) - v_{s+1,j}(L))^2}{(v_{s,i}(L) - v_{s,j}(L))^2}, (i, j) \in \mathcal{E} \right\}, \quad (13)$$

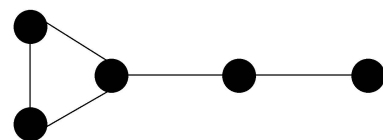
其中 $v_{x,h}(L)$ 表示向量 $v_x(L)$ 的第 h 个分量.

根据以上分析,可通过使 $\frac{(v_{s+1,i}(L) - v_{s+1,j}(L))^2}{(v_{s,i}(L) - v_{s,j}(L))^2}$

最小化,找到使 $\frac{\|\Delta\lambda_{s+1}\|}{\|\Delta\lambda_s\|}$ 最小的边,以 μ 为步长,削弱

该边的权系数,得到新的拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} . 按上述过程不断迭代,直到 $\lambda_s(\mathcal{L}) = 0$,则相应矩阵 \mathcal{L} 中所有非零权所对应的边与所有智能体节点将构成原图的 s 个分离子图 G_1, \dots, G_s .

在原图通过删边变为 s 个分离子图后,通过对每个子图 $G_i, i = 1, \dots, s$ 选取其中一个节点为领导者(对单节点子图即为该节点),将 s 个子图虚拟化为 s 个节点,因为已被删除的边 \mathcal{E}_0 正是子图 G_1, \dots, G_s 在原始图 G 中相互关联的纽带,它们构成了这 s 个虚拟节点的关联边. 这样,可在递阶结构的第2层定义关联图 G^{intercon} ,它由导出子图 G_1, \dots, G_s 所对应的虚拟节点以及这些虚拟节点的关联边所组成,如图4所示. G^{intercon} 是一个连通图,根据优化问题的要求,其 λ_2 应大于原图 G 的 λ_2 ,且满足式(5)的约束条件.



(a) G

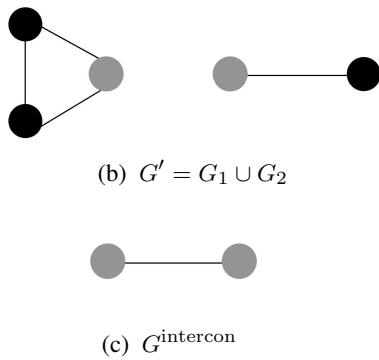


图4 原始图 G 点导出子图 G' 和关联图 G^{intercon}
Fig. 4 The original graph G , the induced subgraphs G' and the interconnection graph G^{intercon}

利用这一基本思想, 双层拓扑结构设计算法可给出如下:

双层结构设计算法 $A_d(G \in C, s)$:

$G \in C$: 原始无向连通图. s : 期望获得的点导出子图数目.

Step 1 $\mathcal{L} = L(G)$;

Step 2 While $\lambda_s(\mathcal{L}) > 0$ do

查找:

$$\arg \min_{(i,j)} \left\{ \frac{(v_{s+1,i}(L) - v_{s+1,j}(L))^2}{(v_{s,i}(L) - v_{s,j}(L))^2}, (i, j) \right.$$

$\left. \in \mathcal{E} \right\}$,

置 $T_{\text{emp}} = \mathcal{L} - \mu L^I$, 其中: $l_{ij}^I = l_{ji}^I = -1$,

$l_{ii}^I = l_{jj}^I = 1$;

置 $\mathcal{L} = T_{\text{emp}}$;

End while;

Step 3 基于 \mathcal{L} 选择适当的子图领导者节点, 形成集合 $\mathcal{V}^{\text{Leader}}$;

Step 4 If $G^{\text{intercon}} \in C$ 且

$$\frac{1}{\lambda_{s+1}(G')} + \frac{1}{\lambda_2(G^{\text{intercon}})} < \frac{1}{\lambda_2(G)},$$

优化的双层拓扑结构为 $\{G', G^{\text{intercon}}\}$.

End

4.2 递阶拓扑结构设计算法 (A hierarchical topology structure design algorithm)

对于给定的拓扑结构约束 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}) \in C$, 可以递归调用上节的双层拓扑结构设计算法 $A_d(G, s)$, 得到多层递阶的结构.

若预先给定递阶拓扑结构第1层的期望子图数目为 s^1 , 执行 $A_d(G, s^1)$, 如果存在解则获得了一个临时的双层结构 $\{G_1^1 \cup \dots \cup G_{s^1}^1 = G', G^{1,\text{intercon}}\}$, 其中: 第1层为 $G_1^1 \cup \dots \cup G_{s^1}^1 = G'$, 第2层仅包含一个子图 $G_1^2 = G^{1,\text{intercon}}$. 此时, 若整个分解过程停止, 双层拓扑结构设计完成, 否则, 按如上的过程针对第2层 $G_1^2 = G^{1,\text{intercon}}$ 执行 $A_d(G^{1,\text{intercon}}, s^2)$ (给定 s^2), 并在解存在时将其替换为一个优化的两层结构图: 位于第2层的 $G_1^2 \cup \dots \cup G_{s^2}^2$ 和位于第3层的关联图 $G^{2,\text{intercon}}$. 这个过程将一直进行, 直到 $A_d(G^{r-1,\text{intercon}}, s^r)$ 无解. 此时, 递阶结构形成, $G^{r-1,\text{intercon}}$ 为其最高层. 图5为上述递阶分解过程的一个简单示意图.

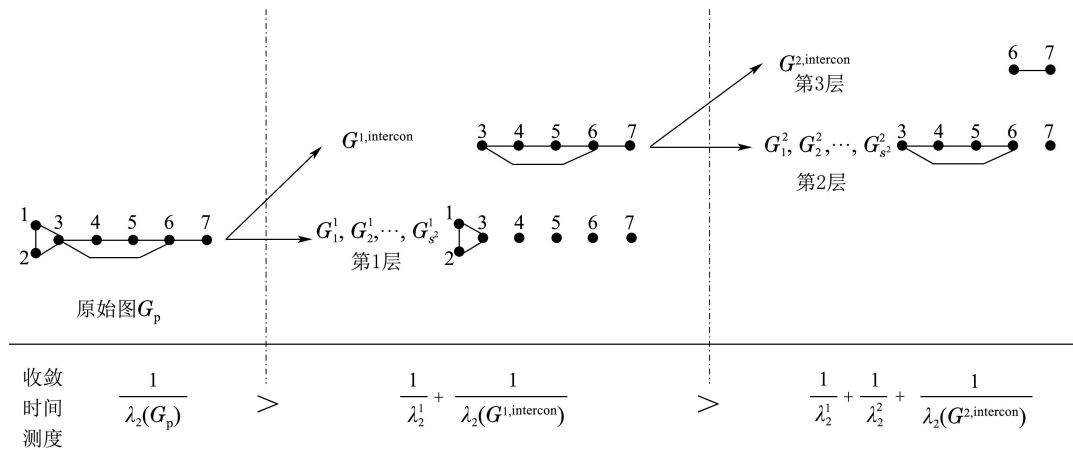


图5 递阶拓扑设计基本过程的阐明示例

Fig. 5 An example to illustrate the basic course of hierarchical topology design

从上面的描述可以看到: 递阶拓扑结构设计本质上是对临时位于当前结构最高层的连通图执行双层拓扑结构设计算法 $A_d(G^{i-1,\text{intercon}}, s^i)$ 并判断其解是否存在的递归过程, 这个过程一直进行, 直到对于当前最高层连通图的双层拓扑结构设计算法无解. 所以, 递阶分解的总层数 r 只有在递阶分解的整个过程结束后才能确定.

注3 上面描述中每次调用双层结构设计算法

$A_d(G^{i-1,\text{intercon}}, s^i)$ 时, 底层子图的数目 s^i 都预先给定, 而通常情况下 s^i 并不能预先得到, 为了保证求解的完备性, 在递阶拓扑结构设计中每一次的双层结构设计都遍历了 s^i 从2到 $|\mathcal{V}(G^{i-1,\text{intercon}})|$ 的所有可能取值, 这里 $|\mathcal{V}(G^{i-1,\text{intercon}})|$ 表示图 $G^{i-1,\text{intercon}}$ 中节点数目.

根据上述设计思想, 下面给出求解优化问题(5)及相应递阶拓扑结构的设计算法 $A_H(G \in C)$, 其中 P_M 和 S_M 分别记录算法执行过程中的最优性能指标

和对应的临时递阶结构; S_t^{i-1} 表示算法执行过程中某临时 i 层结构, P_t^{i-1} 是与之相对应的性能指标.

递阶结构设计算法 $A_H(G \in C)$:

Step 1 初始化

$$P_M = \frac{1}{\lambda_2(G)};$$

$$G^{0,intercon} = G;$$

$$P_t^0 = \frac{1}{\lambda_2(G)};$$

$$S_t^0 = G;$$

$$i = 1;$$

Step 2 执行递归子程序:

$[P_M, S_M] = B(i, G^{i-1,intercon}, P_M, P_t^{i-1}, S_t^{i-1});$
 递归子程序:

$$[P_M, S_M] = B(i, G^{i-1,intercon}, P_M, P_t^{i-1}, S_t^{i-1})$$

For $S^i = 2, \dots, |\mathcal{V}(G^{i-1,intercon})| - 1$ do

 执行双层结构设计算法 $A_d(G^{i-1,intercon}, s^i)$

 If $(A_d(G^{i-1,intercon}, s^i)$ 有解)

$$P_t^i = P_t^{i-1} - \frac{1}{\lambda_2(G^{i-1,intercon})} +$$

$$\frac{1}{\lambda_2^i} + \frac{1}{\lambda_2(G^{i,intercon})};$$

$$S_t^i = \{(S^{i-1} \setminus G^{i-1,intercon}),$$

$$(G_1^i, \dots, G_{s^i}^i), G^{i,intercon}\};$$

$i = i + 1;$

 If $(s^i > 2)$

$$[P_M, S_M] = B(i, G^{i-1,intercon}, P_M, P_t^{i-1}, S_t^{i-1});$$

 Else if $(P_t^i < P_M)$

$$P_M = P_t^i;$$

$$S_M = S_t^i;$$

 End

 Else if $(P_t^{i-1} < P_M)$

$$P_M = P_t^{i-1};$$

$$S_M = S_t^{i-1};$$

 End

End

注 4 本文以基本的一阶标准一致性算法为例展开了以优化协作性能为目标的递阶拓扑结构设计研究, 事实上, 针对其他的拓扑优化问题, 只要能得多智能体协作控制的性能优化目标转化为群体拓扑结构拉普拉斯矩阵相应特征值的代数寻优问题, 都可以借助本文的框架和思路进行分析和求解, 因此, 本文提出的相关思路和方法不限于一阶一致性问题性能寻优, 还可以推广到其他协作问题和协作情境中.

5 仿真(Simulations)

考虑图6所示的群体系统单层拓扑结构 G , 假定图中每条边的权均为1, 其拉普拉斯矩阵第2小特征值为 $\lambda_2(G) = 0.2258$. 在该单层拓扑结构下执行标

准的一致性算法(1), 则智能体的状态逐渐收敛至一致值. 图7显示了智能体的状态在 x 和 y 坐标上与其一致值之间偏差的演化过程.

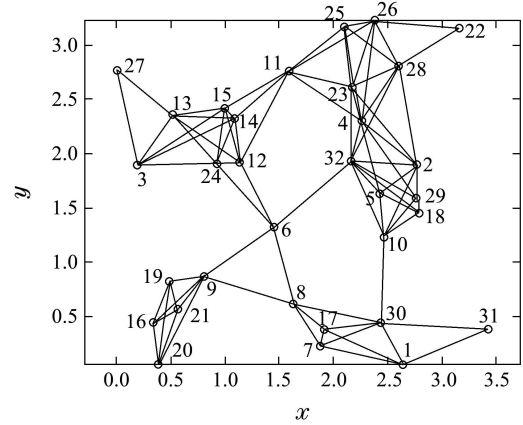
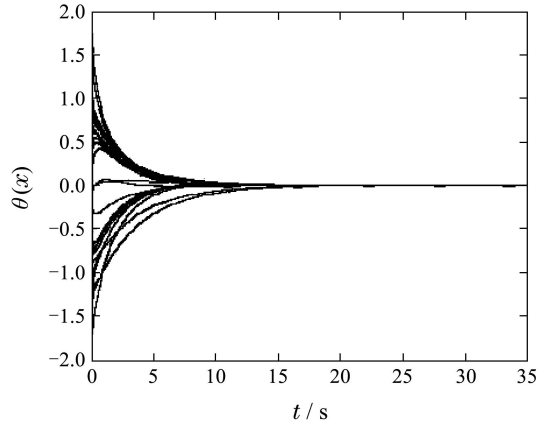
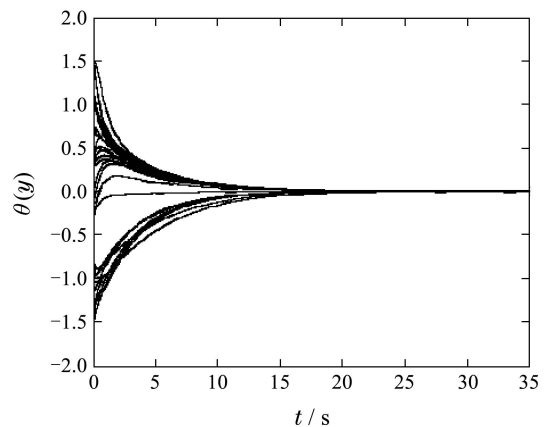


图6 系统拓扑图

Fig. 6 The topology graph of the system



(a) 智能体在 x 轴上的状态偏差



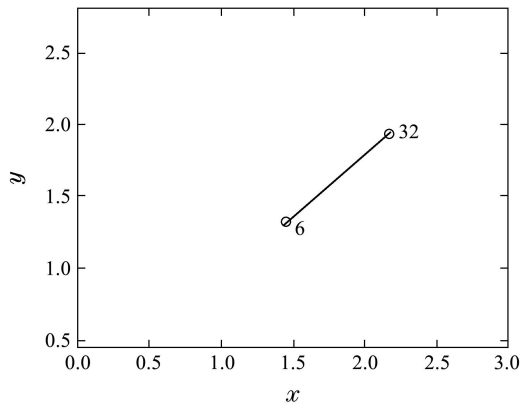
(b) 智能体在 y 轴上的状态偏差

图7 式(1)作用下图6所示多智能体系统状态偏差的演化过程

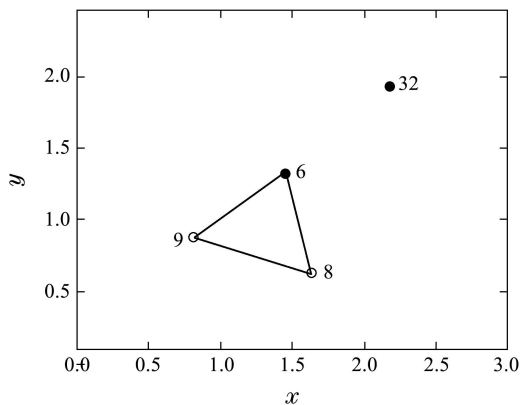
Fig. 7 The evolving course of state difference for the multi-agent system shown in Fig. 6 steered by equation (1)

对图6的单层连通拓扑结构执行算法 A_H , 获得了一个3层的最优递阶结构, 如图8所示. 其中, 每层

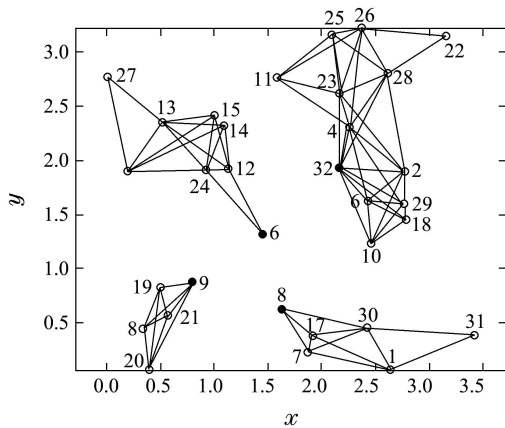
子图的第2小特征值下界分别为: $\lambda_2^1 = 1.3278$, $\lambda_2^2 = 3$, $\lambda_2^3 = 2$. 整个递阶结构的性能指标为 $\sum_1^3 \frac{1}{\lambda_2^i} = 1.5865$, 优于原始单层图的性能指标 $\frac{1}{\lambda_2(G)} = 4.429$, 这说明在允许的误差范围内, 递阶结构下群体能更快获得状态收敛. 对比图7和图9的仿真结果, 在可允许的偏差范围内, 原始单层图的一致性收敛过程需近20s时间, 而在递阶结构下智能体状态大约第7s时已基本收敛.



(a) 第3层

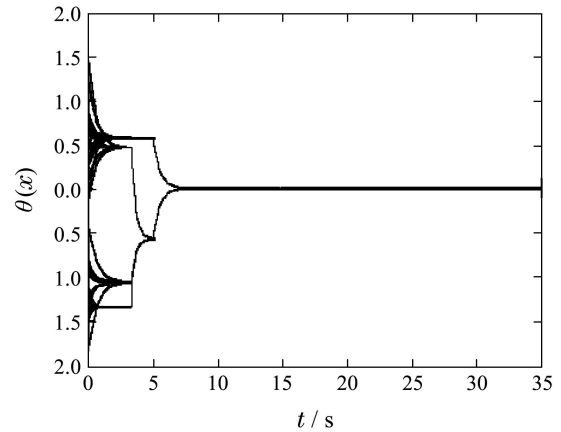


(b) 第2层

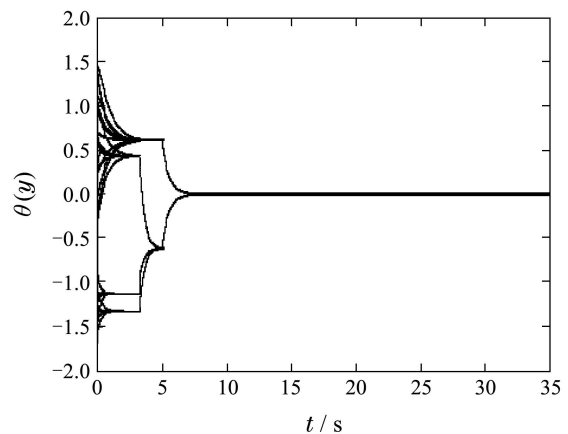


(c) 第1层

图8 对图6系统执行算法 A_H 获得的递阶拓扑结构
Fig. 8 The hierarchical structure obtained by executing Algorithm A_H for system in Fig. 6



(a) 智能体在x轴上的状态偏差



(b) 智能体在y轴上的状态偏差

图9 对递阶结构图8执行递阶一致性算法的结果

Fig. 9 The convergence result of hierarchical consensus with this hierarchical structure in Fig. 8

6 结论(Conclusions)

本文针对多智能体系统的一致性协作, 研究了以提高群体一致性收敛速度为目标的多层递阶拓扑结构设计问题. 首先针对一致性问题的收敛时间指标, 将递阶拓扑结构设计转化为一个关于系统结构特征值的优化问题. 通过分析该优化问题, 提出了一个将连通图优化分解为若干点导出子图和它们之间关联图的双层拓扑结构设计算法, 并基于该算法的递归调用给出了多层递阶结构的优化设计算法. 在满足智能体物理通信约束的前提下, 所设计的递阶结构把原来的群体一致性过程改变为多层次、小规模群体有组织的一致性过程, 有望加快整体系统的一致性收敛过程. 本文的研究在一定程度上揭示了系统的整体性能与其多层递阶组织结构之间的关系.

参考文献(References):

[1] 关永强, 纪志坚, 张霖, 等. 多智能体系统能控性研究进展 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(4): 421 - 431.

- (GUAN Yongqiang, JI Zhijian, ZHANG Lin, et al. Recent developments on controllability of multi-agent systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(4): 421 – 431.)
- [2] HORLING B, LESSER V. A survey of multi-agent organizational paradigms [J]. *Knowledge Engineering Review*, 2004, 19(4): 281 – 316.
- [3] PAULUS M, KRISTOUFEK L. Worldwide clustering of the corruption perception [J]. *Physica A*, 2015, 428: 351 – 358.
- [4] ZHOU Z, LIN S, XI Y G. A fast network partition method for large-scale urban traffic networks [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2013, 11(3): 359 – 366.
- [5] DAMBA A, WATANABE S. Hierarchical control in a multiagent system [J]. *International Journal of Innovative Computing Information and Control*, 2008, 4(12): 3091 – 3100.
- [6] ARENAS A, DIAZ-GUILERA A, PEREZ-VICENTE C J. Synchronization reveals topological scales in complex networks [J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(11): 1 – 4.
- [7] CLAUSET A, MOORE C, NEWMAN M E J. Hierarchical structure and the prediction of missing links in networks [J]. *Nature*, 2008, 453(7191): 98 – 101.
- [8] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [9] SUN J, BOYD S, XIAO L, et al. The fastest mixing markov process on a graph and a connection to a maximum variance unfolding problem [J]. *SIAM Review*, 2006, 48(4): 681 – 699.
- [10] XIAO L, BOYD S. Fast linear iterations for distributed averaging [J]. *Systems and Control Letters*, 2004, 53(1): 65 – 78.
- [11] KIM Y, MESBAHI M. On maximizing the second smallest eigenvalue of a state-dependent graph [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(1): 116 – 120.
- [12] SHAFI S Y, ARCAK M, GHAOUI L E. Graph weight allocation to meet laplacian spectral constraints [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(7): 1872 – 1877.
- [13] ADAM E, MANDIAU R. Roles and hierarchy in multi-agent organizations [C] // *The 4th International Central and Eastern European Conference on Multi-Agent Systems, CEEMAS 2005, number 3690 in LNAI*. Hungary: Springer, 2005: 539 – 542.
- [14] WILLIAMS A, GLAVASKI S, SAMAD T. Formations of formations: hierarchy and stability [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Portland, OR, USA: IEEE, 2004, 4: 2992 – 2997.
- [15] HU J, CAO J. Hierarchical cooperative control for multiagent systems with switching directed topologies [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, in press.
- [16] TANG Y, HONG Y. Hierarchical control design of nonlinear systems based on approximate simulation [C] // *The 2012 12th International Conference on Control Automation Robotics and Vision (ICARCV)*. Guangzhou: IEEE, 2012: 566 – 571.
- [17] SMITH S L, BROUCKE M E, FRANCIS B A. A hierarchical cyclic pursuit scheme for vehicle networks [J]. *Automatica*, 2005, 41(6): 1045 – 1053.
- [18] TSUBAKINO D, HARA S. Eigenvector-based intergroup connection of low rank for hierarchical multi-agent dynamical systems [J]. *Systems and Control Letters*, 2012, 61(2): 354 – 361.
- [19] EPSTEIN M, LYNCH K, JOHANSSON K, et al. Using hierarchical decomposition to speed up average consensus [C] // *International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress*. Seoul, South Korea: IFAC, 2008: 612 – 618.
- [20] EPSTEIN M. *Managing information in networked and multi-agent control systems* [D]. America: California Institute of Technology, 2007.
- [21] WANG W, WEN C, LI Z, et al. Hierarchical decomposition based distributed adaptive control for output consensus tracking of uncertain nonlinear systems [C] // *2013 American Control Conference*. Washington, DC: IEEE, 2013: 4921 – 4926.
- [22] MARTIN S. Multi-agent flocking under topological interactions [J]. *Systems & Control Letters*, 2014, 69(3): 53 – 61.
- [23] MAIDENS J, LI M Y. Global Lyapunov functions and a hierarchical control scheme for networks of robotic agents [C] // *2013 American Control Conference*. Washington, DC: IEEE, 2013: 4050 – 4055.
- [24] SELLE C, WEST M. Multiscale networks for distributed consensus algorithms [C] // *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 held Jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference, CDC/CCC 2009*. Shanghai: IEEE, 2009: 4753 – 4758.
- [25] LI X, XI Y. Hierarchically decomposing multi-agent system to accelerate group consensus [C] // *Asian Control Conference*. Kaohsiung: IEEE, 2011: 347 – 352.
- [26] LI X, XI Y. Double-layer topology design based on physical communication network [C] // *The 13th International Conference on IEEE Control Automation Robotics and Vision (ICARCV)*. Singapore: IEEE, 2014: 925 – 930.
- [27] ZHANG Z, WANG Z. Mining overlapping and hierarchical communities in complex networks [J]. *Physica A*, 2015, 421: 25 – 33.
- [28] FAX J A, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465 – 1476.
- [29] MOHAR B. The laplacian spectrum of graphs [J]. *Graph Theory Combinatorics and Applications*, 1991, 18(7): 871 – 898.

作者简介:

席裕庚 (1946–), 男, 上海交通大学自动化系教授, 目前研究方向为预测控制理论与应用、大系统理论与应用, E-mail: yxg@sjtu.edu.cn;

李晓丽 (1980–), 女, 东华大学信息科学与技术学院副教授, 目前研究方向为多智能体系统分布式协作控制与优化, E-mail: xlli@dhu.edu.cn.