

跳变系统在给定时间内的有限频段 H_∞ 控制

周超洁, 栾小丽[†], 刘 飞

(江南大学 自动化学院 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘要: 本文针对特定频段的干扰信号, 为多模态跳变系统设计给定时间控制器, 在给定时间内设法使各模态轨迹在期望范围受限运动, 且具有更强的干扰抑制能力. 所提控制方案不仅从时间角度为降低跳变系统控制器设计的保守性提供了思路, 频段信息的引入也从频率角度降低了设计结果的保守性. 仿真示例验证了所提算法的有效性以及优越性.

关键词: 跳变系统; 有限频段; 给定时间控制; 干扰抑制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Finite frequency H_∞ control for jump systems over given time interval

ZHOU Chao-jie, LUAN Xiao-li[†], LIU Fei

(Key Laboratory for Advanced Process Control of Light Industry of the Ministry of Education, Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: To guarantee the state trajectories of different modes stay within the desired bound in given time interval and have better disturbance rejection level, the given time controller is designed for jump systems subject to external disturbances with specific frequency. The proposed control scheme provides new thought for reducing engineering conservation of controller design for jump systems not only from the perspective of time, but also from frequency domain by introducing frequency information into controller design. Simulation example verifies the effectiveness and advantages of the proposed algorithm.

Key words: jump systems; finite frequency; given time control; disturbance rejection

1 引言(Introduction)

现代工程领域中, 存在很多既含时间状态演化, 又有事件模态驱动的混杂动态系统, 特别地, 由于随机突变现象引起系统的行为、参数甚至结构发生变化, 若变化符合Markov特性, 则称此类系统为Markov跳变系统^[1-2]. 基于Lyapunov渐近稳定理论, 跳变系统的随机稳定与镇定、鲁棒控制、 H_∞ 控制等已经得到了充分的研究, 形成了比较完备的理论体系^[3-6]. 很多实际系统, 例如生化反应系统、通信网络系统、机器人操控系统等, 人们更感兴趣的常常是其能否在有限的短时间内满足暂态要求. 因此如何在生产实际要求的短时间内, 对跳变系统的暂态行为进行分析与综合, 同样受到了学者们的关注, 其有限时间稳定^[7]、有限时间镇定^[8]、有限时间 H_∞ 控制^[9]等问题的解决, 为降低跳变系统一般渐近稳定的工程保守性提供了方法.

在上述跳变系统研究中, 无论是基于渐近稳定理论的无穷时间区域 H_∞ 控制, 还是基于有限短时间稳

定理的有限时间 H_∞ 控制, 其 H_∞ 性能指标是个全频段的指标, 即要求所有子系统对全频域的噪声具有同样的干扰抑制水平. 而除了白噪声, 任何噪声的绝大多数能量都集中在一定频率范围内, 由于不能凸显有限频率范围特性, 导致已有的 H_∞ 控制方法具有较大的保守性. 广义KYP(Kalman-Yakubovich-Popov)引理的提出^[10], 为解决有限频段 H_∞ 控制问题带来了全新的思路. 由于广义KYP引理能够直接刻画和处理特定频段性能指标, 使得基于有限频段的 H_∞ 控制方法^[11-12]、滤波器设计^[13-14]和故障检测^[15-16]等受到了广泛关注, 但以上文献主要针对基于时间演化的所谓单一模态系统, 对于既含时间演化又有事件驱动的多模态跳变系统还没有文献涉及, 进一步, 如何考虑跳变系统在给定时间内的有限频段 H_∞ 控制问题更具挑战性.

本文不仅考虑具有特定频段的噪声干扰信号, 而且考虑系统在给定时间内的暂态性能, 从频率和时间

收稿日期: 2015-05-15; 录用日期: 2015-08-21.

[†]通信作者. E-mail: xlluan@jiangnan.edu.cn; Tel.: +86 510-85326295.

本文责任编辑: 俞立.

国家自然科学基金项目(61473137)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61473137).

两个角度,研究基于有限频段的跳变系统给定时间 H_∞ 控制器设计方法.通过限定各子系统传递函数的最大奇异值小于给定值,确保整个系统在特定频段具有 H_∞ 干扰抑制水平.再利用GKYP引理,结合有限短时间稳定理论,获取给定时间 H_∞ 控制器存在的充分条件.与已有的全频段给定时间 H_∞ 控制方法相比,该方法具有更好的扰动抑制能力.

2 问题描述(Problem statement)

给定完备概率空间 (Ω, F, Θ) ,考虑如下连续时间Markov跳变系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(r(t))x(t) + B(r(t))u(t) + B_\omega(r(t))\omega(t), \\ z(t) = C(r(t))x(t) + D_\omega(r(t))\omega(t), \\ x(0) = x_0, r(0) = r_0, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 是控制向量, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ 为被控输出, $\omega(t)$ 是有限频段干扰输入,且 $\omega(t) \in L_2[\varpi_1, \varpi_2]$. $A(r(t)), B(r(t)), B_\omega(r(t)), C(r(t)), D_\omega(r(t))$ 是适当维数的与模态相关的系数矩阵,其中 $r(t)$ 代表了系统的模态,取值于有限集合 $S = \{1, 2, \dots, s\}$,在 t 时刻, $r(t) = i, i \in S$. x_0, r_0 分别代表了系统的初始状态与初始模态.系统模态间的跳变率可表示为

$$P_r \{r_{t+\Delta t} = j | r_t = i\} = \begin{cases} \pi_{ij}\Delta t + o(\Delta t), & i \neq j, \\ 1 + \pi_{ii}\Delta t + o(\Delta t), & i = j, \end{cases}$$

其中 $\Delta t > 0, o(\Delta t)$ 为 Δt 的无穷小量,且对于每一模态都有 $\pi_{ii} = -\sum_{j=1, i \neq j}^s \pi_{ij}, \pi_{ij} > 0, i \neq j$. 为方便描述分别用 $A_i, B_i, B_{\omega i}, C_i, D_{\omega i}$ 来表征 $A(r(t)), B(r(t)), B_\omega(r(t)), C(r(t)), D_\omega(r(t))$. 则系统(1)可写为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + B_{\omega i} \omega(t), \\ z(t) = C_i x(t) + D_{\omega i} \omega(t). \end{cases} \quad (2)$$

考虑如下状态反馈控制器:

$$u(t) = K_i x(t),$$

可得闭环控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}_i x(t) + B_{\omega i} \omega(t), \\ z(t) = C_i x(t) + D_{\omega i} \omega(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\bar{A}_i = A_i + B_i K_i$.

本文主要对噪声干扰的频率特性进行研究,从而实现特定频段性能指标的刻画,故需要如下广义KYP引理.

引理1(适用于多模态系统的广义KYP引理^[10]) 对于闭环系统(3),给定对称矩阵 Π 和 Ξ ,以下描述是

等价的:

1) 有限频段不等式:

$$\begin{pmatrix} G^i(j\omega) \\ I \end{pmatrix}^T \Pi \begin{pmatrix} G^i(j\omega) \\ I \end{pmatrix} < 0, \varpi_1 \leq \omega \leq \varpi_2,$$

2) 存在对称矩阵 P_i, Q_i , 且 $Q_i > 0$, 且

$$E^T \Xi E + F^T \Pi F < 0,$$

$$\text{其中: } E = \begin{pmatrix} \bar{A}_i & B_{\omega i} \\ I & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} C_i & D_{\omega i} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

注1 由于本文考虑的是处于中频段干扰及其有限频段 H_∞ 性能指标,故取

$$\Xi = \begin{pmatrix} -Q_i Y_i + j\varpi_c Q_i \\ * & -\varpi_1 \varpi_2 Q_i \end{pmatrix}, \varpi_c = \frac{(\varpi_1 + \varpi_2)}{2},$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix},$$

则描述1)与 $\|G(j\omega)\|_\infty^{\varpi_1 < \omega < \varpi_2} < \gamma$ 等价,即与 H_∞ 性能指标相对应.若考虑其他性能指标,则 Π 可取其他形式.若考虑低频段或高频段的干扰噪声,则 Ξ 可取其他形式.

另外本文考虑的是闭环系统(3)在有限时间内的暂态行为,需作如下定义.

定义1 对于系统(3),如果对于 $\omega(t) = 0$,存在 $0 < c_1 < c_2$, 其中: c_1 是状态初始域, c_2 是轨迹运动上界, $T > 0, R > 0$,使下式成立:

$$x^T(0) R x(0) \leq c_1^2 \Rightarrow$$

$$E \{x^T(t) R x(t)\} \leq c_2^2, \forall t \in [0, T],$$

则称系统(3)对于 (c_1, c_2, T, R) 是有限时间稳定的.

在给出主要结果之前还需如下引理:

引理2 (Reciprocal Projection Lemma^[17]) 对于任意给定正定矩阵 P , 不等式 $\Psi + S + S^T < 0$ 与以下线性矩阵不等式等价:

$$\begin{pmatrix} \Psi + P - [W]_r & S^T + W^T \\ * & -P \end{pmatrix} < 0,$$

其中 $[W]_r = W + W^T$.

引理3 (Gronwall不等式^[18]) 令 $v(t)$ 为非负函数,且

$$v(t) \leq a + b \int_0^t v(s) ds, 0 \leq t < T,$$

那么对于常数 $a, b \geq 0$,可以得到如下不等式

$$v(t) \leq a e^{bt}, 0 \leq t < T.$$

引理4 (投影定理^[19]) 对给定矩阵 Γ, Λ, Θ , 存在矩阵 F 满足 $\Gamma F \Lambda + (\Gamma F \Lambda)^T + \Theta < 0$, 当且仅当 $\Gamma^\perp \Theta \Gamma^{\perp T} < 0, \Lambda^{\perp T} \Theta \Lambda^{\perp} < 0$.

3 主要结果(Main results)

以下定理针对有限频段的干扰信号,给出使系

统(3)具有特定频段干扰抑制水平的H_∞控制器存在的充分条件.

定理 1 对于已知参数 $\gamma > 0$, 若存在对称矩阵 $\bar{Y}_i, \bar{Q}_i > 0$, 矩阵 \bar{K}_i 和 \bar{F}_i 满足以下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -\bar{Q}_i & \bar{\Theta}_{12} & 0 & 0 \\ * & \bar{\Theta}_{22} & \bar{F}_i^T B_{\omega i} & C_i^T \\ * & * & -\gamma^2 I & D_{\omega i}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

则闭环系统(3)满足有限频段H_∞性能指标 γ , 且控制器参数由下式得到:

$$K_i = \bar{K}_i \bar{F}_i^{-1},$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_{12} &= \bar{Y}_i + j\omega_c \bar{Q}_i - \bar{F}_i, \quad \bar{Y}_i = \bar{F}_i^T Y_i \bar{F}_i, \\ \bar{\Theta}_{22} &= -\omega_1 \omega_2 \bar{Q}_i + [A_i \bar{F}_i + B_i \bar{K}_i]_r. \end{aligned}$$

证 对式(4)左乘右乘 $\text{diag}\{F_i, F_i, I, I\}$, 其中 $F_i = \bar{F}_i^{-1}$, 得

$$\begin{bmatrix} -Q_i & \Theta_{12} & 0 & 0 \\ * & \Theta_{22} & F_i^T B_{\omega i} & C_i^T \\ * & * & -\gamma^2 I & D_{\omega i}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0,$$

其中:

$$\begin{aligned} \Theta_{12} &= Y_i + j\omega_c Q_i - F_i, \quad Q_i = F_i^T \bar{Q}_i F_i, \\ Y_i &= F_i^T \bar{Y}_i F_i, \quad \Theta_{22} = -\omega_1 \omega_2 Q_i + [F_i^T \bar{A}_i]_r. \end{aligned}$$

利用Schur补引理对上式进行变形得

$$\begin{bmatrix} -Q_i & \Theta_{12} & 0 \\ * & \Theta_{22} + C_i^T C_i & \Theta_{23} \\ * & * & \Theta_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Theta_{23} &= F_i^T B_{\omega i} + C_i^T D_{\omega i}, \\ \Theta_{33} &= -\gamma^2 I + C_i^T D_{\omega i}. \end{aligned}$$

进一步对式(5)整理得

$$J \Xi J^T + H \Pi H^T + [\Gamma F \Lambda]_r < 0, \quad (6)$$

其中:

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \Xi = \begin{pmatrix} -Q_i & Y_i + j\omega_c Q_i \\ * & -\omega_1 \omega_2 Q_i \end{pmatrix},$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & C_i & D_{\omega i} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^T,$$

$$\Gamma = (-I \quad \bar{A}_i \quad B_{\omega i})^T, \quad \Lambda = (0 \quad I \quad 0).$$

利用引理4, 式(6)可转化为:

$$\begin{aligned} U (J \Xi J^T + H \Pi H^T) U^T &< 0, \\ W^T (J \Xi J^T + H \Pi H^T) W &< 0, \end{aligned} \quad (7)$$

其中:

$$\begin{aligned} U &= \Gamma^\perp = \begin{pmatrix} \bar{A}_i^T & I & 0 \\ B_{\omega i}^T & 0 & I \end{pmatrix}, \\ W &= \Lambda^\perp = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

式(7)可改写为

$$E^T \Xi E + F^T \Pi F < 0. \quad (8)$$

利用广义KYP引理1, 式(8)等价于

$$\begin{pmatrix} G^i(j\omega) \\ I \end{pmatrix}^T \Pi \begin{pmatrix} G^i(j\omega) \\ I \end{pmatrix} < 0,$$

$$G^{iT}(j\omega) G^i(j\omega) - \gamma^2 I < 0,$$

即 $\|G(j\omega)\|_\infty^{\omega_1 < \omega < \omega_2} < \gamma$, 即满足有限频段H_∞性能指标.

注 2 由于定理条件(4)中存在复变量, 用线性矩阵不等式工具箱无法处理, 所以需对其进行转换. 根据文献[16], 不等式 $S_1 + jS_2 < 0$ 可等同为 $\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{bmatrix} < 0$, 则条件(4)转化为

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_1 & \bar{S}_2 \\ -\bar{S}_2 & \bar{S}_1 \end{pmatrix} < 0, \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= \begin{pmatrix} -\bar{Q}_i & \bar{Y}_i - \bar{F}_i & 0 & 0 \\ * & \bar{\Theta}_{22} & B_{\omega i} & \bar{F}_i^T \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix}, \\ \bar{S}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_c \bar{Q}_i & 0 & 0 \\ -\omega_c \bar{Q}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

此外, 闭环系统(3)不仅需要具有特定频段的抗干扰能力, 还需确保其有限时间稳定. 以下定理给出系统(3)的有限时间稳定充分条件.

定理 2 已知参数 $\alpha > 0, c_2 > c_1 > 0, T > 0$, 若存在对称矩阵 $\bar{Y}_i, \bar{P}_i > 0$ 和矩阵 \bar{F}_i, \bar{K}_i , 满足以下线性矩阵不等式:

$$\begin{pmatrix} -[\bar{F}_i]_r & \bar{F}_i^T A_i^T + \bar{K}_i^T B_i^T + \bar{P}_i & \bar{M} \\ * & (\pi_{ii} - \alpha) \bar{P}_i & 0 \\ * & * & -\bar{P} \end{pmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$R^{-1} \lambda_1 < \bar{P}_i < R^{-1} \lambda_2, \quad (11)$$

$$c_1^2 \lambda_2 e^{\alpha T} - c_2^2 \lambda_1 < 0, \quad (12)$$

则系统(3)关于 (c_1, c_2, T, R) 是有限时间稳定的, 且控制器参数由下式得到

$$K_i = \bar{K}_i \bar{F}_i^{-1},$$

其中:

$$\bar{M} = (\sqrt{\pi_{i1}}\bar{F}_i^T \sqrt{\pi_{i2}}\bar{F}_i^T \cdots \sqrt{\pi_{i(i-1)}}\bar{F}_i^T \\ \sqrt{\pi_{i(i+1)}}\bar{F}_i^T \cdots \sqrt{\pi_{is}}\bar{F}_i^T),$$

$$\bar{P} = \text{diag}\{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \cdots, \bar{P}_{i-1}, \bar{P}_{i+1}, \cdots, \bar{P}_s\}.$$

证 首先证明系统的有限时间稳定性, 取Lyapunov 函数为 $V(x) = x^T(t)P_i x(t)$, 对式(10)左乘右乘 $\text{diag}\{F_i, I, \cdots, I\}$, 得

$$\begin{pmatrix} -[F_i]_r & \bar{A}_i^T + K_i^T B_i^T + F_i^T \bar{P}_i & \bar{N} \\ * & (\pi_{ii} - \alpha)\bar{P}_i & 0 \\ * & * & -\bar{P} \end{pmatrix} < 0,$$

其中:

$$\bar{N} = (\sqrt{\pi_{i1}} \sqrt{\pi_{i2}} \cdots \sqrt{\pi_{i(i-1)}} \sqrt{\pi_{i(i+1)}} \cdots \sqrt{\pi_{is}}).$$

利用Schur补引理对上式进行变形得

$$\begin{pmatrix} -(F_i + F_i^T) + \Delta & \bar{A}_i^T + F_i^T \bar{P}_i \\ * & (\pi_{ii} - \alpha)\bar{P}_i \end{pmatrix} < 0,$$

其中:

$$\bar{P}_i = P_i^{-1} = R^{-1/2} \tilde{P}_i^{-1} R^{-1/2}, \\ \Delta = \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j - \pi_{ii} P_i.$$

对上式左乘右乘 $\text{diag}\{I, P_i\}$, 可得

$$\begin{pmatrix} -[F_i]_r + \Delta & \bar{A}_i^T P_i + F_i^T \\ * & (\pi_{ii} - \alpha)P_i \end{pmatrix} < 0. \quad (13)$$

利用引理2, 令

$$\Psi = \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j - \alpha P_i, \quad S^T = \bar{A}_i^T P_i, \\ P = (\alpha - \pi_{ii})P_i, \quad W = F_i^T,$$

则式(13)可转化为

$$\bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j - \alpha P_i < 0. \quad (14)$$

对Lyapunov函数作弱无穷小算子运算得

$$\zeta V(x(t)) = x^T(t) \left\{ \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j + \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i \right\} x(t),$$

则

$$\zeta V(x(t)) - \alpha V(x(t)) = \\ x^T(t) \left\{ \sum_{j=1}^s \pi_{ij} P_j + \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i - \alpha P_i \right\} x(t),$$

由式(14)可得

$$\zeta V(x(t)) < \alpha V(x(t)),$$

对上不等式两边同时取0到t的积分并取其数学期望得

$$E\{V(x(t))\} < V(x(0)) + \alpha \int_0^t E\{V(x(s))\} ds, \quad (15)$$

根据引理3, 式(15)可转化为

$$E\{V(x(t))\} < V(x(0))e^{\alpha t}, \quad (16)$$

则不等式(16)左边可转化为

$$E\{V(x(t))\} = E\{x^T(t)P_i x(t)\} = \\ E\{x^T(t)R^{1/2}\tilde{P}_i R^{1/2}x(t)\} \geq \\ \lambda_{\min}(\tilde{P}_i)E\{x^T(t)Rx(t)\}, \quad (17)$$

不等式(16)右边可转化为

$$V(x(0))e^{\alpha t} = x^T(0)R^{1/2}\tilde{P}_i R^{1/2}x(0)e^{\alpha t} \leq \\ \lambda_{\max}(\tilde{P}_i)x^T(0)Rx(0)e^{\alpha t} \leq \\ \lambda_{\max}(\tilde{P}_i)c_1^2 e^{\alpha t}. \quad (18)$$

结合条件(17)与(18), 不等式(16)可转化为

$$E\{x^T(t)Rx(t)\} \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} c_1^2 e^{\alpha t}.$$

结合条件(12)可有

$$E\{x^T(t)Rx(t)\} \leq c_2^2,$$

则系统(3)关于 (c_1, c_2, T, R) 是有限时间稳定的.

最后, 综合定理1和定理2所得结果, 得到基于给定时间的有限频段 H_∞ 最优控制器存在的充分条件.

定理3 已知参数 $\alpha > 0, c_2 > c_1 > 0, T > 0$, 若存在对称矩阵 $\bar{Y}_i, \bar{P}_i > 0, \bar{Q}_i > 0$ 和矩阵 \bar{F}_i, \bar{K}_i , 通过以下算法可以得到系统在给定时间内的有限频段 H_∞ 控制器参数 K_i 和最优 H_∞ 性能指标 γ :

$$\min \gamma, \\ \text{s.t. 式(4)(10) - (12).}$$

注3 考虑全频段干扰噪声, 该闭环系统(3)的状态反馈 H_∞ 控制器 K_i 可通过求解以下LMIs得到

$$\lambda_3 R < X_i < \lambda_4 R, \quad (19)$$

$$c_1^2 \lambda_4 - c_2^2 e^{-\alpha T} \lambda_3 < 0, \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma & B_{\omega i} & X_i C_i^T & \Delta \\ * & -\gamma^2 I & D_{\omega i} & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & \chi \end{pmatrix} < 0, \quad (21)$$

其中:

$$\Gamma = A_i X_i + B_i Y_i + X_i A_i^T + Y_i B_i^T - \alpha X_i + \pi_{ii} X_i,$$

$$\delta = (\sqrt{\pi_{i1}} X_i \sqrt{\pi_{i2}} X_i \cdots \sqrt{\pi_{i(i-1)}} X_i \\ \sqrt{\pi_{i(i+1)}} X_i \cdots \sqrt{\pi_{is}} X_i),$$

$$\chi = \text{diag}\{X_1, X_2, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_s\},$$

所求控制器参数为

$$K_i = Y_i X_i^{-1}.$$

证明过程类似文献[9], 由于篇幅限制此处略去. 那么通过以下优化算法可以得到系统在给定时间内的全频段最优 H_∞ 性能指标 γ :

$$\min \gamma, \\ \text{s.t. 式(19) - (21).}$$

4 仿真示例(Simulation example)

考虑如下参数的三模态连续时间马尔科夫跳变系统:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 2 & 0.81 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.26 \\ 0.9 & 1.13 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & -1.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}, B_{11} = [1 \ 1]^T,$$

$$B_{12} = [1 \ 1]^T, B_{13} = [2 \ -1]^T,$$

$$D_{\omega 11} = 0.2, D_{\omega 12} = 0.3, D_{\omega 13} = 1.1,$$

$$B_{\omega 1} = [-0.4 \ 0.3]^T, B_{\omega 2} = [0.2 \ 0.26]^T,$$

$$B_{\omega 3} = [0.5 \ -0.3]^T, C_{11} = [0.5 \ 0.4],$$

$$C_{12} = [0.1 \ 0.3], C_{13} = [0.4 \ 0.3],$$

其跳变率矩阵为

$$\Omega = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & -0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & -0.9 \end{bmatrix},$$

取 $c_1^2 = 1, c_2^2 = 5, R = I_4, T = 6, \alpha = 0.1, r_0 = 1$, 系统初始状态为 $x_0 = [1.5 \ 0.2]^T$, 干扰输入为 $\omega(t) = \sin(4\pi/3t)$, 由定理1可得控制器参数为

$$K_1 = [-2.4914 \ -4.4651],$$

$$K_2 = [-1.5602 \ -4.5250],$$

$$K_3 = [-19.9697 \ -7.2392].$$

图1为系统的模态跳变图, 图2给出系统未受控制作用下开环系统的状态响应曲线, 图3给出了闭环控制系统的状态轨迹图. 可以看出系统的状态响应在未经控制器作用时是不稳定的, 经过控制器作用后, 系统轨迹在给定时间内受限运动.

此外, 本文还讨论了频带宽度对H_∞性能指标γ的影响, 见表1. 从表1可以看出, 频带宽度越窄, H_∞性能指标γ越小, 即干扰抑制能力越强. 同时, 系统其他关键参数的耦合关系见表2, 由表2可以看出, 随着干扰抑制需求的降低, 状态轨迹允许的最大初始域c₁有所增加, 最小上界c₂逐渐降低.

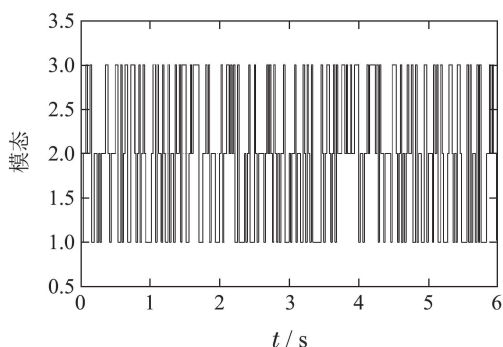


图 1 闭环系统模态跳变图

Fig. 1 The curve of jump modes of closed-loop system

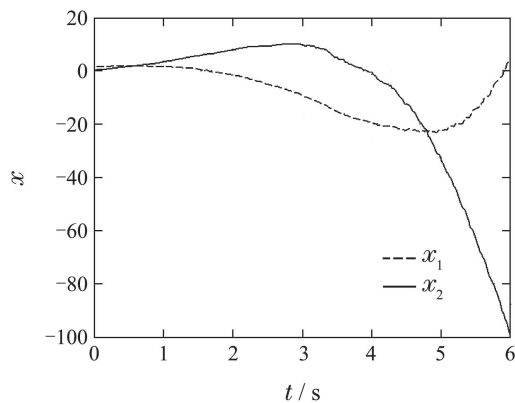


图 2 开环系统状态响应曲线

Fig. 2 The state response curve of open-loop system

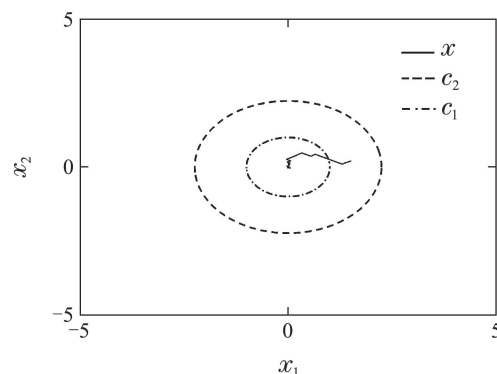


图 3 闭环控制系统状态轨迹

Fig. 3 The state trajectory of closed-loop system

表 1 频段宽度与最优性能指标γ的关系

Table 1 Relationship between the frequency width and optimal performance specification γ

ϖ_1	ϖ_2	γ
$6\pi/12$	$13\pi/12$	1.1094
$7\pi/12$	$13\pi/12$	1.1091
$8\pi/12$	$13\pi/12$	1.1094
$9\pi/12$	$13\pi/12$	1.1094
$10\pi/12$	$21\pi/12$	1.1094
$10\pi/12$	$19\pi/12$	1.1094
$10\pi/12$	$17\pi/12$	1.1094
$10\pi/12$	$15\pi/12$	1.1094
$10\pi/12$	$13\pi/12$	1.1094

表 2 α, γ与最大c₁和最小c₂的关系

Table 2 Relationship between α, γ, the maximum c₁ and the minimum c₂

α	0.2	0.2	0.2	0.2	0.15	0.10	0.05
γ	1.4	1.6	1.8	2.0	2.0	2.0	2.0
c ₁	0.0053	0.0066	0.0078	0.0078	0.0168	0.0234	0.0301
c ₂	2.6958	2.6185	2.6024	2.5926	2.5465	2.5564	2.5194

不仅如此, 通过定理3中的优化算法, 可得最优H_∞性能指标为γ=1.1026. 而相同初始条件下, 对全频段噪声情况下的有限时间状态反馈控制器进行设计, 可

得全频域干扰噪声情况下的最优 H_∞ 性能指标为 $\gamma=1.1457$.可见,本文基于有限频段的抗干扰能力相对于全频域情形提高了约3.8%.

总之,以上对于仿真结果的验证,较好地显示出了本文所得结果的有效性与优越性.

5 结语(Conclusions)

本文主要针对噪声干扰的频率特性,设计了跳变系统在给定时间内的有限频段 H_∞ 控制器.本文所得结果从时间和频率两尺度入手,提高了被控系统的干扰抑制水平,降低了设计的保守性.本文还通过数值仿真,更加清晰地凸显出该设计的正确性与优越性.此外,后期工作将围绕带有通信时滞的跳变系统的有限频段 H_∞ 控制器设计进行研究.

参考文献(References):

- [1] SWORDER D. Feedback control of a class of linear systems with jump parameters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, 14(1): 9 – 14.
- [2] WONHAM W M. *Random Differential Equations in Control Theory* [M]. New York, United States: Academic Press, INC., 1970.
- [3] FANG Y. A new general sufficient condition for almost sure stability of jump linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(3): 378 – 382.
- [4] BOUKAS E K, YANG H. Exponential stabilizability of stochastic systems with Markovian jumping parameters [J]. *Automatica*, 1999, 35(8): 1437 – 1441.
- [5] WANG Z, QIAO H, BURNHAM K J. On stabilization of bilinear uncertain time-delay stochastic systems with Markovian jumping parameters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(4): 640 – 646.
- [6] SUN Minhui, ZOU Yun, XU Shengyuan. Robust H_∞ control of Markov jump system [J]. *Control and Decision*, 2005, 20(12): 1370 – 1373.
(孙敏慧, 邹云, 徐胜元. 马尔可夫切换系统的鲁棒 H_∞ 控制 [J]. *控制与决策*, 2005, 20(12): 1370 – 1373.)
- [7] AMATO F, AMBROSINO R, ARIOLA M, et al. Finite-time stability of linear time-varying systems with jumps [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1354 – 1358.
- [8] ZUO Z, LI H, LIU Y, et al. On finite-time stochastic stability and stabilization of Markovian jump systems subject to partial information on transition probabilities [J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2012, 31(6): 1973 – 1983.
- [9] HE S P, LIU F. Robust Finite-time H_∞ control of stochastic jump systems [J]. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2010, 8(6): 1336 – 1341.
- [10] IWASAKI T, HARA S. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 41 – 59.
- [11] ZHANG H, WANG R, WANG J, et al. Robust finite frequency H_∞ static-output-feedback control with application to vibration active control of structural systems [J]. *Mechatronics*, 2014, 24(4): 354 – 366.
- [12] WANG R, JING H, YAN F, et al. Optimization and finite-frequency H_∞ control of active suspensions in in-wheel motor driven electric ground vehicles [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(2): 468 – 484.
- [13] LEE D H. An improved finite frequency approach to robust H_∞ filter design for LTI systems with polytopic uncertainties [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2013, 27(11): 944 – 956.
- [14] ZHAO Changzhong, LUAN Xiaoli, LIU Fei. Finite-time H_∞ filtering for Markov jump system based on finite frequency domain [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(03): 406 – 412.
(赵长钟, 栾小丽, 刘飞. 基于有限频段的Markov跳变系统有限时间 H_∞ 滤波 [J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(03): 406 – 412.)
- [15] LONG Y, YANG G H. Fault detection in finite frequency domain for networked control systems with missing measurements [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, 350(9): 2605 – 2626.
- [16] LONG Y, YANG G H. Fault detection and isolation for networked control systems with finite frequency specifications [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(3): 495 – 514.
- [17] APKARIAN P, TUAN H D, BERNUSSOU J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and H_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(12): 1941 – 1946.
- [18] IWASAKI T, SKELTON R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. *Automatica*, 1994, 30(8): 1307 – 1317.
- [19] GAHINET P, NEMIROVSKII A, LAUD A J, et al. *LMI Control Toolbox User's Guide* [M]. Natick, MA: The Math. Works Inc., 1995.

作者简介:

周超洁 (1992–), 女, 硕士研究生, 研究方向为混杂系统鲁棒控制, E-mail: chaojie.zhou@126.com;

栾小丽 (1979–), 女, 博士, 副教授, 研究方向为复杂系统先进控制及应用, E-mail: xlluan@jiangnan.edu.cn;

刘飞 (1965–), 男, 博士, 教授, 研究方向为先进过程控制理论及应用, E-mail: fliu@jiangnan.edu.cn.