

小型四旋翼无人机建模与有限时间控制

廖卫中[†], 宗 群, 马亚丽

(天津大学 电气与自动化工程学院, 天津 300072)

摘要: 本文首先介绍了一种小型四旋翼无人机的设计过程, 从机架设计、动力匹配、机载控制器、传感器、无线通信等多个方面进行了较为详尽的阐述. 采用牛顿-欧拉法对四旋翼无人机的动力学分析, 完成了六自由度数学模型的推导. 进一步对系统的模型参数进行了测量和计算, 并给出了结果. 在此基础上, 为了满足无人机快速跟踪性能的要求, 本文基于快速终端滑模的思想, 进行了闭环控制器的设计, 并给出了基于Lyapunov函数的稳定性证明. 控制器采用分环控制的结构形式, 内环为姿态控制, 外环为位置控制. 最后结合设计的四旋翼无人机, 给出的仿真结果验证了控制算法的有效性.

关键词: 四旋翼无人机; 快速终端滑模控制; 有限时间控制

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Modeling and finite-time control for quad-rotor mini unmanned aerial vehicles

LIAO Wei-zhong[†], ZONG Qun, MA Ya-li

(School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: We start by giving the detailed design process for a quad-rotor mini unmanned aerial vehicle, including the airframe design, propulsion system, autopilot, sensors and wireless communication. By using Newton-Euler's laws, we analyze the dynamics of such an aerial vehicle to derive for it a 6-degrees mathematical model with parameter values measured and calculated. To meet the requirement on fast tracking performance, we develop a closed-loop control system based on the concept of fast terminal sliding-mode control, and prove its stability by using Lyapunov function. This control system is composed of two nested control loops: the inner loop for the attitude control and the outer loop for the position control. Simulation results show that the proposed method can provide robustness and good tracking performance for the designed quad-rotor mini unmanned aerial vehicle.

Key words: quadrotor; fast terminal sliding mode control; finite-time control

1 引言(Introduction)

近年来, 关于四旋翼无人机的研究与应用得到了越来越广泛的关注. 四旋翼无人机因具有垂直起降、空中悬停、机动灵活的特征, 被大量应用于航空摄影、地质勘察、抢险救灾、管线巡检、环境评估等领域. 在科学研究领域, 由于四旋翼无人机具有非线性、欠驱动、强耦合的动态特性, 研究人员常将其作为理论研究、方法验证的实验载体. 依托小型四旋翼无人机, 搭建无人机飞行控制系统, 进行单无人机高性能运动控制研究和多无人机编队控制、集群控制的研究, 是当前学术界的热点研究领域.

国内外的研究机构已经针对四旋翼无人机进行了大量的研究工作, 并且取得了一定的研究成果. 在平

台建设方面, 斯坦福大学的STARMAC多飞行器实验平台是比较早期的四旋翼无人机实验平台^[1]. 四旋翼无人机整机重量约一千克, 由四个无刷直流电机提供动力. 机载传感器包括Microstrain 3DMG-X1惯性测量单元, Senscomp Mini-AE超声波传感器, Novatel Superstar II 差分GPS. 机载控制器采用两级分层的结构, 底层控制器为Atmega单片机, 负责实时运算以及输出PWM电机驱动信号; 顶层控制器为PC104 模块, 负责路径规划、传感器数据融合以及无线通讯等任务. 在洛桑联邦理工学院的OS4平台设计中, S. Bouabdallah等人提出了一种通过迭代计算的方式来完成四旋翼无人机硬件架构整体设计的方案^[2]. 与斯坦福大学的STARMAC平台不同的是, OS4平台采用了基于

收稿日期: 2015-05-19; 录用日期: 2015-08-02.

[†]通信作者. E-mail: lwz0225@163.com; Tel.: +86 13652176901.

国家“863”高技术计划项目(2013AA122602), 天津市应用基础及前沿技术研究计划项目(11JCZDJC25100)资助.

Supported by National High-Tech Research and Development Program (2013AA122602) and Tianjin Research Program of Application Foundation and Advanced Technology (11JCZDJC25100).

视觉的位置反馈信息,而不是GPS位置信息. Vijay Kumar教授领导下的宾夕法尼亚大学GRASP实验室,采用了Ascending Technologies公司的Hummingbird系列四旋翼无人机,搭建室内多无人机实验平台^[3]. 其中, Hummingbird系列四旋翼无人机是一款面向科学研究的高性能无人机,叶尖距离55 cm,重量500 g,飞行时间20 min左右,同时提供了底层和顶层两种编程控制接口;但是价格昂贵,一般的研究人员难以承受. 该平台采用Vicon运动捕捉系统获取无人机的位置信息,无人机与地面控制站之间通过ZigBee进行通讯. 苏黎世联邦理工大学的Raffaello D'Andrea教授领导下的飞行器实验室有着和GRASP实验室相似的室内多无人机实验平台,该实验室在四旋翼无人机的动态飞行方面有着较为不错的研究成果^[4-5]. 上述研究机构侧重于平台建设,控制上大多采用了传统的PID控制. 在理论研究方面,文献[6]提出了将卡尔曼滤波与控制算法相结合的思路以提高姿态控制精度. 文献[7]针对四旋翼无人机翻滚通道与俯仰通道镇定问题,提出了一种基于递归最小二乘观测器的模型辨识自适应控制方法;与此同时,针对四旋翼无人机的简化模型,提出了一种基于Lyapunov理论的模型参考自适应控制方法,仿真结果表明这两种控制方法的有效性. 文献[8]提出了一种在模型不确定与外部干扰上界未知情况下的鲁棒控制方法,该方法基于一个类似Lyapunov能量函数进行设计,在模型误差与外部干扰较大的情况下仍具有较好的鲁棒性. 文献[9]提出了一种基于滑模干扰观测器的滑模控制方法,该方法能够在控制增益和计算量较小的同时保持对外界干扰和模型误差的鲁棒性. 文献[10]针对四旋翼无人机执行器故障问题,采用了一种基于直接自适应滑模控制方法进行姿态控制器的设计.

上述各研究机构在搭建四旋翼无人机实验平台的过程中,或选择完全自主研发,包括从元器件选型到整个系统集成;或选择购买成熟的商业产品,并在此基础上进行二次开发. 本文充分参考上述各实验平台的设计思路,系统阐述了自制小型四旋翼无人机的设计过程,从机架结构设计到各机体部分选型与匹配都充分考虑了易实现、快速开发、易扩展等方面的需求,因此更加适合作为理论研究与方法验证的实物平台. 本文基于快速终端滑模控制方法分别进行了姿态控制器和位置控制器的设计. 与其他方法相比,该方法的优点在于能够保证系统在有限时间内快速收敛至平衡点,加快系统的动态响应,可有效满足无人机的快速跟踪性能. 与此同时,本文给出了基于Lyapunov函数的稳定性证明,保证了系统的稳定性,并给出了对抖振与奇异性问题的处理方法. 最后的仿真结果验证了控制算法的有效性.

2 四旋翼无人机系统架构设计与模型建立(System architecture design and modeling of quadrotor)

2.1 系统架构(System architecture)

四旋翼无人机一般由机械部分、动力部分、电子部分、机载通讯部分组成. 机械部分即无人机的机架;动力部分包括电池、电机、电子调速器(电机驱动)、桨叶等;电子部分主要包括机载控制器,机载传感器(如陀螺仪、加速度计、磁阻计)等.

2.1.1 机架设计(Airframe design)

本文旨在设计一款应用于室内实验室环境中的小型四旋翼无人机,鉴于室内空间有限,要求无人机的整体尺寸较小. 考虑到后期进行其他方面的研究可能需要在无人机上加装一些其他设备,要求无人机具有一定的载荷. 综合考虑后,将机架大小设定为轴距255 mm(对角电机的距离),此时可选用6英寸的桨叶,匹配合适的电机,能够得到较为不错的载荷(理论上最大起飞重量可达2 kg).

如图1所示,整个机架采用平板层叠的结构,由底板、中间板、顶板通过尼龙螺柱连接而成. 这种设计的好处是结构简单,易于加工,便于机载部件的安装. 机架底板安装电池、无线通讯模块、遥控器接收机等部件;中间板的中间区域安装机载控制器,四个机臂处安装四个电机;顶板起到保护、隐藏机载控制器及内部走线的作用. 机架上的所有开孔、镂空,均根据拟选器件匹配设计. 底板、中间板以及顶板均采用2 mm厚的3 K碳纤维板加工.

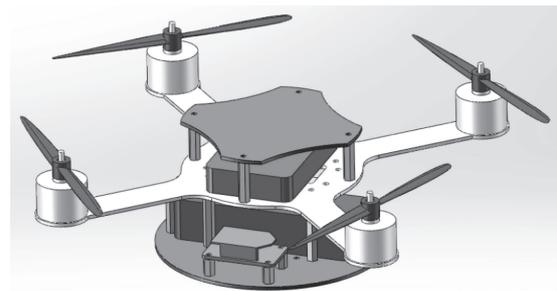


图1 机架三维模型图

Fig. 1 3D mode of airframe

2.1.2 动力匹配(Propulsion matching)

无刷直流电机因具有响应快、效率高等优点,目前大量应用于航模飞行器领域. 因此,本文选择了无刷直流电机为四旋翼无人机提供驱动力,并匹配选择了相应的电子调速器. 不同于固定翼飞行器,四旋翼无人机完全依靠四个旋翼产生的升力提供飞行动力,属于高耗能的设备,因此选择了能量密度较高的锂电池作为无人机的供电电源. 表1给出了上述各部件参数.

表 1 各动力部件参数

Table 1 Specifications of propulsion unit

类别	规格
无刷直流电机	额定转速20000 r/min, 最大升力5 N, 重量27.5 g
电子调速器	额定电流12 A, 输入信号频率50 ~ 400 Hz, 重量6 g
锂电池	额定电压11.1 V, 额定容量2200 mAh, 重量180 g
桨叶	长度152.4 mm, 桨距角45度

2.1.3 机载控制器与传感器 (Autopilot and sensors)

机载控制器是四旋翼无人机的核心部件, 负责无人机上的所有运算任务, 包括数据采集与滤波, 实时控制、无线通讯等. 不少研究机构设计了基于单片机或者DSP架构的机载控制器^[11-12]. 值得一提的是, 一些开源的飞行控制器也具有非常不错的性能. 表2列出了4款比较知名的开源飞行控制器. 综合硬件处理性能、软件开发难度、价位等因素, 选择了Pixhawk作为小型四旋翼无人机的机载控制器. Pixhawk飞行控制器内置了三轴陀螺仪、三轴加速度计以及三轴磁阻计, 且本文所设计的小型四旋翼无人机将部署于室内环境中, 依靠运动捕捉系统提供位置信息, 因而并未加装其他距离传感器.

表 2 四款开源飞行控制器

Table 2 Four opensource autopilots

飞行控制器	主要硬件资源
OpenPilot	处理器: STM32F4 Cortex M4; 时钟频率: 72 MHz 512 KB Flash, 64 KB RAM
Paparazzi	处理器: LPC2148 ARM7; 时钟频率: 60 MHz 512 KB Flash, 32 KB RAM
APM 2.6	处理器: Atmel's ATMEGA2560; 时钟频率: 16 MHz 256 KB Flash, 8 KB RAM
Pixhawk	处理器: STM32F427 Cortex M4; 时钟频率: 168 MHz 2 M Flash, 256 KB RAM

2.1.4 无线通讯(Wireless communication)

无人机与地面控制站之间的通讯方式主要有数传电台、蓝牙、ZigBee以及WiFi. 当无人机在室外飞行, 控制距离超过十公里甚至几十公里时, 只能选用大功率数传电台. 本文涉及到的小型四旋翼无人机主要在室内飞行, 对无线通讯设备的传输距离要求并不高. 由于小型四旋翼无人机对实时性的要求以及自身载荷有限, 要求无线通讯设备的传输延迟较小且功耗较低. 同时, 考虑到存在多无人机编队飞行的可能, 无线通讯设备应该易于组网. 结合文献[4]中给出的信息, 综合考虑后, 决定选用ZigBee无线通讯机制.

2.2 系统建模(System modeling)

有关四旋翼无人机的建模工作, 大多数研究机构都采用了牛顿-欧拉法, 从受力的角度对四旋翼无人

机进行建模与分析^[13-14], 本文对四旋翼无人机的建模工作也采用了上述方法. 在考虑空气阻力、陀螺效应等条件下的四旋翼无人机完整动力学分析仍然较为复杂, 为了简化分析, 很多研究机构都忽略了空气阻力与陀螺效应, 本文对此也进行了忽略.

- 假设 1**
- 1) 无人机是刚性的^[15];
 - 2) 无人机的结构是完全对称的;
 - 3) 无人机的重心与机体坐标系原点重合.

如图2所示, 图中建立了两个右手坐标系, 一个是基于地球的惯性坐标系, 一个是基于四旋翼无人机的机体坐标系. 惯性坐标系由坐标轴 x_E, y_E, z_E 确定, 其中 z_E 竖直向上. 机体坐标系由坐标轴 x_B, y_B, z_B 确定; 规定 x_B 的正方向为无人机的前进方向.

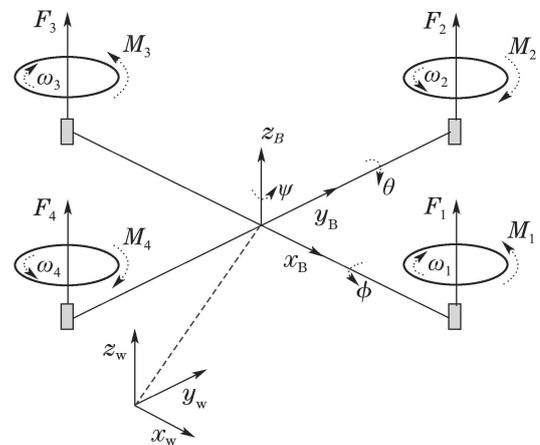


图 2 四旋翼无人机结构示意图

Fig. 2 Structure diagram of quadrotor

用Z-Y-X欧拉角表示四旋翼无人机在惯性坐标系下的旋转. 假设初始状态下, 机体坐标系与惯性坐标系重合. 随着无人机的运动状态发生变化, 机体坐标系与惯性坐标系将不再重合. 当将惯性坐标系依次绕坐标轴 z_E, y_E, x_E 旋转角度 ψ, θ, ϕ , 使得机体坐标系与惯性坐标系重合; 则将分别称为无人机的偏航角、俯仰角、翻滚角. 从机体坐标系到惯性坐标系的旋转矩阵^[16]为

$$R = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中: $s\phi, c\phi$ 分别表示 $\sin \phi$ 和 $\cos \phi$, 此规则同样适用于 θ, ψ .

2.2.1 动力学分析(Dynamics)

将四旋翼无人机视为一个刚体, 作用在刚体上的所有外力可以看作一个合外力作用于刚体的质心. 令 ξ 表示四旋翼无人机在惯性坐标系下的位置, m 表示四旋翼无人机的质量, F 表示作用在四旋翼无人机

上的合外力,则有

$$F = m\ddot{\xi}, \quad (2)$$

其中:合外力 F 包括四旋翼无人机所受重力 mg ,4个旋翼产生的升力 $\sum_{i=1}^4 F_i$.

令 $U_F = \sum_{i=1}^4 F_i$,则式(3)可展开为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_F \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

也即

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi) \frac{U_F}{m}, \\ \ddot{y} = (\cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi) \frac{U_F}{m}, \\ \ddot{z} = -g + (\cos\phi \cos\theta) \frac{U_F}{m}. \end{cases} \quad (4)$$

将四旋翼无人机视为一个刚体,刚体除了平动之外,还能够转动.在机体坐标系下,由欧拉公式有

$$\tau = I\dot{\omega} + \omega \times I\omega, \quad (5)$$

其中: τ 表示作用在四旋翼无人机上的力矩, I 表示四旋翼无人机在机体坐标系下的转动惯量, ω 表示姿态角速度, $\dot{\omega}$ 表示姿态角加速度, \times 表示叉乘.将式(6)展开得

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad (6)$$

也即

$$\begin{cases} \dot{p} = qr \left(\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) + \frac{1}{I_{xx}} \tau_x, \\ \dot{q} = pr \left(\frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \right) + \frac{1}{I_{yy}} \tau_y, \\ \dot{r} = pq \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \right) + \frac{1}{I_{zz}} \tau_z. \end{cases} \quad (7)$$

旋翼在转动的过程中,空气会对旋翼产生一个反扭矩,此反扭矩是控制偏航角 ψ 的出发点.不同于单旋翼直升机依靠尾翼来平衡主旋翼的反扭矩,四旋翼无人机在结构上配置成两个对角旋翼顺时针转动,另外两个对角旋翼逆时针转动,以此来平衡反扭矩.当两组旋翼受到的反扭矩不相等时,便会导致四旋翼无人机的偏航运动.本文中,旋翼1、旋翼3为顺时针转动,转动方向为 z_B 轴负方向,因此空气对旋翼的反扭矩 M_1 和 M_3 的方向为 z_B 轴正方向;同理可得,空气对旋翼2、旋翼4的反扭矩 M_2 和 M_4 的方向为 z_B 轴负方向.由此可得, $\tau_z = M_1 + M_3 - M_2 - M_4$.当旋翼2、旋翼4产生的升力不相等时,二者的升力差引起的力矩

便会导致翻滚运动.同理,当旋翼1、旋翼3产生的升力不相等时,二者的升力差引起的力矩便会导致俯仰运动.令 L 表示四旋翼无人机的质心到各旋翼中轴线的距离,由右手定则可得到: $\tau_x = (F_2 - F_4)L$, $\tau_y = (F_3 - F_1)L$.通常情况下,可认为每个旋翼产生的升力 F_i 与旋翼的转速 ω_i 成正比,即 $F_i = k_F \omega_i^2$, k_F 为升力系数;每个旋翼受到的反扭矩 M_i 与旋翼的转速 ω_i 也成正比,即 $M_i = k_M \omega_i^2$, k_M 为扭矩系数.则有

$$\begin{bmatrix} U_F \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_F & k_F & k_F & k_F \\ 0 & k_F L & 0 & -k_F L \\ -k_F L & 0 & k_F L & 0 \\ k_M & -k_M & k_M & -k_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

2.2.2 模型参数(Model parameters)

在前面的章节中,推导了四旋翼无人机的数学模型,模型中的各个参数可以通过实验测取或者软件仿真的手段得到.

可以直接测量的参数包括无人机的质量 m 、无人机的质心到各旋翼中轴线的距离 L .对于升力系数 k_F 、扭矩系数 k_M 的测取,基于杠杆原理设计了一套测量装置(参见附录).图3-4给出了某组测试中升力 F_i 、扭矩 M_i 与旋翼转速的平方 ω_i^2 之间的拟合关系.

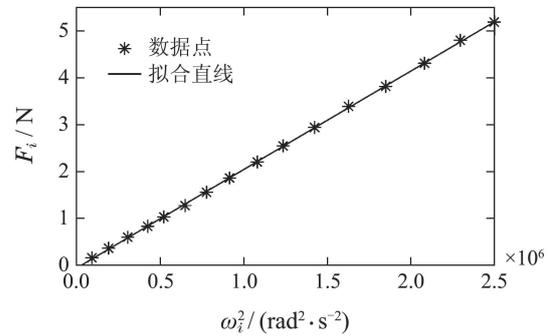


图3 F_i 与 ω_i^2 之间的拟合关系

Fig. 3 Curve fitting of F_i and ω_i^2

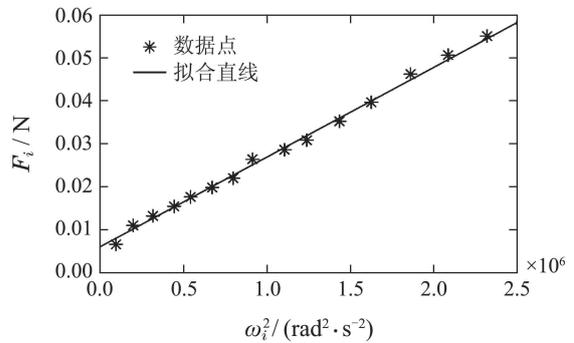


图4 M_i 与 ω_i^2 之间的拟合关系

Fig. 4 Curve fitting of M_i and ω_i^2

四旋翼无人机的转动惯量 I 可以通过软件仿真的方法获得.在SolidWorks中搭建无人机的三维模型,并将无人机各部分的实际质量赋值给三维模型中对应部分,便可计算出无人机的转动惯量.

模型参数如下:

$$\begin{aligned} m &= 0.625 \text{ kg}; L = 0.1275 \text{ m}; \\ k_F &= 2.103 \times 10^{-6} \text{ N}/(\text{rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}); \\ k_M &= 2.091 \times 10^{-8} \text{ Nm}/(\text{rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}); \\ I_{xx} &= 2.3 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2; I_{yy} = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2; \\ I_{zz} &= 2.6 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2. \end{aligned}$$

3 控制器设计(Design of controller)

考虑到四旋翼无人机一般处于低速飞行或者悬停状态下, 姿态角变化较小, 此时可认为: $\dot{\phi} \approx p, \dot{\theta} \approx q, \dot{\psi} \approx r, \ddot{\phi} \approx \dot{p}, \ddot{\theta} \approx \dot{q}, \ddot{\psi} \approx \dot{r}$.

令

$$\begin{cases} U_x = (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \frac{U_F}{m}, \\ U_y = (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \frac{U_F}{m}, \\ U_z = -g + (\cos \phi \cos \theta) \frac{U_F}{m}, \end{cases} \quad (9)$$

考虑到系统模型参数的测量值与真实值之间存在的误差将会导致模型的不准确性, 而周围环境中气流变

化也会对系统产生干扰, 结合文献[17]中不确定与干扰的形式, 式(4)可改写为

$$\begin{cases} \ddot{x} = U_x + \Delta f_x + d_x, \\ \ddot{y} = U_y + \Delta f_y + d_y, \\ \ddot{z} = U_z + \Delta f_z + d_z, \end{cases} \quad (10)$$

其中 Δf 项、 d 项分别代表模型不确定以及外部干扰.

同理, 可将式(7)改写为

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = a_1 \dot{\theta} \dot{\psi} + b_1 \tau_x + \Delta f_\phi + d_\phi, \\ \ddot{\theta} = a_2 \dot{\phi} \dot{\psi} + b_2 \tau_y + \Delta f_\theta + d_\theta, \\ \ddot{\psi} = a_3 \dot{\phi} \dot{\theta} + b_3 \tau_z + \Delta f_\psi + d_\psi, \end{cases} \quad (11)$$

其中: $a_1 = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}, b_1 = \frac{1}{I_{xx}}, a_2 = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}, b_2 = \frac{1}{I_{yy}}, a_3 = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}, b_3 = \frac{1}{I_{zz}}$, Δf 项、 d 项分别代表模型不确定以及外部干扰

根据四旋翼无人机模型的特点, 采用分环控制的结构形式, 控制系统分为两部分; 其中, 内环为姿态控制, 外环为位置控制, 如图5所示.

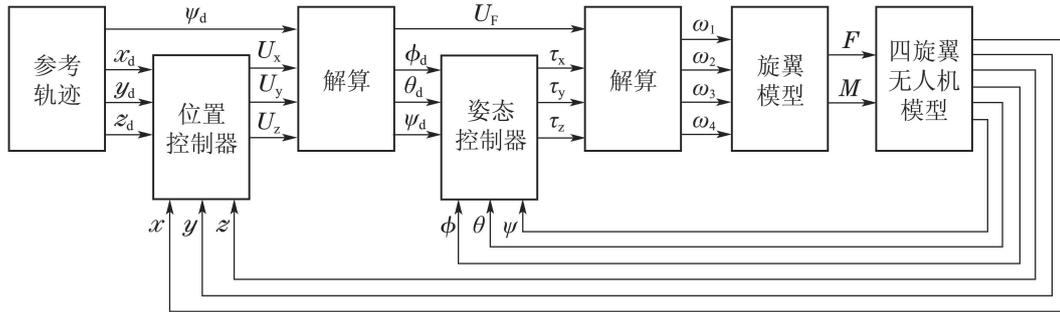


图 5 控制系统结构图

Fig. 5 Control system diagram

本文采用了终端滑模控制^[18-19]的思想分别进行姿态控制器与位置控制器的设计. 终端滑模控制方法具有有限时间收敛的特性, 能够很好的满足四旋翼无人机对参考输入快速跟踪的性能要求, 同时兼具滑模控制固有的鲁棒性强的特点.

考虑如下二阶多输入多输出非线性系统:

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(x) + b(x)u + \Delta f(x, t) + d(t), \\ y = x, \end{cases} \quad (12)$$

其中: 状态变量 $x \in \mathbb{R}^n$, x 存在连续的一阶导数、二阶导数, 输入 $u \in \mathbb{R}^n$, 输出 $y \in \mathbb{R}^n$, 函数 $f(x) \in \mathbb{R}^n$, 函数 $b(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且为对角矩阵, 模型不确定 $\Delta f(x, t) \in \mathbb{R}^n$, 外部扰动 $d(t) \in \mathbb{R}^n$; 且满足 $|\Delta f_i(x, t) + d_i(t)| \leq D_i$.

定义系统跟踪误差 $e_i = x_i - x_{id}$, 其中 x_i 和 x_{id} 分别为状态实际值与期望值. 为了保证系统状态快

速收敛至平衡点, 选取快速终端滑模面的形式. 滑模面函数矩阵定义为 $s = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]$. 其中, 各个滑模面函数具体定义如下:

$$s_i = \dot{e}_i + \alpha_i e_i + \beta_i e_i^{q_i/p_i}, \quad (13)$$

其中: α_i 和 β_i 均为大于零的常数, p_i 和 q_i 为正奇数且 $2 > p_i/q_i > 1$. 对式(13)求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \ddot{e}_i + \alpha_i \dot{e}_i + \beta_i \dot{e}_i^{q_i/p_i - 1} = \\ &= \ddot{x}_i - \ddot{x}_{id} + [\alpha_i + \beta_i (x_i - x_{id})^{q_i/p_i - 1}] (x_i - x_{id}). \end{aligned} \quad (14)$$

将式(12)代入式(14), 得

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= f_i(x) + [\alpha_i + \beta_i (x_i - x_{id})^{q_i/p_i - 1}] (x_i - x_{id}) - \\ &= \ddot{x}_{id} + \Delta f_i(x, t) + d_i(t) + b_{i,i}(x)u_i, \end{aligned} \quad (15)$$

将式(15)做如下改写:

$$\dot{s}_i = L_i(x, t) + \Delta L_i(x, t) + b_{i,i}u_i, \quad (16)$$

其中:

$$L_i(x, t) = f_i(x) + [\alpha_i + \beta_i(x_i - x_{id})^{q_i/p_i - 1}] \times (\dot{x}_i - \dot{x}_{id}) - \ddot{x}_{id}, \quad (17)$$

$$\Delta L_i(x, t) = \Delta f_i(x, t) + d_i(t). \quad (18)$$

选择控制律为

$$u_i = -\frac{1}{b_{i,i}(x)} [L_i(x, t) + k_{i1}s_i + (D_i + k_{i2}|s_i|^r) \text{sgn } s_i], \quad (19)$$

其中: $k_{i1} > 0, k_{i2} > 0, 0 < r < 1$. 此时, 系统跟踪误差 e 将在有限时间内收敛至零.

稳定性证明: 选取Lyapunov函数为

$$V_i = \frac{1}{2} s_i^2, \quad (20)$$

则

$$\dot{V}_i = s_i \dot{s}_i = s_i [L_i(x, t) + \Delta L_i(x, t) + b_{j,i}(x) u_i] = \Delta L_i(x, t) s_i - D_i |s_i| - k_{i1} s_i^2 - k_{i2} |s_i|^{r+1}. \quad (21)$$

因为

$$|\Delta L_i(x, t)| = |\Delta f_i(x, t) + d_i(t)| \leq D_i, \quad (22)$$

所以

$$\Delta L_i(x, t) s_i - D_i |s_i| \leq 0, \quad (23)$$

进而

$$\dot{V}_i \leq -k_{i1} s_i^2 - k_{i2} |s_i|^{r+1}, \quad (24)$$

即系统在Lyapunov意义下渐近稳定.

有限时间分析: 在趋近阶段, 设系统状态从滑模面之外到达滑模面 $s_i = 0$ 的时间为 t_r , 因为式(25)满足文献[20]中的引理3.4, 即 t_r 为有限时间.

$$t_r \leq \frac{1}{k_{i1}(1-\alpha)} \ln \frac{k_{i1} V_i^{1-\alpha}(x_0) + k_{i2}}{k_{i2}}, \quad (25)$$

其中 $\alpha = (r+1)/2$. 在滑模阶段, 式(13)所选快速终端滑模面保证了系统的有限时间收敛特性^[18].

综上, 系统状态跟踪误差将在有限时间内收敛至零.

式(13)表示的传统快速终端滑模面存在奇异性问题, 即系统跟踪误差 e_i 接近零时, 控制律中的 $e_i^{q_i/p_i - 1}$ 项会导致控制量趋向于无穷大, 产生奇异点. 针对该奇异性问题, 本文选取了一种改进的快速终端滑模面^[21]形式如下:

$$s_i = \dot{e}_i + \alpha_i e_i + \beta_i h(x_i), \quad (26)$$

其中 $e = x_i - x_{id}$, 且满足 $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$,

$$h(x_i) = \begin{cases} e_i^{q_i/p_i}, & \bar{s}_i = 0 \text{ 或 } \bar{s}_i \neq 0, |e_i| \geq \varepsilon, \\ k_{i3}e + k_{i4}e_i^2 \text{sgn } e_i, & \bar{s}_i \neq 0, |e_i| < \varepsilon, \end{cases} \quad (27)$$

其中: $\bar{s}_i = \dot{e}_i + \alpha_i e_i + \beta_i e_i^{q_i/p_i}$, $k_{i3} = (2 - q_i/p_i) \varepsilon^{q_i/p_i - 1}$, $k_{i4} = (q_i/p_i - 1) \varepsilon^{q_i/p_i - 2}$, $\varepsilon > 0$. 该滑模面采用切换控制的思想, 可有效避免终端滑模控制中存在的奇异性问题.

将 U_x, U_y, U_z 看作位置控制器的输入, 将 τ_x, τ_y, τ_z 看作姿态控制器的输入, 则根据前文推导, 可分别对式(10)–(11)进行位置控制器和姿态控制器的设计. 以姿态控制器设计为例, 将式(11)表达成式(12)的形式, 根据传统快速终端滑模控制的设计思路求得控制律, 再根据前文中对抖振问题、奇异性问题处理方法对所求控制律进行改进, 进而得到最终的控制律.

位置给定值 x_d, y_d, z_d 以及姿态给定值 ψ_d 由参考轨迹直接给出, 姿态给定值 ϕ_d 和 θ_d 以及总升力 U_F 由式(28)可得. 最终, 执行器的给定值 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ 由式(8)可得.

$$\begin{cases} U_F = m \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + (U_z + g)^2}, \\ \phi_d = \sin^{-1} \left(\frac{m}{U_F} (U_x \sin \psi_d - U_y \cos \psi_d) \right), \\ \theta_d = \tan^{-1} \left(\frac{1}{U_z + g} (U_x \cos \psi_d + U_y \sin \psi_d) \right). \end{cases} \quad (28)$$

4 仿真与结果分析(Simulation and results analysis)

在仿真环境中, 四旋翼无人机的初始位置和初始姿态角分别为 $[0, 0, 0]$ m 以及 $[0, 0, 0]$ rad; 参考值设定为: $x_d = 1$ m, $y_d = 1$ m, $z_d = 1$ m, $\psi_d = 0.3$ rad. 仿真结果如图6–8所示.

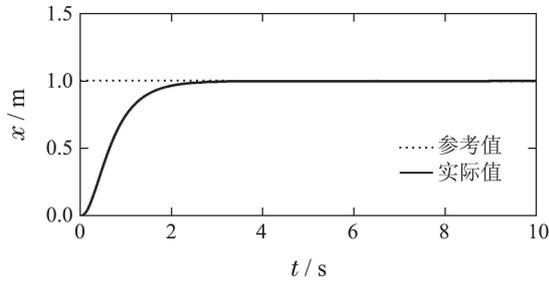
针对系统抖振问题, 采用“边界层”方法, 在实际的控制律 u_i 中, 用饱和函数 $\text{sat}(s)$ 代替符号函数 $\text{sgn } s$, 实现准滑动模态控制, 以削弱系统抖振. 在边界层外, 系统处于正常的滑模控制; 在边界层内, 则为连续状态的反馈控制.

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} 1, & s > \delta, \\ \frac{s}{\delta}, & |s| \leq \delta, \\ -1, & s < -\delta, \end{cases} \quad (29)$$

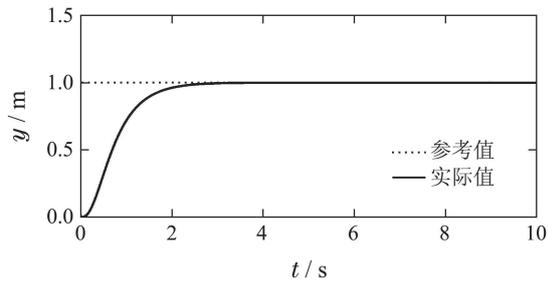
其中 $\delta > 0$ 是边界层厚度, 可通过多次仿真得到最佳值.

仿真过程中, 针对系统抖振问题, 本文采用了边界层的方法, 用饱和函数代替符号函数, 有效的减轻了系统抖振. 针对快速终端滑模可能出现的奇异性问题, 基于切换控制的思想, 对控制器进行了处理. 从图6–8可以看出无人机在较短时间内完成了对参考值的跟踪, 执行器输出力矩的峰值为0.3 Nm,

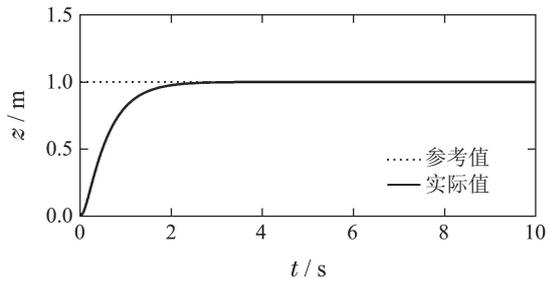
由电机最大升力5 N、模型参数 $L = 0.1275$ m可得执行器最大输出力矩为0.6375 Nm, 验证了快速终端滑模控制在四旋翼无人机上应用的可行性.



(a) x轴位移



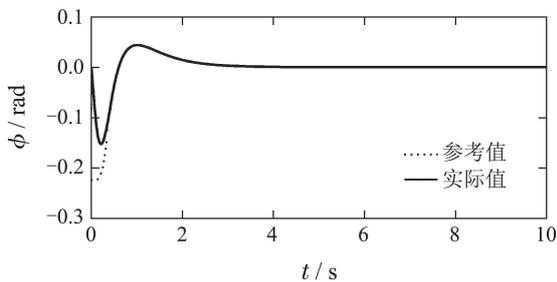
(b) y轴位移



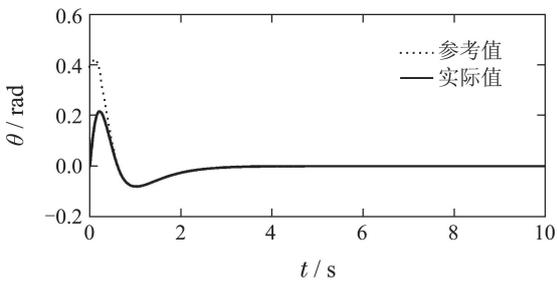
(c) z轴位移

图 6 位置跟踪结果

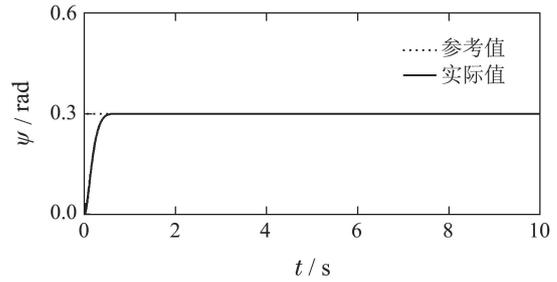
Fig. 6 Tracking result of position



(a) 翻滚角



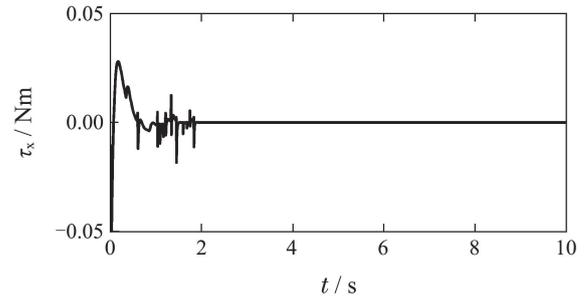
(b) 俯仰角



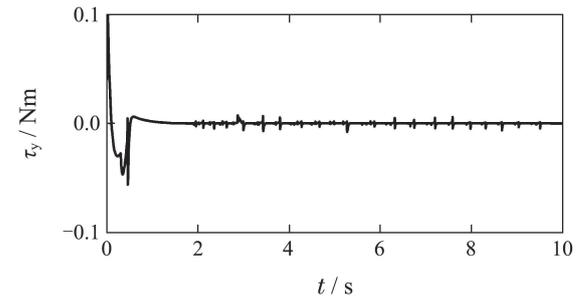
(c) 偏航角

图 7 姿态角跟踪结果

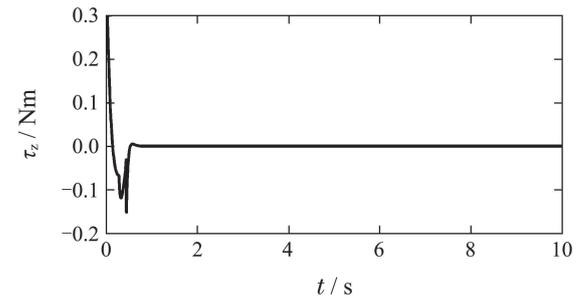
Fig. 7 Tracking result of attitude angle



(a) x轴力矩



(b) y轴力矩



(c) z轴力矩

图 8 执行器输出力矩

Fig. 8 Actuator output torque

5 结论(Conclusions)

本文从机架设计、动力匹配、机载控制器、传感器、无线通信等方面介绍了一种小型四旋翼无人机的设计过程. 针对所设计的小型四旋翼无人机, 采用牛顿-欧拉法进行了模型推导, 并完成了相关参数辨识的工作. 基于快速非奇异终端滑模控制的思想, 对位置环和姿态环进行了控制器的设计. 仿真结果

表明,快速终端滑模控制能够有效地应用于四旋翼无人机。

参考文献(References):

- [1] HOFFMANN G M, WASLANDER S L, VITUS M P, et al. Stanford testbed of autonomous rotorcraft for multi-agent control [C] // *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. St. Louis, USA: IEEE, 2009: 404 – 405.
- [2] BOUABDALLAH S, MURRIERI P, SIEGWART R. Towards autonomous indoor micro VTOL [J]. *Autonomous Robots*, 2012, 18(2): 171 – 183.
- [3] MICHAEL N, MELLINGER D, LINDSEY Q, et al. The GRASP multiple micro-UAV testbed [J]. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 2010, 17(3): 56 – 65.
- [4] LUPASHIN S, SCHOLLIG A, SHERBACK M, et al. A simple learning strategy for high-speed quadrotor multi-flips [C] // *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*. Anchorage, Alaska, USA: IEEE, 2010: 1642 – 1648.
- [5] HEHN M, D' ANDREA R. A flying inverted pendulum [C] // *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*. Shanghai, China: IEEE, 2011: 763 – 770.
- [6] 汪绍华, 杨莹. 基于卡尔曼滤波的四旋翼飞行器姿态估计和控制算法研究 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(9): 1109 – 1115. (WANG Shaohua, YANG Ying. Quadrotor aircraft attitude estimation and control based on Kalman filter [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1109 – 1115.)
- [7] SCHREIER M, DARMSTADT T. Modeling and adaptive control of a quadrotor [C] // *Proceedings of International Conference on Mechatronics and Automation*. Chengdu, China: IEEE, 2012: 383 – 390.
- [8] ISLAM S, LIU P X, SADDIK A E. Robust control of four-rotor unmanned aerial vehicle with disturbance uncertainty [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, 62(3): 1563 – 1571.
- [9] BESNARD L, SHTESSEL Y B, LANDRUM B. Quadrotor vehicle control via sliding mode controller driven by sliding mode disturbance observer [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(2): 658 – 684.
- [10] 杨荟僚, 姜斌, 张柯. 四旋翼直升机姿态系统的直接修复控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(8): 1053 – 1060. (YANG Huiliao, JIANG Bin, ZHANG Ke. Direct self-repairing control for four-rotor helicopter attitude systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(8): 1053 – 1060.)
- [11] LARA D, SANCHEZ A, LOZANO R, et al. Real-time embedded control system for VTOL aircrafts: application to stabilize a quadrotor helicopter [C] // *Proceedings of International Conference on Control Applications*. Munich, Germany: IEEE, 2006: 2553 – 2558.
- [12] BAI Y, LIU H, SHI Z, et al. Robust control of quadrotor unmanned air vehicles [C] // *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*. Hefei, China: IEEE, 2012: 4462 – 4467.
- [13] MELLINGER D, MICHAEL N, KUMAR V. Trajectory generation and control for precise aggressive maneuvers with quadrotors [J]. *International Journal of Robotics Research*, 2012, 31(5): 664 – 674.
- [14] ELSAMANTY M, KHALIFA A, FANNI M, et al. Methodology for identifying quadrotor parameters, attitude estimation and control [C] // *Proceedings of 2013 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. Wollongong, Australia: IEEE, 2013: 1343 – 1348.
- [15] BOUABDALLAH S, NOTH A, SIEGWART R. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor [C] // *Proceedings of 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. New York, USA: IEEE, 2004, 3: 2451 – 2456.
- [16] YU Y, DING X. A quadrotor test bench for six degree of freedom flight [J]. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 2012, 68(3/4): 323 – 338.
- [17] CHEN F, ZHANG K, WANG Z, et al. Trajectory tracking of a quadrotor with unknown parameters and its fault-tolerant control via sliding mode fault observer [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2015, 229(4): 279 – 292.
- [18] YU X, MAN Z. Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(2): 261 – 264.
- [19] CHEN M, WU Q, CUI R. Terminal sliding mode tracking control for a class of SISO uncertain nonlinear systems [J]. *ISA Transactions*, 2013, 52(2): 198 – 206.
- [20] ZHU Z, XIA Y, FU M. Attitude stabilization of rigid spacecraft with finite-time convergence [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(6): 686 – 702.
- [21] LU K, XIA Y. Adaptive attitude tracking control for rigid spacecraft with finite-time convergence [J]. *Automatica*, 2013, 49(12): 3591 – 3599.

附录 升力系数与扭矩系数的测量(Appendix Measurement of lift constant and moment constant)

如图A1和图A2所示, Arduino Uno微控制器以PWM波的形式输出电机给定值,同时读取并处理霍尔传感器返回的数据;计算机与Arduino Uno微控制器连接,用于显示处理结果。以图A1为例,当旋翼转动时,产生向上的升力 F_i ,根据杠杆原理,电子秤受到相同大小的压力,通过霍尔传感器可以得到与升力 F_i 对应的旋翼转速 ω_i ,进而得到 k_F ;同理可得 k_M 。

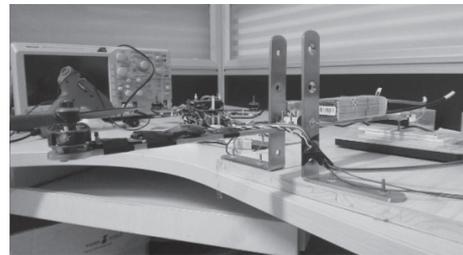


图 A1 升力系数测量装置

Fig. A1 Measurement device of lift constant

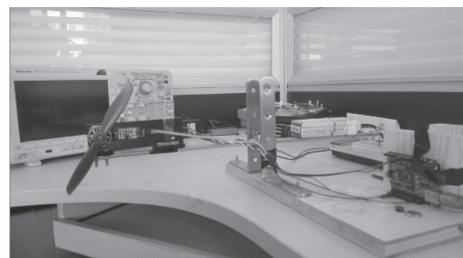


图 A2 扭矩系数测量装置

Fig. A2 Measurement device of moment constant

作者简介:

廖卫中 (1991-), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为四旋翼无人机嵌入式实时控制, E-mail: lwz0225@163.com;

宗群 (1961-), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为飞行器制导与控制, E-mail: zongqun@tju.edu.cn;

马亚丽 (1992-), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为四旋翼无人机的非线性控制, E-mail: mayali@tju.edu.cn.