

位置和速度受限的微型无人直升机轨迹跟踪控制器

邹尧, 霍伟[†]

(北京航空航天大学 第七研究室; 飞行器控制一体化技术国家级重点实验室, 北京 100191)

摘要: 针对微型无人直升机在狭窄空间中的轨迹跟踪问题, 设计了一种可以限制直升机位置和速度的跟踪控制器. 首先将直升机的模型简化为一个未建模的动态模型. 基于简化模型利用受限反步法设计控制器, 其中在位置控制回路用障碍李雅普诺夫函数代替传统的纯二次型李雅普诺夫函数, 以此来限制直升机的位置和速度; 用指令滤波器对反步过程中虚拟控制的导数进行估计, 避免了复杂的解析计算. 此外, 将未建模动态和指令滤波器误差合并成有界扰动项, 并设计了自适应算法对扰动的上界进行估计和补偿. 稳定性分析证明了直升机的闭环跟踪误差最终一致有界, 且位置和速度始终位于预设的限制集合中. 仿真结果验证了该控制器的有效性.

关键词: 微型无人直升机; 轨迹跟踪; 位置和速度受限; 反步法; 障碍李雅普诺夫函数; 指令滤波器

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Trajectory tracking controller for miniature unmanned helicopters with position and velocity constraints

ZOU Yao, HUO Wei[†]

(The Seventh Research Division, Beihang University; Science and Technology on Aircraft Control Laboratory, Beijing 100191, China)

Abstract: A trajectory tracking controller with position and velocity constraints is developed for miniature unmanned helicopters flying in narrow space. The helicopter model is firstly simplified to one with unmodeled dynamics. Based on this model, the constrained backstepping technique is applied to design the controller, in which the barrier Lyapunov functions, instead of traditional pure quadratic Lyapunov functions, are introduced to the position control loop for maintaining the position and velocity constraints. Command filters are utilized to estimate derivatives of the virtual controls during the backstepping progress such that complex analytical calculations can be avoided. Furthermore, upper bounds of the disturbances due to the unmodeled dynamics and command filter errors are estimated and compensated with adaptive algorithms. The stability analysis shows that tracking errors of the closed-loop helicopter system are ultimately uniformly bounded and its position and velocity are restricted in the prescribed sets during the tracking progress. Simulation results validate the effectiveness of the proposed controller.

Key words: miniature unmanned helicopters; trajectory tracking; constrained position and velocity; backstepping; barrier Lyapunov functions; command filter

1 引言(Introduction)

无人直升机可以垂直起降、悬停和低速飞行, 已经在军事和民用中被广泛使用. 无人直升机研究的一个重要方向是微型化, 微型无人直升机不但继承了全尺寸无人直升机的特性, 而且在体积、造价、机动性上更有优势. 此外, 微型无人直升机具有强耦合、欠驱动、高非线性等特点, 因此也是控制理论研究的理想实验平台.

当前, 针对微型无人直升机轨迹跟踪问题, 已经出现了许多非线性控制方法, 如反步控制^[1-2]、滑模控制^[3-4]、智能控制^[5-6]、模型预测控制^[7-8]等. 而反步

控制可以充分利用直升机动力学性质, 因此是解决微型无人直升机轨迹跟踪问题最为流行的方法. 传统的微型无人直升机反步控制器是基于纯二次型李雅普诺夫函数设计的^[1-2, 9-10], 这些控制器在飞行过程中并未对直升机的位置和速度进行限制, 因此在狭窄空间、室内等特殊环境中飞行时, 可能会使直升机与障碍物发生碰撞.

在反步控制设计过程中, 随着系统阶数的增加, 虚拟控制的导数计算将变得越来越繁琐. 为避免复杂计算, 文献[11-12]提出了指令滤波反步法, 其中虚拟控制的导数用指令滤波器进行估计. 这种指令滤波反步

法已被广泛使用. 利用指令滤波反步法, 文献[13]实现了微型无人直升机的路径跟踪, 文献[14]完成了高速水下超空泡航行体的纵向运动, 文献[15]设计了四旋翼无人机跟踪控制器, 文献[16]实现了船舶电力系统的渐近稳定. 但这种指令滤波反步法并未考虑系统存在扰动时的情况.

另外, 微型无人直升机中的未建模动态会影响直升机的跟踪性能, 需要在设计控制器时对其进行补偿. 文献[17–18]利用扰动观测器对未建模动态进行观测, 但要求观测器增益必须足够大. 文献[19–20]利用神经网络来估计未建模动态, 但过多的网络节点会增加计算的复杂度. 文献[21]利用非线性阻尼技术来限制未建模动态, 但阻尼项会使控制输入变得很大.

为解决上述问题, 本文利用基于障碍李雅普诺夫函数的受限反步法^[22]为微型无人直升机设计了一种位置和速度受限的轨迹跟踪控制器, 该方法利用指令滤波器对反步法中虚拟输入的导数进行估计, 并设计自适应算法对未建模动态和滤波误差进行了补偿. 闭环系统稳定性分析证明: 所设计的控制器可实现跟踪误差的最终一致有界性, 并确保在跟踪过程中对直升机位置和速度的限制.

2 预备知识(Preliminaries)

在本文中, $|\cdot|$ 表示标量的绝对值, $\|\cdot\|$ 表示向量的欧几里德范数, $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$ 和 $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ 表示3个单位向量, $\bar{\lambda}(\cdot)$ 和 $\underline{\lambda}(\cdot)$ 表示方阵的最大和最小特征值. 上标“ \times ”表示将向量 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ 转换为如下反对称叉乘矩阵:

$$\mathbf{x}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

对于 $x \in \mathbb{R}$, 定义双曲正切函数 $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, 对于 $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, 定义双曲正切函数矩阵 $\text{Tanh}(\mathbf{x}) = \text{diag}\{\tanh(x_1), \dots, \tanh(x_n)\}$.

引理 1^[22–23] 对于 $x \in \mathbb{R}$, 如果 $|x| < k$, 则有

$$\ln \frac{k^2}{k^2 - |x|^2} \leq \frac{|x|^2}{k^2 - |x|^2}. \quad (1)$$

引理 2^[24] 对于 $x \in \mathbb{R}$, 以下不等式成立:

$$0 \leq |x| - x \tanh\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \leq k_q \epsilon, \quad (2)$$

式中: $\epsilon > 0$, $k_q = 0.2758$ 满足 $k_q = e^{-(k_q+1)}$.

引理 3^[11–12] 对于光滑函数 $\alpha(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, 其导数 $\dot{\alpha}$ 可用以下指令滤波器估计:

$$\hat{\alpha} = \frac{\omega_n s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \alpha, \quad (3)$$

其中 ξ 和 ω_n 分别是阻尼比和自然振荡频率.

注 1 上述指令滤波器的估计误差 $\tilde{\alpha} = \alpha - \hat{\alpha}$ 是有界

的. 由文献[25]可知, 充分大的 ω_n 可以确保估计精度.

注 2 反步法中虚拟控制的导数可用指令滤波器(3)进行估计, 这样就可以避免复杂的解析计算.

3 直升机模型(Helicopter model)

3.1 直升机动力学(Dynamics of helicopter)

直升机模型是在地球坐标系 $\{Oxyz\}$ 和机体坐标系 $\{O_b x_b y_b z_b\}$ 中建立的^[13], 其概图示于图1中. 假设地球坐标系为惯性坐标系, 将直升机视为6自由度刚体, 其动力学方程可通过牛顿–欧拉方程建立^[13]:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad (4)$$

$$m\dot{\mathbf{v}} + mg\mathbf{e}_3 = \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{f}, \quad (5)$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega}^\times, \quad (6)$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}, \quad (7)$$

其中: $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T$ 和 $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ 分别表示直升机的重心在地球坐标系中的位置和速度; m 表示直升机的质量; g 表示重力加速度; $\boldsymbol{\gamma} = [\phi, \theta, \psi]^T$ 表示机体的欧拉角(分别为滚转角、俯仰角和航向角); $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ 为直升机的角速度在机体坐标系中的表示; \mathbf{f} 和 $\boldsymbol{\tau}$ 分别为直升机受到的合力和合力矩在机体坐标系中的表示; \mathbf{I} 为惯性张量矩阵在机体坐标系中的表示, 由于直升机可近似看做关于 $O_b x_b z_b$ 平面对称, 故有

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix},$$

$\mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma})$ 为机体坐标系到地球坐标系的旋转矩阵:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}) = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix},$$

其中: $c(\cdot) = \cos(\cdot)$, $s(\cdot) = \sin(\cdot)$.

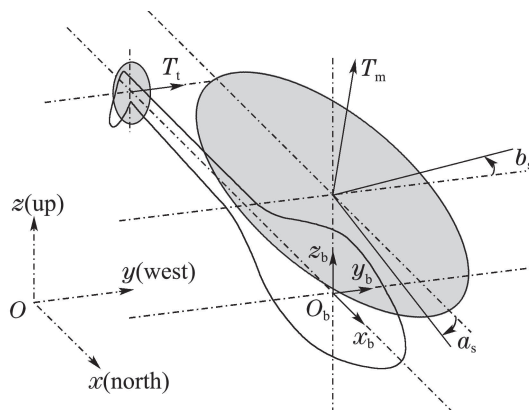


图 1 直升机模型概图

Fig. 1 Helicopter model sketch

直升机的姿态可由3个独立分量来描述^[18], 但姿态运动方程(6)却是以矩阵方程形式给出的, 为减小控

制器设计复杂性,可重新定义姿态运动方程.记 \mathbf{R} 的第3列 $\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}e_3$,由式(6)可得

$$\dot{\mathbf{R}}_3 = \dot{\mathbf{R}}e_3 = \mathbf{R}\omega^\times e_3 = -\mathbf{R}e_3^\times \omega. \quad (8)$$

由于 $\|\mathbf{R}_3\| = 1$ 的约束, \mathbf{R}_3 中只有两个独立分量.提取 \mathbf{R}_3 前两个分量 $\bar{\mathbf{R}}_3 = [e_1 \ e_2]^\top \mathbf{R}_3$.由式(8)知

$$\dot{\bar{\mathbf{R}}}_3 = \hat{\mathbf{R}}\bar{\omega}, \quad (9)$$

其中: $\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} -R_{12} & R_{11} \\ -R_{22} & R_{21} \end{bmatrix}$ 是可逆的, $\bar{\omega} = [\omega_x \ \omega_y]^\top$.

此外,由式(6)可推导出航向运动方程

$$\dot{\psi} = \frac{s\phi}{c\theta}\omega_y + \frac{c\phi}{c\theta}\omega_z. \quad (10)$$

由文献[18]知,当 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ 时, γ 到 $\gamma_{\mathbf{R}} = [\bar{\mathbf{R}}_3, \psi]^\top$ 的映射是同胚的.这说明:只要 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$,式(9)–(10)可以作为直升机姿态运动方程.

3.2 合力和合力矩(Applied force and torque)

当微型无人直升机进行悬停或低速飞行时,合力 \mathbf{f} 和合力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 主要由旋翼产生^[13,19]:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} T_m s a_s \\ -T_m s b_s + T_t \\ T_m c b_s c a_s \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} T_m h_m s b_s + L_b b_s + T_t h_t + \tau_m s a_s \\ T_m l_m + T_m h_m s a_s + M_a a_s + \tau_t - \tau_m s b_s \\ -T_m l_m s b_s - T_t l_t + \tau_m c a_s c b_s \end{bmatrix},$$

其中: T_m 和 T_t 表示主旋翼和尾旋翼的推力; a_s 和 b_s 表示主旋翼的纵向和横向挥舞角; τ_m 和 τ_t 表示主旋翼和尾旋翼的反作用力矩; L_b 和 M_a 表示主旋翼的刚度系数; $[l_m, 0, h_m]^\top$ 和 $[l_t, 0, h_t]^\top$ 表示主旋翼和尾旋翼的中心相对于直升机重心的位置.根据文献[9], τ_m 和 τ_t 的表达式为

$$\tau_i = C_i |T_i|^{1.5} + D_i, \quad i = m, t, \quad (11)$$

式中 C_i 和 D_i 为气动常数.

3.3 模型简化(Model simplification)

飞行过程中主旋翼的挥舞角 a_s 和 b_s 很小,可以采用小角度近似^[13]: $\cos(\cdot) \approx 1$, $\sin(\cdot) \approx (\cdot)$.而 $T_m a_s$, $T_m b_s$ 和 T_t 对 \mathbf{f} 以及 τ_t 对 $\boldsymbol{\tau}$ 的作用很小,这样可以把 \mathbf{f} 和 $\boldsymbol{\tau}$ 分解为

$$\mathbf{f} = T_m e_3 + \mathbf{f}_\Delta, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_\gamma + \boldsymbol{\Delta}_\tau = \mathbf{A}_\tau \mathbf{M} + \boldsymbol{\tau}_B + \boldsymbol{\Delta}_\tau, \quad (13)$$

其中:

$$\mathbf{f}_\Delta = \begin{bmatrix} T_m s a_s \\ -T_m s b_s + T_t \\ T_m (c a_s c b_s - 1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_\tau = \begin{bmatrix} h_t & \tau_m & T_m h_m + L \\ 0 & T_m h_m + M & -\tau_m \\ -l_t & 0 & -T_m l_m \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} T_t \\ a_s \\ b_s \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ T_m l_m \\ \tau_m \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Delta}_\tau = \begin{bmatrix} \tau_m (s a_s - a_s) + T_m h_m (s b_s - b_s) \\ \tau_t - \tau_m (s b_s - b_s) + T_m h_m (s a_s - a_s) \\ \tau_m (c a_s c b_s - 1) - T_m l_m (s b_s - b_s) \end{bmatrix}.$$

将式(12)和式(13)分别代入到式(5)和式(7)中可得

$$m\dot{\mathbf{v}} = -mg e_3 + T_m \mathbf{R}_3 + \boldsymbol{\Delta}_f, \quad (14)$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_\gamma + \boldsymbol{\Delta}_\tau, \quad (15)$$

其中 $\boldsymbol{\Delta}_f = \mathbf{R} \mathbf{f}_\Delta$.

注3 设计控制器时,将 $\boldsymbol{\Delta}_f$ 和 $\boldsymbol{\Delta}_\tau$ 视作未建模动态.

3.4 控制目标(Control objective)

给定直升机位置和速度的限制集合:

$$\mathcal{Z}_{pc} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid |p_i| < \alpha_{ci}, i = x, y, z\}, \quad (16)$$

$$\mathcal{Z}_{vc} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |v_i| < \beta_{ci}, i = x, y, z\}, \quad (17)$$

同时给定参考轨迹 $\mathbf{p}_c = [p_{cx}, p_{cy}, p_{cz}]^\top$ 满足

$$|p_{ci}| \leq Y_0 < \alpha_{ci}, \quad |\dot{p}_{ci}| \leq Y_1 < \beta_{ci}, \quad i = x, y, z \quad (18)$$

和参考航向角 ψ_c ,本文的目标是,设计控制输入 T_m , T_t , a_s 和 b_s ,使得受控直升机满足:

- 1) 位置 \mathbf{p} 始终位于位置限制集合 \mathcal{Z}_{pc} 中,并最终一致收敛到参考轨迹 \mathbf{p}_c 的邻域内.
- 2) 速度 \mathbf{v} 始终位于速度限制集合 \mathcal{Z}_{vc} 中.
- 3) 航向角 ψ 最终一致收敛到参考航向角 ψ_c 的邻域内.

在控制器设计过程中,对直升机作如下假设:

假设1 飞行过程中,直升机的滚转角 ϕ 和俯仰角 θ 始终位于区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内.

假设2 未建模动态 $\boldsymbol{\Delta}_f$ 和 $\boldsymbol{\Delta}_\tau$ 是有界的.

4 控制器设计(Controller design)

本文采用受限自适应反步完成控制器设计,其结构框图示于图2中,其中在位置控制回路中用障碍李雅普诺夫函数代替纯二次型李雅普诺夫函数实现对位置和速度的限制.

4.1 控制器设计步骤(Controller design steps)

步骤1 令 $\alpha_{bi} = \alpha_{ci} - Y_0$ ($i = x, y, z$),定义位置跟踪误差 $\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}_c = [p_{ex}, p_{ey}, p_{ez}]^\top$,若 $|p_{ei}| < \alpha_{bi}$,则 $|p_i| \leq |p_{ci}| + |p_{ei}| < \alpha_{ci}$.由式(4)知

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{p}}_c. \quad (19)$$

取障碍李雅普诺夫函数

$$L_p = \frac{1}{2} \sum_{i=x,y,z} \ln \frac{p_{ei}^2}{\alpha_{bi}^2 - p_{ei}^2}, \quad (20)$$

它沿式(19)的导数为

$$\dot{L}_p = \left[\frac{p_{ex}}{\alpha_{bx}^2 - p_{ex}^2}, \frac{p_{ey}}{\alpha_{by}^2 - p_{ey}^2}, \frac{p_{ez}}{\alpha_{bz}^2 - p_{ez}^2} \right] (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{p}}_c). \quad (21)$$

设计虚拟控制:

$$\mathbf{a}_p = -c_p \mathbf{p}_e + \dot{\mathbf{p}}_c, \quad (22)$$

式中

$$0 < c_p \leq \min\left(\frac{\beta_{ci} - Y_1}{\alpha_{bi}}\right), \quad i = x, y, z.$$

将式(22)代入式(21)得

$$\dot{L}_p = -c_p \sum_{i=x,y,z} \frac{p_{ei}^2}{\alpha_{bi}^2 - p_{ei}^2} + \sum_{i=x,y,z} \frac{p_{ei} v_{ei}}{\alpha_{bi}^2 - p_{ei}^2}, \quad (23)$$

其中 $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \mathbf{a}_p = [v_{ex}, v_{ey}, v_{ez}]^T$ 为速度跟踪误差.

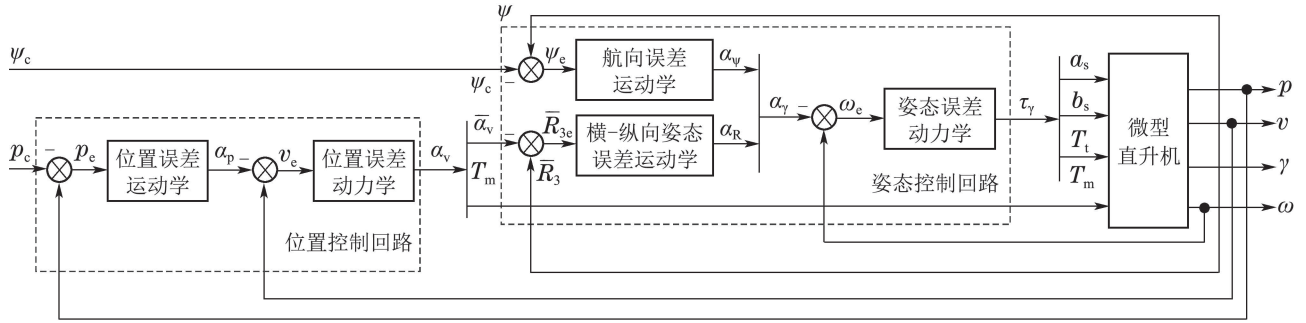


图 2 控制器结构框图

Fig. 2 Controller structure diagram

步骤 2 令 $\beta_{bi} = \beta_{ci} - c_p \alpha_{bi} - Y_1 (i = x, y, z)$, 若 $|p_{ei}| < \alpha_{bi}$, 由 $|v_{ei}| < \beta_{bi}$ 可推出 $|v_i| \leq |v_{ei}| + |a_{pi}| < \beta_{bi} + c_p \alpha_{bi} + Y_1 = \beta_{ci}$. 定义虚拟控制

$$\mathbf{a}_v = T_m [\bar{\mathbf{a}}_v^T, c \phi c \theta]^T, \quad (24)$$

其中 $\bar{\mathbf{a}}_v$ 是姿态指令, 稍后对其设计. 由式(14)可得

$$m \dot{\mathbf{v}}_e = -m g \mathbf{e}_3 + T_m \mathbf{R}_3 + \Delta_f - m \dot{\mathbf{a}}_p, \quad (25)$$

式中 $\dot{\mathbf{a}}_p = -c_p (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{p}}_c) + \ddot{\mathbf{p}}_c$. 由假设 2, 令 $|\Delta_{fi}| \leq \sigma_i (i = x, y, z)$, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]^T$ 是未知的常值上界向量. 定义 $\boldsymbol{\sigma}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 和估计误差 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}$, 取李雅普诺夫函数

$$L_v = \frac{m}{2} \sum_{i=x,y,z} \ln \frac{v_{ei}^2}{\beta_{bi}^2 - v_{ei}^2} + \frac{1}{2\gamma_f} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (26)$$

式中 $\gamma_f > 0$, 它沿式(25)的导数为

$$\dot{L}_v = \boldsymbol{\rho}^T [-m(g \mathbf{e}_3 + \dot{\mathbf{a}}_p) + T_m \mathbf{R}_3 + \Delta_f] + \frac{1}{\gamma_f} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}},$$

式中:

$$\boldsymbol{\rho} = \left[\frac{v_{ex}}{\beta_{bx}^2 - v_{ex}^2}, \frac{v_{ey}}{\beta_{by}^2 - v_{ey}^2}, \frac{v_{ez}}{\beta_{bz}^2 - v_{ez}^2} \right]^T = [\rho_x, \rho_y, \rho_z]^T.$$

由引理 2 得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}^T \Delta_f &\leq \sum_{i=x,y,z} |\rho_i| \sigma_i \leq \\ &\sum_{i=x,y,z} [\rho_i \tanh\left(\frac{\rho_i}{\epsilon}\right) + k_q \epsilon \sigma_i] = \\ &\boldsymbol{\rho}^T \text{Tanh}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\epsilon}\right) \boldsymbol{\sigma} + d'_f, \end{aligned}$$

式中 $d'_f = k_q \epsilon \sum_{i=x,y,z} \sigma_i$. 故 \dot{L}_v 满足

$$\begin{aligned} \dot{L}_v &\leq \boldsymbol{\rho}^T [-m(g \mathbf{e}_3 + \dot{\mathbf{a}}_p) + T_m \mathbf{R}_3 + \text{Tanh}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\epsilon}\right) \boldsymbol{\sigma}] + \\ &\frac{1}{\gamma_f} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} + d'_f. \end{aligned} \quad (27)$$

设计虚拟控制:

$$\mathbf{a}_v = -c_v \mathbf{v}_e + m(g \mathbf{e}_3 + \dot{\mathbf{a}}_p) - \text{Tanh}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\epsilon}\right) \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{s}_f, \quad (28)$$

式中:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_f &= \left[\frac{\beta_{bx}^2 - v_{ex}^2}{\alpha_{bx}^2 - p_{ex}^2} p_{ex}, \frac{\beta_{by}^2 - v_{ey}^2}{\alpha_{by}^2 - p_{ey}^2} p_{ey}, \frac{\beta_{bz}^2 - v_{ez}^2}{\alpha_{bz}^2 - p_{ez}^2} p_{ez} \right]^T, \\ c_v &> 0. \end{aligned}$$

将式(28)代入式(27)得

$$\begin{aligned} \dot{L}_v &\leq -c_v \sum_{i=x,y,z} \frac{v_{ei}^2}{\beta_{bi}^2 - v_{ei}^2} - \sum_{i=x,y,z} \frac{v_{ei} p_{ei}}{\alpha_{bi}^2 - p_{ei}^2} + \\ &T_m \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{R}_{3e} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \left[\frac{1}{\gamma_f} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \text{Tanh}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\epsilon}\right) \boldsymbol{\rho} \right] + d'_f, \end{aligned} \quad (29)$$

式中 $\mathbf{R}_{3e} = \mathbf{R}_3 - \frac{\mathbf{a}_v}{T_m}$. 由式(24)可知, \mathbf{R}_{3e} 的第 3 个分量等于 0. 设计自适应律:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \gamma_f [-\gamma_\sigma \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \text{Tanh}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\epsilon}\right) \boldsymbol{\rho}], \quad (30)$$

式中 $\gamma_\sigma > 0$. 将式(30)代入式(29)得

$$\begin{aligned} \dot{L}_v &\leq -c_v \sum_{i=x,y,z} \frac{v_{ei}^2}{\beta_{bi}^2 - v_{ei}^2} - \sum_{i=x,y,z} \frac{v_{ei} p_{ei}}{\alpha_{bi}^2 - p_{ei}^2} + \\ &T_m \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{R}_{3e} - \gamma_\sigma \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} + d'_f, \end{aligned} \quad (31)$$

因为

$$-\tilde{\sigma}^T \dot{\hat{\sigma}} = -\tilde{\sigma}^T (\dot{\tilde{\sigma}} + \dot{\sigma}) \leq -\frac{1}{2} \tilde{\sigma}^T \dot{\tilde{\sigma}} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T \dot{\sigma},$$

所以 \dot{L}_v 满足

$$\begin{aligned} \dot{L}_v \leq & -c_v \sum_{i=x,y,z} \frac{v_{ei}^2}{\beta_{bi}^2 - v_{ei}^2} - \frac{\gamma_\sigma}{2} \tilde{\sigma}^T \dot{\tilde{\sigma}} - \\ & \sum_{i=x,y,z} \frac{v_{ei} p_{ei}}{\alpha_{bi}^2 - p_{ei}^2} + T_m \bar{\boldsymbol{q}}^T \mathbf{R}_{3e} + d_f, \end{aligned} \quad (32)$$

式中 $d_f = d'_f + \frac{\gamma_\sigma}{2} \dot{\sigma}^T \dot{\sigma}$.

在假设1条件下,由式(24)可推出主旋翼推力:

$$T_m = \frac{m \mathbf{a}_v^T \mathbf{e}_3}{c \phi c \theta}, \quad (33)$$

其中 \mathbf{a}_v 由式(28)确定.

步骤3 由式(24)可得姿态指令

$$\bar{\mathbf{a}}_v = \frac{1}{T_m} [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2]^T \mathbf{a}_v. \quad (34)$$

令 $\bar{\mathbf{R}}_{3e} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2]^T \mathbf{R}_{3e} = \bar{\mathbf{R}}_3 - \bar{\mathbf{a}}_v$. 由式(9)可得

$$\dot{\bar{\mathbf{R}}}_{3e} = \hat{\mathbf{R}} \bar{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\bar{\mathbf{a}}}_v. \quad (35)$$

将 $\bar{\mathbf{a}}_v$ 通过指令滤波器(3)获得其导数的估计值 $\hat{\bar{\mathbf{a}}}_v$ 和相应的估计误差 $\tilde{\bar{\mathbf{a}}}_v = \dot{\bar{\mathbf{a}}}_v - \hat{\bar{\mathbf{a}}}_v$. 令 $|\tilde{a}_{vi}| \leq \kappa_i (i = x, y)$, $\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_x, \kappa_y]^T$ 是未知的常值上界向量. 定义 $\boldsymbol{\kappa}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ 和估计误差 $\tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \hat{\boldsymbol{\kappa}} - \boldsymbol{\kappa}$, 取李雅普诺夫函数

$$L_R = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{R}}_{3e}^T \bar{\mathbf{R}}_{3e} + \frac{1}{2\gamma_R} \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^T \tilde{\boldsymbol{\kappa}}, \quad (36)$$

式中 $\gamma_R > 0$, 它沿式(35)的导数为

$$\dot{L}_R = \bar{\mathbf{R}}_{3e}^T (\hat{\mathbf{R}} \bar{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\bar{\mathbf{a}}}_v + \tilde{\bar{\mathbf{a}}}_v) + \frac{1}{\gamma_R} \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^T \dot{\hat{\boldsymbol{\kappa}}}.$$

同样地,由引理2可得

$$\bar{\mathbf{R}}_{3e}^T \tilde{\bar{\mathbf{a}}}_v \leq \sum_{i=x,y} |\bar{R}_{3ei}| \kappa_i \leq \bar{\mathbf{R}}_{3e}^T \text{Tanh}\left(\frac{\bar{\mathbf{R}}_{3e}}{\epsilon}\right) \boldsymbol{\kappa} + d'_R,$$

式中 $d'_R = k_q \epsilon \sum_{i=x,y} \kappa_i$. 故 \dot{L}_R 满足

$$\begin{aligned} \dot{L}_R \leq & \bar{\mathbf{R}}_{3e}^T [\hat{\mathbf{R}} \bar{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\bar{\mathbf{a}}}_v + \text{Tanh}\left(\frac{\bar{\mathbf{R}}_{3e}}{\epsilon}\right) \boldsymbol{\kappa}] + \\ & \frac{1}{\gamma_R} \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^T \dot{\hat{\boldsymbol{\kappa}}} + d'_R, \end{aligned} \quad (37)$$

设计虚拟控制:

$$\mathbf{a}_R = \hat{\mathbf{R}}^{-1} [-c_R \bar{\mathbf{R}}_{3e} + \dot{\bar{\mathbf{a}}}_v - \text{Tanh}\left(\frac{\bar{\mathbf{R}}_{3e}}{\epsilon}\right) \hat{\boldsymbol{\kappa}} - T_m \bar{\boldsymbol{q}}], \quad (38)$$

式中: $c_R > 0$, $\bar{\boldsymbol{q}} = [\frac{v_{ex}}{\beta_{bx}^2 - v_{ex}^2}, \frac{v_{ey}}{\beta_{by}^2 - v_{ey}^2}]^T$. 将式(38)

代入式(37)得

$$\begin{aligned} \dot{L}_R \leq & -c_R \bar{\mathbf{R}}_{3e}^T \bar{\mathbf{R}}_{3e} + \bar{\mathbf{R}}_{3e}^T (-T_m \bar{\boldsymbol{q}} + \hat{\mathbf{R}} \bar{\boldsymbol{\omega}}_e) + \\ & \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^T \left[\frac{1}{\gamma_R} \dot{\hat{\boldsymbol{\kappa}}} - \text{Tanh}\left(\frac{\bar{\mathbf{R}}_{3e}}{\epsilon}\right) \bar{\mathbf{R}}_{3e} \right] + d'_R, \end{aligned} \quad (39)$$

式中 $\bar{\boldsymbol{\omega}}_e = \bar{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{a}_R = [\omega_{ex} \ \omega_{ey}]^T$. 设计自适应律:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\kappa}}} = \gamma_R [-\gamma_\kappa \hat{\boldsymbol{\kappa}} + \text{Tanh}\left(\frac{\bar{\mathbf{R}}_{3e}}{\epsilon}\right) \bar{\mathbf{R}}_{3e}], \quad (40)$$

式中 $\gamma_\kappa > 0$. 将式(40)代入式(39)得

$$\begin{aligned} \dot{L}_R \leq & -c_R \bar{\mathbf{R}}_{3e}^T \bar{\mathbf{R}}_{3e} + \bar{\mathbf{R}}_{3e}^T (-T_m \bar{\boldsymbol{q}} + \hat{\mathbf{R}} \bar{\boldsymbol{\omega}}_e) - \\ & \gamma_\kappa \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^T \dot{\hat{\boldsymbol{\kappa}}} + d'_R \leq \\ & -c_R \bar{\mathbf{R}}_{3e}^T \bar{\mathbf{R}}_{3e} - \frac{\gamma_\kappa}{2} \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\kappa}}} + \\ & \bar{\mathbf{R}}_{3e}^T (-T_m \bar{\boldsymbol{q}} + \hat{\mathbf{R}} \bar{\boldsymbol{\omega}}_e) + d_R, \end{aligned} \quad (41)$$

式中 $d_R = d'_R + \frac{\gamma_\kappa}{2} \boldsymbol{\kappa}^T \boldsymbol{\kappa}$.

步骤4 定义航向角跟踪误差 $\psi_e = \psi - \psi_c$. 由

式(10)得

$$\dot{\psi}_e = \frac{s\phi}{c\theta} \omega_y + \frac{c\phi}{c\theta} \omega_z - \dot{\psi}_c. \quad (42)$$

取李雅普诺夫函数

$$L_\psi = \frac{1}{2} \psi_e^2, \quad (43)$$

它沿式(42)的导数为

$$\dot{L}_\psi = \psi_e \left(\frac{s\phi}{c\theta} \omega_y + \frac{c\phi}{c\theta} \omega_z - \dot{\psi}_c \right). \quad (44)$$

设计虚拟控制:

$$a_\psi = \frac{c\theta}{c\phi} (-c_\psi \psi_e + \dot{\psi}_c - \frac{s\phi}{c\theta} \omega_y), \quad (45)$$

式中 $c_\psi > 0$. 将式(45)代入式(44)得

$$\dot{L}_R = -c_\psi \psi_e^2 + \frac{s\phi}{c\theta} \psi_e \omega_{ez}, \quad (46)$$

式中 $\omega_{ez} = \omega_z - a_\psi$.

步骤5 令 $\mathbf{a}_\gamma = [\mathbf{a}_R^T \ a_\psi]^T$, $\boldsymbol{\omega}_e = [\bar{\boldsymbol{\omega}}_e^T \ \omega_{ez}]^T$.

由式(15)得

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_\gamma + \boldsymbol{\Delta}_\tau - \mathbf{I} \dot{\mathbf{a}}_\gamma. \quad (47)$$

将 \mathbf{a}_γ 通过指令滤波器(3)获得其导数的估计值 $\hat{\mathbf{a}}_\gamma$ 和相应的估计误差 $\tilde{\mathbf{a}}_\gamma = \dot{\mathbf{a}}_\gamma - \hat{\mathbf{a}}_\gamma$. 记 $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\Delta}_\tau + \mathbf{I} \tilde{\mathbf{a}}_\gamma = [\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z]^T$. 令

$$|\zeta_i| \leq \varsigma_i (i = x, y, z), \ \boldsymbol{\varsigma} = [\varsigma_x, \varsigma_y, \varsigma_z]^T$$

是未知的常值上界向量. 定义 $\boldsymbol{\varsigma}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\varsigma}}$ 和估计误差 $\tilde{\boldsymbol{\varsigma}} = \hat{\boldsymbol{\varsigma}} - \boldsymbol{\varsigma}$, 取李雅普诺夫函数

$$L_\omega = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_e + \frac{1}{2\gamma_\tau} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \quad (48)$$

式中 $\gamma_\tau > 0$, 它沿式(47)的导数为

$$\dot{L}_\omega = \boldsymbol{\omega}_e^T (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_\gamma - \mathbf{I} \dot{\hat{\mathbf{a}}}_\gamma + \boldsymbol{\zeta}) + \frac{1}{\gamma_\tau} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T \dot{\hat{\boldsymbol{\zeta}}}.$$

同样地,由引理2可得

$$\boldsymbol{\omega}_e^T \boldsymbol{\zeta} \leq \sum_{i=x,y,z} |\omega_{ei}| \varsigma_i \leq \boldsymbol{\omega}_e^T \text{Tanh}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_e}{\epsilon}\right) + d'_\tau,$$

式中 $d'_\tau = k_q \epsilon \sum_{i=x,y,z} \varsigma_i$, 故 \dot{L}_ω 满足

$$\dot{L}_\omega \leq \omega_e^T [-\omega \times I\omega + \tau_\gamma - I\hat{a}_\gamma + \text{Tanh}(\frac{\omega_e}{\epsilon})\varsigma] + \frac{1}{\gamma_\tau} \zeta^T \dot{\zeta} + d'_\tau, \quad (49)$$

设计控制力矩

$$\tau_\gamma = -c_\omega \omega_e + \omega \times I\omega + I\hat{a}_\gamma - \text{Tanh}(\frac{\omega_e}{\epsilon})\hat{\zeta} - s_\tau, \quad (50)$$

式中: $c_\omega > 0$, $s_\tau = [\bar{R}_{3e}^T \hat{R} \frac{c\phi}{c\theta} \psi_e]^T$. 将式(50)代入式(49)得

$$\dot{L}_\omega \leq -c_\omega \omega_e^T \omega_e - \omega_e^T s_\tau + \zeta^T [\frac{1}{\gamma_\tau} \dot{\zeta} - \text{Tanh}(\frac{\omega_e}{\epsilon})\omega_e] + d'_\tau. \quad (51)$$

设计自适应律

$$\dot{\hat{\zeta}} = \gamma_\tau [-\gamma_\varsigma \hat{\zeta} + \text{Tanh}(\frac{\omega_e}{\epsilon})\omega_e], \quad (52)$$

式中 $\gamma_\varsigma > 0$. 将式(52)代入式(51)得

$$\dot{L}_\omega \leq -c_\omega \omega_e^T \omega_e - \omega_e^T s_\tau - \gamma_\varsigma \zeta^T \hat{\zeta} + d'_\tau \leq -c_\omega \omega_e^T \omega_e - \frac{\gamma_\varsigma}{2} \zeta^T \zeta - \omega_e^T s_\tau + d'_\tau, \quad (53)$$

式中 $d'_\tau = d'_\tau + \frac{\gamma_\varsigma}{2} \zeta^T \zeta$.

最后, 通过式(13)可得控制输入

$$M = [T_t \ a_s \ b_s]^T = A_\tau^{-1} (\tau_\gamma - \tau_B). \quad (54)$$

其中控制力矩 τ_γ 由式(50)确定.

4.2 稳定性分析(Stability analysis)

定理 1 考虑由式(4)–(5)(7)和式(9)–(10)描述的微型无人直升机系统, 给定由式(16)–(17)确定的位置和速度限制集合 Z_{pc} 和 Z_{vc} , 以及由式(18)确定的参考轨迹 p_c , 在假设1和2条件下, 若初始位置和速度跟踪误差 $p_e(0)$ 和 $v_e(0)$ 位于位置和速度跟踪误差限制集合 $Z_{pe} = \{p_e \in \mathbb{R}^3 \mid |p_{ei}| < \alpha_{bi}, i = x, y, z\}$ 和 $Z_{ve} = \{v_e \in \mathbb{R}^3 \mid |v_{ei}| < \beta_{bi}, i = x, y, z\}$ 中, 那么由式(33)和式(54)式确定的控制输入以及由式(30)(40)(52)确定的参数自适应律可以确保受控闭环系统满足:

- 1) 自适应参数估计全局有界.
- 2) 位置、速度和航向角跟踪误差最终一致有界.
- 3) 位置 p 和速度 v 始终位于位置和速度限制集合 Z_{pc} 和 Z_{vc} 中.

证 取李雅普诺夫函数 $L_a = L_p + L_v + L_R + L_\psi + L_\omega$, 由式(23)(32)(41)(46)(53)知, 它沿直升机跟踪误差系统(19)(25)(35)(47)导数

$$\dot{L}_a \leq -c_p \sum_{i=x,y,z} \frac{p_{ei}^2}{\alpha_{bi}^2 - p_{ei}^2} - c_v \sum_{i=x,y,z} \frac{v_{ei}^2}{\beta_{bi}^2 - v_{ei}^2} -$$

$$c_R \bar{R}_{3e}^T \bar{R}_{3e} - c_\psi \psi_e^2 - c_\omega \omega_e^T \omega_e - \frac{\gamma_\sigma}{2} \tilde{\sigma}^T \tilde{\sigma} - \frac{\gamma_\kappa}{2} \tilde{\kappa}^T \tilde{\kappa} - \frac{\gamma_\varsigma}{2} \zeta^T \zeta + d,$$

式中 $d = d_f + d_R + d_\tau$. 由引理1知

$$\frac{p_{ei}^2}{\alpha_{bi}^2 - p_{ei}^2} \leq \ln \frac{p_{ei}^2}{\alpha_{bi}^2 - p_{ei}^2}, \frac{v_{ei}^2}{\beta_{bi}^2 - v_{ei}^2} \leq \ln \frac{v_{ei}^2}{\beta_{bi}^2 - v_{ei}^2},$$

其中 $i = x, y, z$. 由此可以推出

$$\dot{L}_a \leq -cL_a + d, \quad (55)$$

式中

$$c = \min(2c_p, \frac{2c_v}{m}, 2c_R, 2c_\psi, \frac{2c_\omega}{\lambda(I)}, \frac{\gamma_\sigma}{\gamma_f}, \frac{\gamma_\kappa}{\gamma_R}, \frac{\gamma_\varsigma}{\gamma_\tau}).$$

对式(55)积分得

$$L_a(t) \leq \varphi(t) = (L_a(0) - \frac{d}{c})e^{-ct} + \frac{d}{c} < \infty. \quad (56)$$

1) 由式(56)和李雅普诺夫函数 L_a 的定义知, 参数估计误差 $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\kappa}$ 和 ζ 是全局有界的. 由于 σ , κ 和 ς 为常值, 所以参数估计 $\hat{\sigma}$, $\hat{\kappa}$ 和 $\hat{\zeta}$ 是全局有界的.

2) 由式(56)和李雅普诺夫函数 L_a 的定义知

$$\ln \frac{p_{ei}^2}{\alpha_{bi}^2 - p_{ei}^2} \leq L_a(t) \leq \varphi(t), \quad i = x, y, z. \quad (57)$$

对此不等式两边取对数并进行简单计算后可得

$$|p_{ei}| \leq \alpha_{bi} \sqrt{1 - e^{-2\varphi(t)}} < \alpha_{bi}, \quad i = x, y, z. \quad (58)$$

由式(58)知, 若初始位置跟踪误差 $p_e(0)$ 位于集合 Z_{pe} 中, 则位置跟踪误差 p_e 始终位于集合 Z_{pe} 中. 此外, 由 $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \frac{d}{c}$, 位置跟踪误差 p_e 最终一致收敛到集合

$$\{p_e \in \mathbb{R}^3 \mid |p_{ei}| \leq \alpha_{bi} \sqrt{1 - e^{-\frac{2d}{c}}}, i = x, y, z\}.$$

用同样方法可证明, 若初始速度跟踪误差 $v_e(0)$ 位于集合 Z_{ve} 中, 则速度跟踪误差 v_e 始终位于集合 Z_{ve} 中, 并且速度跟踪误差 v_e 最终一致收敛到集合

$$\{v_e \in \mathbb{R}^3 \mid |v_{ei}| \leq \beta_{bi} \sqrt{1 - e^{-\frac{2d}{cm}}}, i = x, y, z\}.$$

此外, 由式(56)和李雅普诺夫函数 L_a 的定义知

$$\frac{1}{2} \psi_e^2 \leq L_a(t) \leq \varphi(t), \quad (59)$$

由 $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \frac{d}{c}$ 可知航向角跟踪误差 ψ_e 最终一致收敛到集合 $\{\psi_e \in \mathbb{R} \mid \|\psi_e\| \leq \sqrt{2d/c}\}$ 中.

3) 因位置 $p = p_c + p_e$, 若 p_c 满足式(18), 则有 $|p_i| \leq |p_{ei}| + |p_{ci}| < \alpha_{bi} + Y_0 = \alpha_{ci} (i = x, y, z)$.

此外, 由式(22)可知, 速度 $v = v_e + a_p = v_e - c_p p_e + \dot{p}_c$, 若 \dot{p}_c 满足式(18), 则 $|v_i| \leq |v_{ei}| + c_p |p_{ei}| + |\dot{p}_{ci}| < \beta_{bi} + c_p \alpha_{bi} + Y_1 = \beta_{ci} (i = x, y, z)$. 因此, 位置 p 和速度 v 始终位于位置和速度限制集合 Z_{pc} 和 Z_{vc} 中.

注4 由位置、速度和航向角跟踪误差的最终一致收敛集合可知,增大参数 c 可以缩小收敛集合,提高跟踪性能.但是受 $0 < c_p \leq \min(\frac{\beta_{ci} - Y_1}{\alpha_{bi}}) (i = x, y, z)$ 限制, c 并不能任意大.

4.3 控制算法实现流程(Control algorithm flow)

给定位置限制集合 \mathcal{Z}_{pc} 和速度限制集合 \mathcal{Z}_{vc} ,指定参考轨迹 \mathbf{p}_c 满足式(18)和参考航向角 ψ_c ,当初始位置跟踪误差 $\mathbf{p}_e(0) \in \mathcal{Z}_{pe}$ 和速度跟踪误差 $\mathbf{v}_e(0) \in \mathcal{Z}_{ve}$ 时,控制算法流程如下:

- 1) 由式(22)得虚拟控制 \mathbf{a}_p .
- 2) 由自适应律(30)得 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$,由式(28)得虚拟输入 \mathbf{a}_v ,由式(33)得主旋翼推力 T_m .
- 3) 计算姿态指令 $\bar{\mathbf{a}}_v = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]\mathbf{a}_v$,并将其输入到指令滤波器(3)中获得其导数估计值 $\hat{\dot{\mathbf{a}}}_v$,由自适应律(40)得 $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$,由式(38)得虚拟输入 \mathbf{a}_R .
- 4) 由式(45)得虚拟输入 \mathbf{a}_ψ .
- 5) 由 \mathbf{a}_R 和 \mathbf{a}_ψ 组成 \mathbf{a}_γ ,并将其输入到指令滤波器(3)中获得其导数估计值 $\hat{\dot{\mathbf{a}}}_\gamma$,由自适应律(52)得 $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$,由式(50)得力矩控制 $\boldsymbol{\tau}_\gamma$.
- 6) 由式(54)得控制输入 $\mathbf{M} = [T_t \ a_s \ b_s]^T$.

5 仿真(Simulation)

本节将利用MATLAB/Simulink仿真软件对所提控制器的有效性进行验证.取如下微型无人直升机参数:

$$\begin{aligned} m &= 8.2 \text{ kg}, I_x = 0.18 \text{ kgm}^2, I_y = 0.34 \text{ kgm}^2, \\ I_z &= 0.28 \text{ kgm}^2, I_{xz} = 0.05 \text{ kgm}^2, \\ M_a &= L_b = 54, l_m = 0.01 \text{ m}, h_m = 0.24 \text{ m}, \\ l_t &= 0.9 \text{ m}, h_t = 0.08 \text{ m}, C_m = 0.00452, \\ D_m &= 0.08488, C_t = 0.005066, D_t = 0.008488. \end{aligned}$$

实验1 (性能验证) 假设微型无人直升机位置和速度的边界分别为 $\alpha_{ci} = 5.6 \text{ m}$, $\beta_{ci} = 1.2 \text{ m/s} (i = x, y, z)$,指定参考轨迹 $\mathbf{p}_c = [5 \cos(0.1t), 5 \sin(0.1t), 5]^T \text{ m}$ 满足式(18),以及参考航向角 $\psi_c = 0 \text{ rad}$.取参数 $c_p = 0.5$,则可得位置和速度跟踪误差的边界分别为 $\alpha_{bi} = 0.6 \text{ m}$, $\beta_{bi} = 0.4 \text{ m/s} (i = x, y, z)$.其他的控制和自适应参数取值如下:

$$\begin{aligned} c_v &= 3, c_R = 1, c_\psi = 0.4, c_w = 4, \\ \gamma_f &= \gamma_R = \gamma_\tau = 0.6, \gamma_\sigma = \gamma_\kappa = \gamma_\zeta = 0.05. \end{aligned}$$

直升机初始是静止在 $\mathbf{p}(0) = [5.5, 0.5, 4.5]^T \text{ m}$,初始航向角为 $\psi(0) = 0 \text{ rad}$,则初始位置误差 $\mathbf{p}_e(0) = [0.5, 0.5, -0.5]^T \text{ m}$ 满足 $|p_{ei}(0)| < \alpha_{bi} = 0.6 (i = x, y, z)$,初始速度误差

$$\mathbf{v}_e(0) = [0.25, -0.25, -0.25]^T \text{ m/s}$$

满足 $|v_{ei}(0)| < \beta_{bi} = 0.4 (i = x, y, z)$,其他的初始状态均取为0.

受控微型无人直升机仿真结果示于图3-8中.由图3-5可以看出,所提出的控制器实现了位置、速度和航向跟踪误差最终一致有界.此外,图4-5还表明,位置跟踪误差 \mathbf{p}_e 始终位于集合 \mathcal{Z}_{pe} 中,速度跟踪误差 \mathbf{v}_e 始终位于集合 \mathcal{Z}_{ve} 内.由定理1可推出 $\mathbf{p} \in \mathcal{Z}_{pc}$ 和 $\mathbf{v} \in \mathcal{Z}_{vc}$,这就验证了控制器对飞行位置和速度的限制.图6表明,估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$ 都是有界的,验证了定理1中的结果.

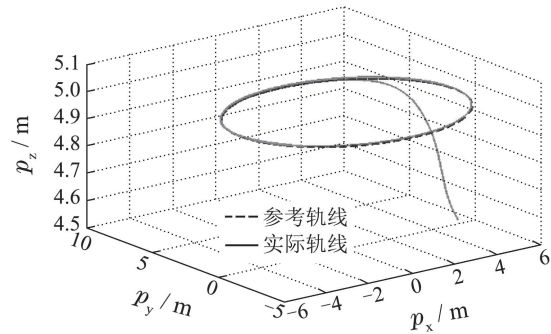


图3 3D轨迹跟踪图

Fig. 3 3D trajectory tracking figure

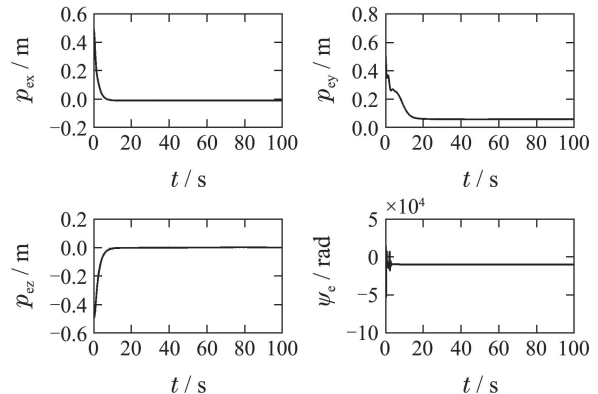


图4 位置和航向跟踪误差图

Fig. 4 Position and yaw tracking error figure

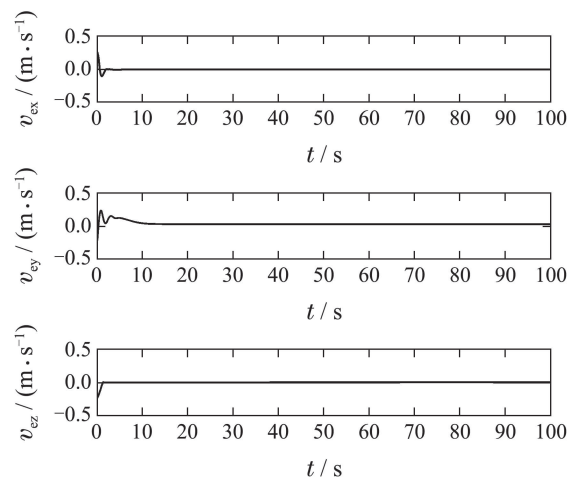


图5 速度跟踪误差图

Fig. 5 Velocity tracking error figure

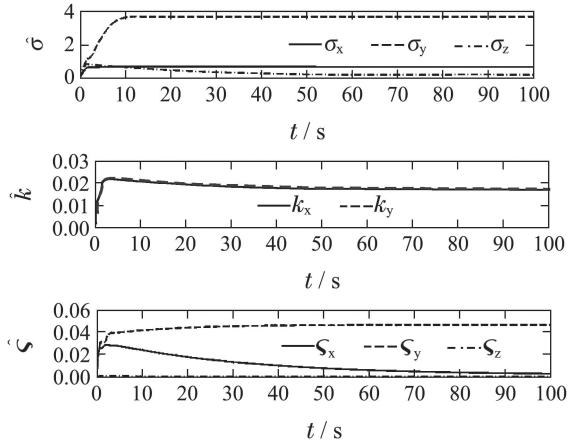


图 6 σ , κ 和 ζ 估计图

Fig. 6 Estimations of σ , κ and ζ

实验 2(性能比较) 分别利用本文提的受限自适应反步和文献[26]中提的标准自适应反步解决微型无人直升机轨迹跟踪问题, 仿真时的限制边界、参考轨迹、初始条件、控制器和自适应参数都和实验1中的相同. 仿真结果示于图7-8中, 从中可以看出, 两种方法都实现了位置和速度跟踪误差的最终一致有界, 但是利用受限自适应反步所得的最终收敛集合要比利用标准自适应反步所得的最终收敛集合小很多; 此外, 比较 Oy 轴上的位置和速度跟踪误差可以看出, 受限自适应反步可以确保位置和速度跟踪误差始终位于预设范围内 ($|p_{ey}| < 0.6$ 和 $|v_{ey}| < 0.4$), 实现了对位置和速度的限制, 但是标准自适应反步却无法满足不同位置和速度的限制.

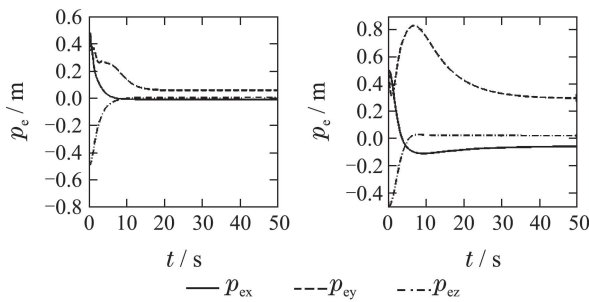


图 7 位置误差比较图

Fig. 7 Comparison of position errors

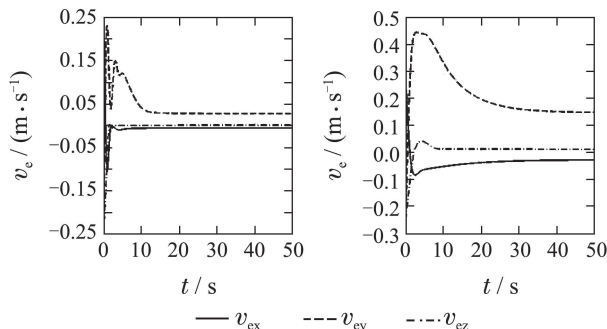


图 8 速度误差比较图

Fig. 8 Comparison of velocity errors

6 结论(Conclusions)

本文研究了狭窄空间中飞行的微型无人直升机位置和速度受限的轨迹跟踪控制问题. 基于障碍李雅普诺夫函数的受限反步法设计控制器实现了闭环直升机系统跟踪误差的最终一致有界, 并确保了位置和速度被限制在预定范围内. 此外, 用指令滤波器对虚拟控制的导数进行估计, 避免了复杂的解析计算. 并设计了自适应算法对未建模动态和指令滤波器误差所引起的扰动的上界进行估计和补偿, 提高了跟踪性能.

参考文献(References):

- [1] ZHU B, HUO W. Adaptive backstepping control for a miniature autonomous helicopter [C] // *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. Orlando, USA: IEEE, 2011: 5413 – 5418.
- [2] 孙秀云, 方勇纯, 孙宁. 小型无人直升机的姿态与高度自适应反步控制 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(3): 381 – 388. (SUN Xiuyun, FANG Yongchun, SUN Ning. Backstepping-based adaptive attitude and height control of a small-scale unmanned helicopter [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(3): 381 – 388.)
- [3] BIN X, GUO J C, ZHANG Y, et al. Sliding mode tracking control for miniature unmanned helicopters [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, 28(1): 277 – 284.
- [4] XU R, OZGUNER U. Sliding mode control of a quadrotor helicopter [C] // *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, USA: IEEE, 2006: 13 – 15.
- [5] NODLAND D, ZARGARZADEH H, JAGANNATHAN S, et al. Neural network-based optimal adaptive output feedback control of a helicopter UAV [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2013, 24(7): 1061 – 1073.
- [6] RAAFAT S M, AKMELIAWATI R. Robust disturbance rejection control of helicopter system using intelligent identification of uncertainties [J]. *Procedia Engineering*, 2012, 41(3): 120 – 126.
- [7] LIU C J, CHEN W H, ANDREWS J. Trajectory control of a small-scale helicopters using explicit nonlinear MPC augmented with disturbance observers [J]. *Control Engineering Practice*, 2012, 20(3): 258 – 268.
- [8] 蒋沅, 曾令武, 代冀阳. 一类非线性直升机模型的滑膜降阶控制器设计 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(3): 330 – 338. (JIANG Yuan, ZENG Lingwu, DAI Jiyang. Sliding-mode reduced-order controller design for a class of nonlinear helicopter model [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(3): 330 – 338.)
- [9] HADDAD W M, CHELLABOINA V. *Nonlinear Dynamical Systems and Control* [M]. New Jersey, USA: Princeton University Press, 2008.
- [10] ROBERTS A, TAYEBI A. Adaptive position tracking of VTOL UAVs [J]. *IEEE Transaction on Robotics*, 2011, 27(1): 129 – 142.
- [11] FARRELL J A, POLYCARPOU M, SHARMA M, et al. Command filtered backstepping [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 54(6): 1391 – 1395.
- [12] DONG W J, FARRELL J A, POLYCARPOU M M, et al. Command filtered adaptive backstepping [J]. *IEEE Transactions on Control Systems and Technology*, 2012, 20(3): 566 – 580.
- [13] ZHU B, HUO W. 3D path-following control for a model-scaled autonomous helicopter [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, 22(5): 1927 – 1934.
- [14] XU D Z, JIANG B, QI R, et al. Adaptive longitudinal motion control with command-filters compensation for high-speed underwater

- supercavitating vehicles [C] // *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Control and Automation*. Hangzhou, China: IEEE, 2013: 744 – 749.
- [15] CHOI I, BANG H. Adaptive command filter backstepping tracking controller design for quadrotor unmanned aerial vehicle [J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2012, 226(5): 483 – 497.
- [16] YUAN X D, ZHU W P, WANG J, et al. Command-filtered adaptive backstepping control for marine power system [C] // *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*. Nanjing, China: IEEE, 2013: 8184 – 8187.
- [17] CHEN F Y, LU F F, JIANG B, et al. Adaptive compensation control of the quadrotor helicopter using quantum information technology and disturbance observer [J]. *Journal of Franklin Institute*, 2014, 351(1): 442 – 455.
- [18] HE Y B, PEI H L, SUN T R. Robust tracking control of helicopters using backstepping with disturbance observers [J]. *Asian Journal of Control*, 2014, 16(6): 1 – 16.
- [19] LEE C T, TSAI C C. Nonlinear adaptive aggressive control using recurrent neural networks for a small scale helicopter [J]. *Mechatronics*, 2010, 20(4): 474 – 484.
- [20] ZHU B. Nonlinear adaptive neural network control for a model-scaled unmanned helicopter [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(3): 1695 – 1708.
- [21] ZHU B, HUO W. Robust nonlinear control for a model-scaled helicopter with parameter uncertainties [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(102): 1139 – 1154.
- [22] REN B B, GE S S. Adaptive neural control for output feedback nonlinear systems using a barrier Lyapunov function [J]. *IEEE Transaction on Neural Networks and Learning Systems*, 2010, 21(8): 1339 – 1345.
- [23] ZUO Z Y, WANG C L. Adaptive trajecotoy tracking control of output constrained multi-rotors systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2014, 8(13): 1163 – 1174.
- [24] CHEN M, GE S S, REN B B. Adaptive tracking control of uncertain MIMO systems with input constraints [J]. *Automatica*, 2011, 47(3): 452 – 465.
- [25] HU J C, ZHANG H H. Immersion and invariance based command-filtered adaptive backstepping control of VTOL vehicles [J]. *Automatica*, 2013, 49(7): 2160 – 2167.
- [26] ZOU Y, HUO W. Adaptive tracking control for a model helicopter with disturbances [C] // *Proceedings of the 2015 American Control Conference*. Chicago, USA: IEEE, 2015: 3824 – 3829.

作者简介:

邹尧 (1987–), 男, 博士研究生, 研究方向为非线性控制、飞行控制, E-mail: zouyao20@126.com;

霍伟 (1951–), 男, 博士生导师, 教授, 研究方向为非线性控制、无人飞行器控制、智能控制, E-mail: weihuo@buaa.edu.cn.