

平面四旋翼无人飞行器运送系统的轨迹规划与跟踪控制器设计

梁 潇, 方勇纯[†], 孙 宁

(南开大学 机器人与信息自动化研究所, 天津 300350; 南开大学 天津市智能机器人技术重点实验室, 天津 300350)

摘要: 对于四旋翼无人飞行器运送系统而言, 需要保证飞行过程中负载的摆幅维持在适当的范围内, 并且在飞行器到达目的地后负载无残余摆动. 本文针对四旋翼无人飞行器运送系统, 提出了一种新颖的轨迹规划与跟踪控制方法. 论文首先得到了平面四旋翼无人飞行器的运动特性与负载摆角之间的非线性耦合关系. 通过相平面内的几何分析, 分别设计了两个轴方向上的分段式加速度轨迹. 这种轨迹具有简洁的解析表达式并可获得较高的运送效率, 同时满足飞行器的速度, 加速度等物理约束. 为了使四旋翼无人飞行器准确跟踪规划好的轨迹, 本文基于反步法设计了一种非线性跟踪控制器, 并通过李雅普诺夫方法对其闭环稳定性进行分析, 证明其能使跟踪误差指数收敛于零. 论文最后通过仿真结果验证了本文所提出方法的可行性与有效性, 及其对外界干扰的鲁棒性.

关键词: 四旋翼无人飞行器; 运送系统; 相平面; 轨迹规划; 反步法

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Trajectory planning and tracking controller design for a planar quadrotor unmanned aerial vehicle transportation system

LIANG Xiao, FANG Yong-chun[†], SUN Ning

(Institute of Robotics and Automatic Information System, Nankai University, Tianjin 300350, China;
Tianjin Key Laboratory of Intelligent Robotics, Nankai University, Tianjin 300350, China)

Abstract: For a quadrotor unmanned aerial vehicle (UAV) transportation system, it is necessary to keep the payload swing within an appropriate range in the flight course, and the residual swing should vanish when the UAV reaches the destination. To meet these requirements, we propose a novel method of trajectory planning and tracking control for the quadrotor UAV transportation system. In this method the nonlinear coupling behavior between the planar motion and the load swing of the quadrotor UAV is first determined; and then, we derive a simple expression for each segmented acceleration trajectory along two planar coordinates in the phase plane. Because of their simplicities, these segmented trajectories are easy to be applied to design a backstepping-based nonlinear tracking controller for obtaining an efficient transportation course while satisfying the physical constraints on velocity and acceleration of the UAV. The stability of the closed-loop system is proved by using Lyapunov techniques, which ensures that the tracking error exponentially converges to zero. Simulation results show the feasibility and effectiveness of the proposed approach in achieving the desired performance indices while providing robustness against external disturbances.

Key words: quadrotor UAV; transportation system; phase plane; trajectory planning; backstepping

1 引言(Introduction)

四旋翼无人飞行器与单旋翼直升机类似, 具有灵活的运动机能和垂直起降的特点, 但机械结构更为简单而且制造成本低廉, 拥有比单旋翼更高的能源利用率、更好的安全性和更灵活的应用范围. 近年, 关于旋翼飞行器悬停^[1]、轨迹跟踪^[2]、姿态控制^[3-4]、编队控制^[5-6]等问题得到了深入研究^[7-8], 其身影越来越多地出现在搜查监视、抗震救援、森林灭火等任务中, 因此, 无论在军用还是民用领域都有极广泛的应用前景.

当使用无人飞行器运送大型物体或有毒液体时, 需要将物体外置于飞行器下方进行传输. 通常的方法是在无人飞行器下通过夹持器装载物体^[9-11], 这种方法增加了系统的惯性, 导致其姿态响应缓慢. 而通过吊绳运送负载的方式不仅节省空间, 更具安全性, 同时保留了飞行器灵活的机动性, 因此更加受到人们的青睐. 在使用吊绳的运送系统中, 四旋翼无人飞行器因为具有悬停飞行的能力, 在飞行器运动至目标位置后可以悬停在该位置处, 随后将所吊运物体放下即可,

收稿日期: 2015-05-27; 录用日期: 2015-09-25.

[†] 通信作者. E-mail: fangyc@nankai.edu.cn; Tel.: +86 22-23505706.

国家杰出青年科学基金项目(61325017)资助.

Supported by China National Funds for Distinguished Young Scientists (61325017).

而固定翼无人飞行器由于难以悬停在指定位置, 因此很难完成该任务. 对于四旋翼无人飞行器运送系统, 当飞行器到达指定位置后, 在没有人力干预的情况下, 负载仍然需要较长时间才能静止下来, 在复杂环境中极容易与周围物体发生碰撞, 因此要求飞行器到达指定位置后负载即停止摆动, 这样就增加了运送过程中对操纵人员的技术要求, 伴随着难度的增加, 系统的运送效率和安全性又难以得到保障. 因此, 如何使四旋翼无人飞行器能够自主运动至指定地点, 并在其停止运动时确保负载无残余摆动是一个重要的研究问题.

为使负载具有较小的残余摆动, Faust等基于强化学习的方法设计了飞行器的运动轨迹^[12], 该方法对噪声具有良好的鲁棒性, 并通过实验得到了验证. 文献[13]则利用动态规划的方法完成了消摆轨迹的规划. 在文献[14]中, Sreenath等首先证明了四旋翼无人飞行器-负载系统是一个以负载位置和飞行器偏航角为平坦输出的混合微分平坦系统, 随后设计了一种非线性几何控制器, 它可以使跟踪误差近全局指数收敛. 当负载通过柔性拉索与飞行器相连时, Goodarzi等将拉索建模为串行连接的刚性构件^[15], 设计控制器使飞行器的位置渐近稳定, 并保证所有构件竖直方向对齐. 文献[16]研究了当负载质量未知时, 如何通过自适应方法对该不确定性进行补偿, 以便使负载到达期望位置的同时各构件竖直方向仍然对齐. Bernard等将研究重点集中在控制连接飞行器与负载的绳索的运动上^[17], 他们所提出的控制方法不仅能够完成单个飞行器的运送任务, 同时还可以使多个飞行器协作, 实现对一个负载的运送. 文献[18]提出的算法使多个飞行器运送的一个负载渐近收敛到期望轨迹上, 同时保证所有飞行器维持预定的编队形状. 此外, 不同于前述文献都是面向运送过程, Cruz等针对运送前的起吊过程^[19], 在负载质量未知情况下设计了自适应几何控制器, 实现了飞行器自主提起地面负载的目标.

与桥式吊车等欠驱动运送系统^[20-22]的目的一样, 四旋翼无人飞行器运送系统旨在将其悬挂的负载平稳、安全、高效地运送至指定位置. 欠驱动系统由于独立控制量数目少于系统自由度, 从而给其控制带来了很大的困难. 而四旋翼无人飞行器运送系统具有典型的欠驱动特性, 负载不能直接通过驱动器控制, 而只能通过对飞行器的运动进行设计来间接控制负载的运动. 现有方法往往忽略了运送过程中四旋翼无人飞行器的速度、加速度等物理约束, 不利于实际应用. 考虑到飞行器与负载之间的非线性耦合关系, 本文采用基于相平面几何分析的轨迹规划方法, 构造了飞行器的分段式加速度轨迹, 该方法不仅消除了残摆, 还可以使前述的各个物理约束得以满足, 并尽可能地提高了系统的运送效率. 在完成前述轨迹规划的任务后,

本文基于反步法设计了一种具有良好鲁棒性的轨迹跟踪控制器, 确保跟踪误差指数收敛于零. 最后通过仿真测试验证了文中设计的轨迹规划/跟踪控制算法的可行性与有效性.

本文剩余部分组织如下: 第2节提出运送模型, 并将负载摆动映射于相平面上; 第3节首先构造了分段式加速度轨迹, 然后基于反步法设计跟踪控制器, 并对其稳定性进行理论分析; 第4节给出了仿真结果并进行了分析; 第5节对本文工作进行总结与展望.

2 问题描述(Problem statement)

平面四旋翼无人飞行器运送系统的示意图如图 1 所示. 由于负载对飞行器运动状态的影响较小, 因而能够忽略其对飞行器的作用, 得到如下系统动力学模型^[23]:

$$m\ddot{y} = -f \sin \phi, \quad (1)$$

$$m\ddot{z} = -mg + f \cos \phi, \quad (2)$$

$$J\ddot{\phi} = M, \quad (3)$$

$$ml\ddot{\theta} = f \sin(\phi - \theta), \quad (4)$$

式中: $y(t)$, $z(t)$ 分别表示机体质心相对于图示惯性坐标系在两个轴向上的位移, $\phi(t)$ 表示机体相对于 y 轴绕质心逆时针方向旋转的角度, m , J 分别表示四旋翼无人飞行器的质量和转动惯量, $f(t)$ 表示垂直于机体表面的升力, $M(t)$ 表示机体的力矩, $\theta(t)$ 表示负载关于竖直方向的摆角, l 为吊绳长度.

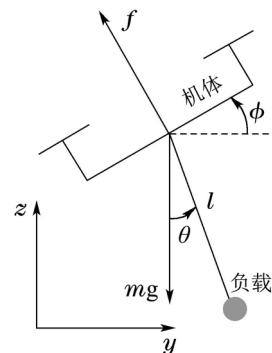


图 1 平面四旋翼无人飞行器运送系统示意图

Fig. 1 Schematic diagram for the planar quadrotor UAV transportation system

考虑到四旋翼无人飞行器的实际工作情况, 可对运送系统作如下合理假设:

假设 1 对于平面四旋翼无人飞行器, 其姿态角 $\phi(t)$ 满足 $-\pi/2 < \phi(t) < \pi/2$.

假设 2 在四旋翼无人飞行器运送过程中, 负载摆角 $\theta(t)$ 满足 $-\pi/2 < \theta(t) < \pi/2$.

假设 3 在实际飞行过程中, 出于安全因素考虑, 应避免四旋翼无人飞行器自由落体式下落, 因此其竖直方向加速度满足 $\ddot{z}(t) > -g$.

假设4 运送过程中吊绳始终处于拉紧的状态.

为得到飞行器两个轴向加速度 $\ddot{y}(t)$, $\ddot{z}(t)$ 与负载摆角 $\theta(t)$ 之间的数学关系, 利用三角函数相关性质, 并将式(1)–(2)代入式(4)可得

$$l\ddot{\theta} + (\ddot{z} + g)\sin\theta = -\ddot{y}\cos\theta. \quad (5)$$

在实际运送过程中, 为安全起见, 一般要求负载摆角保持在 10° 范围之内, 因此 $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ (本文的轨迹规划方法亦能保证该近似关系始终成立), 式(5)可进一步写作

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{\omega_n^2}{g}\ddot{z} + \omega_n^2\right)\theta = -\frac{\omega_n^2}{g}\ddot{y}, \quad (6)$$

其中 $\omega_n = \sqrt{g/l}$. 由此可见, 负载摆角直接受到飞行器两个轴向上运动状态的影响, 因此, 本文从规划飞行器的运动轨迹着手, 并致力于达成以下目标:

目标1 四旋翼无人飞行器在有限时间 t_f 内到达水平方向与竖直方向目标位置 $(p_{dy}, p_{dz})^T \in \mathbb{R}^2$, 即

$$y(t) = p_{dy}, \quad z(t) = p_{dz}, \quad \forall t \geq t_f.$$

若已知为负载的目标位置, 可以根据吊绳长度进行计算, 进而得到飞行器的目标位置 $(p_{dy}, p_{dz})^T$.

目标2 受制于四旋翼无人飞行器驱动性能等固有约束, 运送过程中两轴向的速度, 加速度应满足

$$|\dot{y}(t)| \leq v_{yub}, \quad |\dot{z}(t)| \leq a_{ub}, \quad (7)$$

$$|\dot{z}(t)| \leq v_{zub}, \quad |\ddot{z}(t)| \leq b_{ub}, \quad (8)$$

式中 $v_{yub}, v_{zub}, a_{ub}, b_{ub} \in \mathbb{R}^+$ 分别表示两个轴向上四旋翼无人飞行器速度与加速度的上限.

目标3 运送过程中, 出于安全起见, 负载摆角应维持在一定范围内, 即

$$|\theta(t)| \leq \theta_{ub}, \quad (9)$$

其中 $\theta_{ub} \in \mathbb{R}^+$ 表示所允许的负载最大摆幅.

目标4 在四旋翼无人飞行器到达水平方向目标位置后, 负载应无残余摆动, 即满足

$$\text{当 } y(t) = p_{dy} \text{ 时, } \theta(t) = 0, \quad \forall t \geq t_f.$$

当飞行器沿两轴的加速度均为常数时, 不妨分别记为 $\ddot{y}(t) = a$, $\ddot{z}(t) = b$, 此时, 式(6)可写作

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{\omega_n^2}{g}b + \omega_n^2\right)\theta = -\frac{\omega_n^2}{g}a, \quad (10)$$

由假设3知 $b > -g$, 对式(10)求解, 可以得到

$$\theta(t) = \left[\theta(0) + \frac{a}{b+g}\right]\cos(\omega t) + \frac{\dot{\theta}(0)}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{a}{b+g}, \quad (11)$$

式中: $\omega = \omega_n\sqrt{b/g+1}$, $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$ 分别表示负载的

初始摆角和初始角速度. 对上式两边关于时间求导有

$$\dot{\theta}(t) = -\left[\theta(0) + \frac{a}{b+g}\right]\omega\sin(\omega t) + \dot{\theta}(0)\cos(\omega t). \quad (12)$$

在此, 引入尺度化的角速度信号 $\dot{\Theta}(t)$:

$$\dot{\Theta}(t) = \frac{\dot{\theta}(t)}{\omega},$$

由上式与式(11)–(12), 可以得到

$$\begin{aligned} \left[\theta(t) + \frac{a}{b+g}\right]^2 + \dot{\Theta}^2(t) &= \\ \left[\theta(0) + \frac{a}{b+g}\right]^2 + \Theta^2(0). \end{aligned} \quad (13)$$

不失一般性, 考虑负载初始条件如下:

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

则式(13)可进一步写作

$$\left[\theta(t) + \frac{a}{b+g}\right]^2 + \dot{\Theta}^2(t) = \left(\frac{a}{b+g}\right)^2, \quad (14)$$

该方程描述了以 $\theta(t)$ 为横坐标, $\dot{\Theta}(t)$ 为纵坐标的相平面内一系列以 $(-a/(b+g), 0)$ 为圆心, 半径为

$$R = \frac{a}{b+g} \quad (15)$$

的圆(由假设3有 $b > -g$, 保证了系列圆的存在).

由分析可知, $a \neq 0$ 时根据其是正或负, 系统状态 $[\theta(t), \dot{\Theta}(t)]$ 分别在纵轴左侧或右侧的圆上以角速度 ω 顺时针转动. 特别地, 当 $a = 0$ 时, 系统状态 $[\theta(t), \dot{\Theta}(t)]$ 停留于相平面坐标原点, 即负载与飞行器之间相对静止.

注1 假设2是具有一般性理论意义的假设, 要求负载摆角满足 $-\pi/2 < \theta(t) < \pi/2$, 是一个符合物理约束的合理范围; 而进一步要求负载摆角保持在 10° 范围之内, 则是为了使系统安全运行, 避免负载与周围物体发生碰撞.

注2 本文所研究的对象是平面内四旋翼无人飞行器运送系统, 由于是平面情形, 不存在控制器能够抑制侧向的摆动, 因此本文暂时不考虑圆锥摆运动, 后续在研究三维情形时便可以应对这种问题.

注3 如参考文献[12–14, 23]和假设4中指出的, 本文忽略沿吊绳产生的推力与负载可能产生的震荡运动, 后续研究会将吊绳建模为若干段串级连接的刚体, 从而可以对吊绳推力和负载震荡等问题进行研究.

3 轨迹规划与跟踪控制器设计(Trajectory planning and tracking controller design)

本节首先基于相平面分析方法^[24], 分别针对两个轴向各自构造分段式加速度轨迹, 随后基于反步法, 提出一种轨迹跟踪控制器, 并对闭环系统的稳定性进行分析.

3.1 轨迹规划(Trajectory planning)

由于两个轴向同时运动增加了设计的复杂度, 而按照分段式轨迹规划方法, 水平方向和竖直方向各自运动至目标位置的时间是一定的, 其先后顺序并不会对运送效率产生影响, 为方便后续分析, 本文首先使四旋翼无人飞行器竖直方向保持静止, 针对水平方向运动构造分段式加速度轨迹. 此时, 系统自然频率为

$$\omega = \omega_n. \tag{16}$$

当飞行器到达水平方向目标位置后, 由于此时水平方向加速度为零, 根据相平面分析可知, 飞行器竖直方向的运动不会影响负载摆角, 故可基于其运动特性构造竖直方向分段式加速度轨迹.

3.1.1 水平方向轨迹规划(Horizontal direction trajectory planning)

首先规划水平方向分段式加速度轨迹为

$$\ddot{y}(t) = \begin{cases} a_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{a1}, \\ 0, & t_{a1} < t \leq t_{a1} + t_{a2}, \\ -a_{\max}, & t_{a1} + t_{a2} < t \leq 2t_{a1} + t_{a2}, \\ 0, & t > 2t_{a1} + t_{a2}, \end{cases} \tag{17}$$

其中: t_{a1}, t_{a2} 分别表示加(减)速阶段与匀速运动阶段的持续时间, a_{\max} 为水平方向加(减)速阶段的加速度幅值. 因此, 水平方向的轨迹规划问题转换为: 在给定目标位置 p_{dy} 的情况下, 如何选取 t_{a1}, t_{a2} 及 a_{\max} , 使轨迹满足前述目标.

由式(16)–(17), 在水平方向加速阶段, 系统 $[\theta(t), \dot{\theta}(t)]$ 从原点出发, 以角速度 ω_n 在相平面左侧圆上顺时针转动, 在经历一个周期 $T = 2\pi/\omega_n$ 后, 返回相平面坐标原点, 加速阶段用时 $t_{a1} = T$. 此后, 在时段 $(t_{a1}, t_{a1} + t_{a2}]$ 内, 系统 $[\theta(t), \dot{\theta}(t)]$ 停留于原点, 此时, 四旋翼无人飞行器在水平方向匀速运动, 负载与飞行器之间无相对运动. 对于减速阶段做类似分析可知, 历时时间 T 后系统返回原点, 负载无残余摆动.

通过对相平面内几何特性进行分析, 不难得知过程中摆角最大幅值为 $\theta_{\max} = 2a_{\max}/g$, 根据式(9)有

$$\theta_{\max} = \frac{2a_{\max}}{g} \leq \theta_{ub}.$$

结合式(7), 则飞行器水平方向最大加速度应满足

$$a_{\max} \leq a_{mub} = \min\left\{a_{ub}, \frac{g\theta_{ub}}{2}\right\},$$

式中 $a_{mub} \in \mathbb{R}^+$ 表示约束之后的加速度上限. 由于过程中水平方向最大速度为 $v_{y \max} = a_{\max}T$, 故有 $v_{y \max} \leq a_{mub}T$.

对水平方向的运动过程进行分析可以得到 $p_{dy} = v_{y \max}(T + t_{a2})$, 因此

$$t_{a2} = \frac{p_{dy}}{v_{y \max}} - T. \tag{18}$$

又因 $t_{a2} \geq 0$, 由上式有 $v_{y \max} \leq p_{dy}/T$, 由式(7)与前述分析知 $v_{y \max} \leq \min\{v_{yub}, p_{dy}/T, a_{mub}T\}$. 为提升运送效率, 使四旋翼无人飞行器更快到达水平方向期望位置, 不妨取

$$v_{y \max} = \min\left\{v_{yub}, \frac{p_{dy}}{T}, a_{mub}T\right\}.$$

根据式(18)计算即可求出 t_{a2} , 且在 $T_1 = 2t_{a1} + t_{a2}$ 时, 四旋翼无人飞行器到达水平方向目标位置 p_{dy} .

3.1.2 竖直方向轨迹规划(Vertical direction trajectory planning)

在完成第1阶段水平方向运动后, 四旋翼无人飞行器开始第2阶段竖直方向运动. 由于此时 $a = 0$, 负载相对飞行器始终保持静止. 构造与水平方向类似的分段式加速度轨迹, 表达式为

$$\ddot{z}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq T_1, \\ b_{\max}, & T_1 < t \leq T_1 + t_{b1}, \\ 0, & T_1 + t_{b1} < t \leq T_1 + t_{b1} + t_{b2}, \\ -b_{\max}, & T_1 + t_{b1} + t_{b2} < t \leq T_1 + T_2, \\ 0, & t > T_1 + T_2, \end{cases} \tag{19}$$

式中: t_{b1}, t_{b2} 分别表示加(减)速阶段与匀速运动阶段的持续时间, b_{\max} 为竖直方向加(减)速阶段的加速度幅值, $T_2 = 2t_{b1} + t_{b2}$. 为达到目标1–4, 并提升效率, 取 $b_{\max} = b_{ub}$, 结合式(8), 有

$$v_{z \max} = \min\{v_{zub}, \sqrt{b_{\max}p_{dz}}\},$$

经过和水平方向类似分析可得

$$t_{b1} = \frac{v_{z \max}}{b_{\max}}, \quad t_{b2} = \frac{p_{dz} - b_{\max}t_{b1}^2}{v_{z \max}},$$

在时刻 T_2 时, 飞行器到达竖直方向目标位置 p_{dz} .

至此, 得到了四旋翼无人飞行器在两个轴向上的分段式加速度轨迹, 上述过程不仅给出了加速度的解析表达式, 保证飞行器满足速度与加速度约束, 并且在有限时间 $t_f = T_1 + T_2$ 内完成上述目标, 其中 T_1, T_2 形式如前文所述, 只与飞行器自身参数相关.

3.2 跟踪控制器设计(Tracking controller design)

规划得到四旋翼无人飞行器的轨迹之后, 本文基于反步法, 设计了一种对外界干扰具有良好鲁棒性的非线性控制器, 使飞行器能准确跟踪规划好的轨迹, 为此, 通过选择虚拟的控制量来进行设计, 逐步修正控制算法, 最终使跟踪误差以指数方式收敛于零.

3.2.1 控制律设计(Control law design)

为方便后续控制器设计与稳定性证明, 记 $\phi_1(t) = \phi(t), \phi_2(t) = \dot{\phi}_1(t)$. 考虑到实际飞行过程中, 外部的风力等因素对飞行器所产生的干扰, 这里

引入系统干扰项,则动力学方程(1)(2)与(3)可重新写作:

$$m\ddot{y} = -f \sin \phi_1 + d_1, \quad (20)$$

$$m\ddot{z} = -mg + f \cos \phi_1 + d_2, \quad (21)$$

$$\dot{\phi}_1 = \phi_2, \quad (22)$$

$$J\dot{\phi}_2 = M, \quad (23)$$

其中 $d_1(t)$, $d_2(t)$ 分别表示两个轴向上的外界干扰,并满足

$$\sup\{|d_1(t)|\} \leq \bar{d}_1, \sup\{|d_2(t)|\} \leq \bar{d}_2, \quad (24)$$

式中 \bar{d}_1 , \bar{d}_2 表示相应的干扰上界。

定义 y , z 两个轴向上的跟踪误差分别为

$$e_y = y - y_d, \quad (25)$$

$$e_z = z - z_d, \quad (26)$$

式中 $y_d(t)$, $z_d(t)$ 分别表示两个轴向上的参考轨迹,由前述轨迹规划的过程,有如下结论:

$$y_d(t), \dot{y}_d(t), \ddot{y}_d(t) \in \mathcal{L}_\infty, \quad (27)$$

$$z_d(t), \dot{z}_d(t), \ddot{z}_d(t) \in \mathcal{L}_\infty. \quad (28)$$

为简化设计过程,引入线性滤波器,并定义两个轴向上的滤波误差分别为

$$r_y = \dot{e}_y + \alpha_y e_y, \quad (29)$$

$$r_z = \dot{e}_z + \alpha_z e_z, \quad (30)$$

其中 $\alpha_y, \alpha_z \in \mathbb{R}^+$ 表示正的增益。

第1步 由式(20)(25)(29),并利用中值定理^[25]可得

$$m\dot{r}_y = -f \sin \phi_{1d} - e_{\phi_1} f \cos \phi_1^* - m\ddot{y}_d + m\alpha_y \dot{e}_y + d_1, \quad (31)$$

其中: ϕ_1^* 满足 $\phi_1^* = \mu\phi_1 + (1-\mu)\phi_{1d}$,且 $0 < \mu < 1$. $f \sin \phi_{1d}$ 为虚拟控制量,辅助误差信号 $e_{\phi_1}(t)$ 定义为

$$e_{\phi_1} = \phi_1 - \phi_{1d}, \quad (32)$$

在此,设计虚拟控制量 $f \sin \phi_{1d}$ 为

$$f \sin \phi_{1d} = k_y r_y - m\ddot{y}_d + m\alpha_y \dot{e}_y + \text{sgn } r_y \bar{d}_1, \quad (33)$$

其中:反馈增益 $k_y \in \mathbb{R}^+$,符号函数 $\text{sgn } s$ 定义如下:

$$\text{sgn } s = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s = 0, \\ -1, & s < 0. \end{cases} \quad (34)$$

将式(33)代入式(31),则 $\dot{r}_y(t)$ 的闭环方程为

$$m\dot{r}_y = -k_y r_y - e_{\phi_1} f \cos \phi_1^* + d_1 - (\text{sgn } r_y) \bar{d}_1. \quad (35)$$

第2步 同第1步类似,由式(21)(26)(30)首先得到 $m\dot{r}_z(t)$ 的表达式,在此基础上设计虚拟控制量

$f \cos \phi_{1d}$ 为

$$f \cos \phi_{1d} = -k_z r_z + mg + m\ddot{z}_d - m\alpha_z \dot{e}_z - \text{sgn } r_z \bar{d}_2, \quad (36)$$

式中 $k_z \in \mathbb{R}^+$ 表示反馈增益,将式(36)代入 $m\dot{r}_z(t)$ 的表达式中,经计算可以得到 $\dot{r}_z(t)$ 的闭环方程

$$m\dot{r}_z = -k_z r_z - e_{\phi_1} f \sin \phi_1^\circ + d_2 - (\text{sgn } r_z) \bar{d}_2, \quad (37)$$

上式中, $\phi_1^\circ = \eta\phi_1 + (1-\eta)\phi_{1d}$,其中 $0 < \eta < 1$.由式(33)与式(36),经计算可以得到 $f(t)$ 和 $\phi_{1d}(t)$ 的表达式分别如下:

$$f = \sqrt{(f \sin \phi_{1d})^2 + (f \cos \phi_{1d})^2}, \quad (38)$$

$$\phi_{1d} = \arctan(f \sin \phi_{1d} / f \cos \phi_{1d}). \quad (39)$$

第3步 对式(32)两边关于时间求导,并将式(22)代入,经计算可以得到 $\dot{e}_{\phi_1}(t)$ 的开环动态特性如下:

$$\dot{e}_{\phi_1} = e_{\phi_2} + \dot{\phi}_{2d} - \dot{\phi}_{1d},$$

其中: $\phi_{2d}(t)$ 为引入的虚拟控制量,辅助误差信号 $e_{\phi_2}(t)$ 为

$$e_{\phi_2} = \phi_2 - \phi_{2d}. \quad (40)$$

设计虚拟控制量 $\phi_{2d}(t)$ 为

$$\phi_{2d} = \dot{\phi}_{1d} - k_1 e_{\phi_1} - (\text{sgn } e_{\phi_1}) \cdot (|r_y f| + |r_z f|), \quad (41)$$

式中控制增益 $k_1 \in \mathbb{R}^+$, $\dot{\phi}_{1d}$ 可由式(39)对时间求导获取.将式(41)代入 $\dot{e}_{\phi_1}(t)$ 的开环动态特性中可以得到

$$\dot{e}_{\phi_1} = -k_1 e_{\phi_1} - \text{sgn } e_{\phi_1} \cdot (|r_y f| + |r_z f|) + e_{\phi_2}. \quad (42)$$

第4步 由式(40)(23)经计算可以得到 $\dot{e}_{\phi_2}(t)$ 的开环动态特性

$$\dot{e}_{\phi_2} = M/J - \dot{\phi}_{2d},$$

设计控制量 $M(t)$ 为

$$M = J(-k_2 e_{\phi_2} + \dot{\phi}_{2d} - e_{\phi_1}), \quad (43)$$

其中控制增益 $k_2 \in \mathbb{R}^+$,上式中第1项保证 e_{ϕ_2} 趋于0,第2项用于抵消 $\dot{\phi}_{2d}$,可由式(41)对时间求导得到,第3项用于抵消后文对式(45)求导时式(42)中所引入的交叉项 $e_{\phi_1} e_{\phi_2}$.将式(43)代入 $\dot{e}_{\phi_2}(t)$ 的开环动态特性表达式中则有

$$\dot{e}_{\phi_2} = -k_2 e_{\phi_2} - e_{\phi_1}. \quad (44)$$

3.2.2 稳定性分析(Stability analysis)

定理 1 跟踪控制器及虚拟控制量(33)(36)(41)(43)能保证四旋翼无人飞行器的位置,速度跟踪误差 $[e_y \ \dot{e}_y \ e_z \ \dot{e}_z]^T$ 指数收敛于 $[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

证 选择李雅普诺夫候选函数为

$$V = \frac{1}{2}mr_y^2 + \frac{1}{2}mr_z^2 + \frac{1}{2}e_{\phi_1}^2 + \frac{1}{2}e_{\phi_2}^2. \quad (45)$$

对上式关于时间求导, 并将式(35)(37)(42)与式(44)代入可得

$$\dot{V} = -k_y r_y^2 - k_z r_z^2 - k_1 e_{\phi_1}^2 - k_2 e_{\phi_2}^2 + \varphi_1 + \varphi_2, \quad (46)$$

式中:

$$\varphi_1 = -e_{\phi_1} r_y f \cos \phi_1^* - e_{\phi_1} r_z f \sin \phi_1^* - e_{\phi_1} \operatorname{sgn} e_{\phi_1} \cdot (|r_y f| + |r_z f|), \quad (47)$$

$$\varphi_2 = r_y d_1 - r_y \operatorname{sgn} r_y \bar{d}_1 + r_z d_2 - r_z \operatorname{sgn} r_z \bar{d}_2. \quad (48)$$

由 $|\cos \phi_1^*| \leq 1$, $|\sin \phi_1^*| \leq 1$, 可以得到 $\varphi_1(t) \leq 0$; 由式(24)则有 $\varphi_2(t) \leq 0$, 通过计算可以得到

$$\dot{V} \leq -k_y r_y^2 - k_z r_z^2 - k_1 e_{\phi_1}^2 - k_2 e_{\phi_2}^2 \leq -\frac{\min\{k_y, k_z, k_1, k_2\}}{\max\{\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\}} V. \quad (49)$$

综上所述, $\chi = [r_y \ r_z \ e_{\phi_1} \ e_{\phi_2}]^T$ 内所有信号都将以指数方式收敛于零. 利用线性滤波器性质, 由于 $[r_y \ r_z]^T$ 指数收敛于零, 则误差信号及其时间导数 $[e_y \ \dot{e}_y \ e_z \ \dot{e}_z]^T$ 也指数收敛于 $[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. 又因为系统内所有信号有界, 且规划出的轨迹满足式(27)与(28), 因此各控制输入与虚拟控制量均有界.

注 4 在轨迹规划阶段, 由于负载摆角与飞行器两轴方向加速度直接相关, 因此此时不需要考虑飞行器姿态角, 直接规划了两个轴向上的加速度轨迹. 而在跟踪控制器设计阶段, 本文完整地考虑了飞行器的模型结构, 由两个轴向加速度得到所需姿态角, 根据反步法设计的控制器即可完成对规划轨迹的跟踪.

4 仿真结果与分析(Simulation results and analysis)

首先, 本节将所规划的加速度轨迹作为运动学模型(5)的输入, 得到期望轨迹, 然后分别在有无外界干扰的两种情况下利用期望轨迹来测试控制器的跟踪效果.

4.1 轨迹规划仿真结果(Simulation results for trajectory planning)

在进行仿真时, 系统参数与四旋翼无人飞行器初始状态选取如下:

$$\begin{aligned} m &= 2 \text{ kg}, J = 0.02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, l = 2 \text{ m}, \\ \theta_{\text{ub}} &= 5^\circ, p_{\text{dy}} = p_{\text{dz}} = 4 \text{ m}, v_{\text{yub}} = 0.6 \text{ m/s}, \\ v_{\text{zub}} &= 0.4 \text{ m/s}, a_{\text{ub}} = b_{\text{ub}} = 0.2 \text{ m/s}^2, \\ y(0) &= 0 \text{ m}, z(0) = 3 \text{ m}, g = 9.8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2. \end{aligned}$$

通过计算可得如下参数:

$$\begin{aligned} \omega_n &= 2.2136 \text{ rad/s}, T = 2.8385 \text{ s}, t_{\text{a1}} = 2.8385 \text{ s}, \\ t_{\text{a2}} &= 4.2076 \text{ s}, t_{\text{b1}} = 2.000 \text{ s}, t_{\text{b2}} = 0.5000 \text{ s}, \\ a_{\text{max}} &= b_{\text{max}} = 0.2000 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

仿真结果如图2所示. 图2中虚线表示四旋翼无人飞行器的目标位置: $p_{\text{dy}} = 4 \text{ m}$, $p_{\text{dz}} = 4 \text{ m}$, 实线表示规划出的飞行器轨迹与由式(5)所得负载摆角, 点划线将飞行器加速、匀速、减速和静止的几个运动阶段划分开来. 可见, 在 $t = 9.8845 \text{ s}$ 时, 飞行器到达水平方向目标位置, 此后负载无残余摆动; 在 $t = 14.3845 \text{ s}$ 时, 飞行器运动至竖直方向目标位置, 即本文方法能快速准确地使四旋翼无人飞行器运动至目标位置 $(p_{\text{dy}}, p_{\text{dz}})^T$.

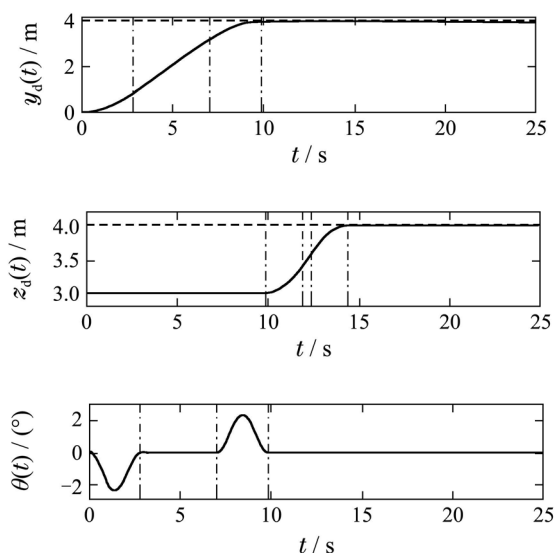


图 2 四旋翼无人飞行器规划轨迹与负载摆角

Fig. 2 Planned trajectory of the quadrotor UAV and the payload swing angle

4.2 跟踪控制器仿真结果(Simulation results for the tracking controller)

4.2.1 无外界干扰时仿真结果(Simulation results under no external disturbances)

为体现本文轨迹规划方法的普适性, 重新选取系统参数和四旋翼无人飞行器初始状态如下:

$$\begin{aligned} m &= 5 \text{ kg}, J = 0.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, l = 2 \text{ m}, \theta_{\text{ub}} = 3^\circ, \\ p_{\text{dy}} &= 3 \text{ m}, p_{\text{dz}} = 6 \text{ m}, v_{\text{yub}} = 0.4 \text{ m/s}, \\ v_{\text{zub}} &= 0.5 \text{ m/s}, a_{\text{ub}} = b_{\text{ub}} = 0.5 \text{ m/s}^2, \\ y(0) &= 0 \text{ m}, z(0) = 4 \text{ m}, g = 9.8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2. \end{aligned}$$

经计算可得

$$\begin{aligned} \omega_n &= 2.2136 \text{ rad/s}, T = 2.8385 \text{ s}, t_{\text{a1}} = 2.8385 \text{ s}, \\ t_{\text{a2}} &= 4.6615 \text{ s}, t_{\text{b1}} = 1.000 \text{ s}, t_{\text{b2}} = 3.0000 \text{ s}, \end{aligned}$$

$$a_{\max} = 0.1409 \text{ m/s}^2, b_{\max} = 0.5000 \text{ m/s}^2.$$

将所得轨迹作为期望轨迹,采用设计的控制器进行跟踪.飞行器初始时刻满足 $\phi(0) = 0 \text{ rad}$, $\dot{\phi}(0) = 0 \text{ rad/s}$, $\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0 \text{ m/s}$. 在无外界干扰时,滤波器和控制器的参数选择如下:

$$\begin{aligned} \alpha_y &= 20, \alpha_z = 1, k_y = 50, \\ k_z &= 20, k_1 = 40, k_2 = 50. \end{aligned}$$

仿真结果如图3-4所示.图3中实线表示四旋翼无人飞行器的实际运动轨迹与速度,虚线表示轨迹规划方法所得到的期望轨迹与期望速度,可以看出,本文所设计的控制器具有良好的位置与速度跟踪性能,可以使飞行器快速跟踪期望轨迹.图4所示为负载摆动情况与控制输入示意图.在 $t = 10.3385 \text{ s}$ 飞行器到达水平方向目标位置后,负载无任何残余摆动,与理论分析保持一致.综上所述,本文所提出的方法不仅完成了负载摆角抑制方面的要求,同时尽可能地提升了系统效率.图3-4中点划线将飞行器加速,匀速,减速和静止的几个运动阶段划分开来.

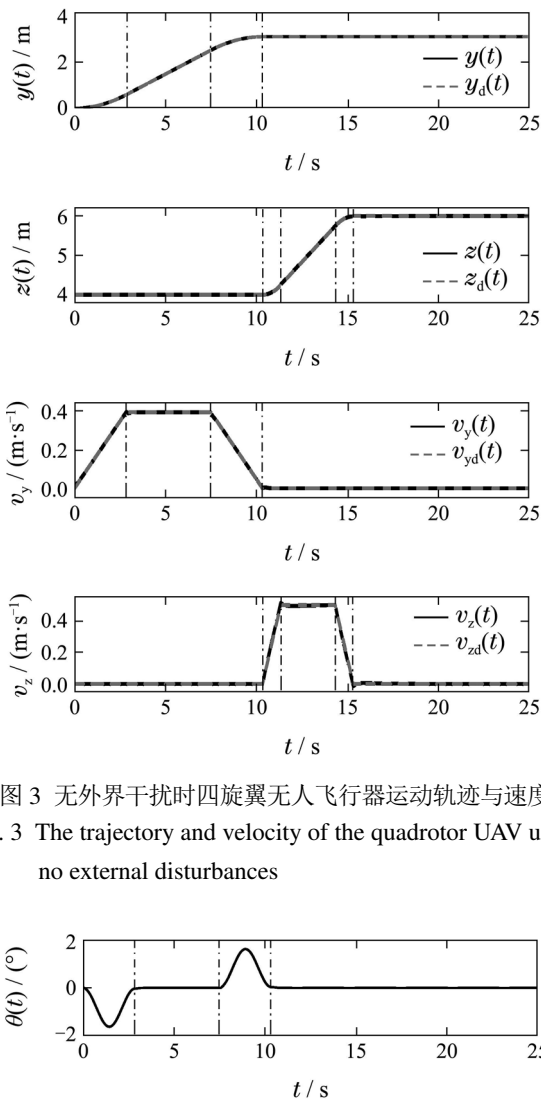


图3 无外界干扰时四旋翼无人飞行器运动轨迹与速度
Fig. 3 The trajectory and velocity of the quadrotor UAV under no external disturbances

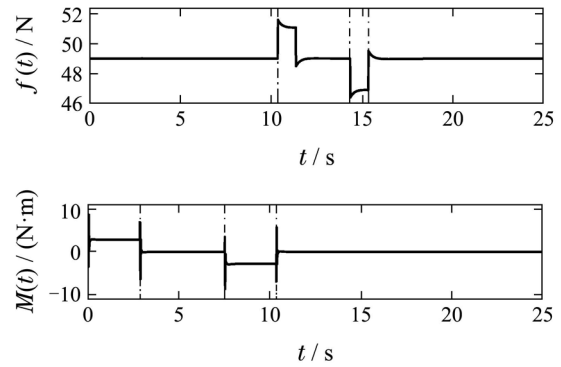


图4 无外界干扰时负载摆角与控制输入
Fig. 4 The payload swing angle and the control input under no external disturbances

4.2.2 有外界干扰时仿真结果(Simulation results in the presence of external disturbances)

假设在 $t = 0 \sim 20 \text{ s}$ 内四旋翼无人飞行器受到外界干扰,形式为

$$d_1(t) = 3 \sin(4\pi t) \text{ N}, d_2(t) = 1 \cos(4\pi t) \text{ N},$$

已知的干扰上界分别为: $\bar{d}_1 = 3, \bar{d}_2 = 1$. 控制参数保持不变,仿真结果如图5-6所示.可以看出在系统受到持续外界干扰时,控制器对位置和速度依然能取得很好的跟踪效果,且飞行器到达目标位置后负载摆动很小,因此,本文控制方法对外界干扰具有很好的鲁棒性.在 $t = 20 \text{ s}$ 外界干扰消失后,残摆很快完全消除.仿真结果表明了本文控制方法的可行性与有效性.

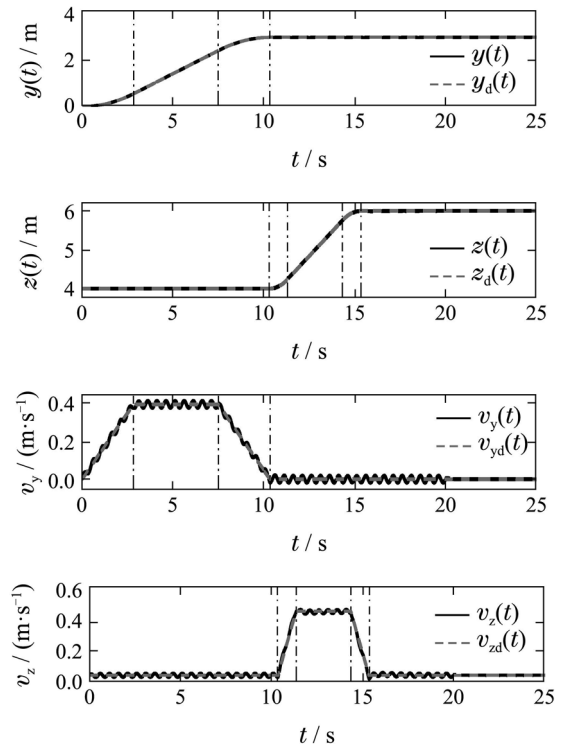


图5 有外界干扰时四旋翼无人飞行器运动轨迹与速度
Fig. 5 The trajectory and velocity of the quadrotor UAV in the presence of external disturbances

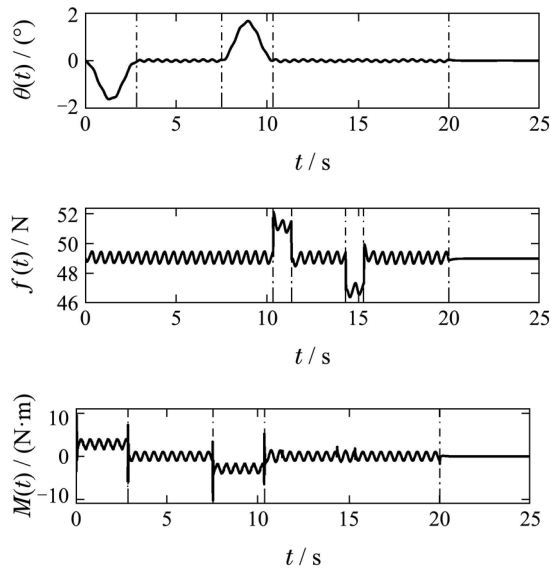


图 6 有外界干扰时负载摆角与控制输入

Fig. 6 The payload swing angle and the control input in the presence of external disturbances

5 结论(Conclusions)

针对平面四旋翼无人飞行器运送系统, 本文首先分析了负载摆角与四旋翼无人飞行器两轴方向加速度的非线性耦合关系. 在此基础上, 为实现消摆的目标, 论文通过相平面分析方法构造了分段式加速度轨迹, 所得轨迹具有解析表达式, 并满足飞行器速度与加速度等物理约束, 非常便于实际应用. 随后, 本文基于反步法设计了一种非线性跟踪控制器, 并通过理论分析证明其可使跟踪误差指数收敛于零. 最后通过数值仿真对本文方法进行了验证, 仿真结果表明: 本文设计的轨迹规划/跟踪控制方法可以高效地完成运送任务. 在运送过程中, 负载摆角保持在允许范围之内, 且无残余摆动, 整个系统对外界干扰具有很好的鲁棒性. 后续研究将进行实验验证, 并把本文方法扩展至三维空间内四旋翼无人飞行器运送系统中.

参考文献(References):

- [1] CARRILLO L R G, DZUL A, LOZANO R. Hovering quad-rotor control: A comparison of nonlinear controllers using visual feedback [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2012, 48(4): 3159 – 3170.
- [2] LEE T, LEOK M, MCCLAMROCH N H. Nonlinear robust tracking control of a quadrotor UAV on SE (3) [J]. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(2): 391 – 408.
- [3] 方勇纯, 申辉, 孙秀云, 等. 无人直升机航向自抗扰控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(2): 238 – 243. (FANG Yongchun, SHEN Hui, SUN Xiuyun, et al. Active disturbance rejection control for heading of unmanned helicopter [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(2): 238 – 243.)
- [4] 鲜斌, 古训, 刘祥, 等. 小型无人直升机姿态非线性鲁棒控制设计 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(4): 409 – 416. (XIAN Bin, GU Xun, LIU Xiang, et al. Nonlinear robust attitude control for a miniature unmanned helicopter [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 409 – 416.)
- [5] RINALDI F, CHIESA S, QUAGLIOTTI F. Linear quadratic control for quadrotors UAVs dynamics and formation flight [J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2013, 70(1/4): 203 – 220.
- [6] TURPIN M, MICHAEL N, KUMAR V. Trajectory design and control for aggressive formation flight with quadrotors [J]. *Autonomous Robots*, 2012, 33(1/2): 143 – 156.
- [7] 杨荟僚, 姜斌, 张柯. 四旋翼直升机姿态系统的直接自修复控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(8): 1053 – 1060. (YANG Huiliao, JIANG Bin, ZHANG Ke. Direct self-repairing control for four-rotor helicopter attitude systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(8): 1053 – 1060.)
- [8] 汪绍华, 杨莹. 基于卡尔曼滤波的四旋翼飞行器姿态估计和控制算法研究 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(9): 1109 – 1115. (WANG Shaohua, YANG Ying. Quadrotor aircraft attitude estimation and control based on Kalman filter [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1109 – 1115.)
- [9] POUNDS P E I, DOLLAR A M. Stability of helicopters in compliant contact under PD-PID control [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2014, 30(6): 1472 – 1486.
- [10] POUNDS P E I, BERSAK D R, DOLLAR A M. Practical aerial grasping of unstructured objects [C] // *Proceedings of the 2011 IEEE Conference on Technologies for Practical Robot Applications*. Woburn: IEEE, 2011: 99 – 104.
- [11] POUNDS P E I, BERSAK D R, DOLLAR A M. Grasping from the air: Hovering capture and load stability [C] // *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Shanghai: IEEE, 2011: 2491 – 2498.
- [12] FAUST A, PALUNKO I, CRUZ P, et al. Learning swing-free trajectories for UAVs with a suspended load [C] // *Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Karlsruhe: IEEE, 2013: 4902 – 4909.
- [13] PALUNKO I, FIERRO R, CRUZ P. Trajectory generation for swing-free maneuvers of a quadrotor with suspended payload: A dynamic programming approach [C] // *Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Minnesota: IEEE, 2012: 2691 – 2697.
- [14] SREENATH K, LEE T, KUMAR V. Geometric control and differential flatness of a quadrotor UAV with a cable-suspended load [C] // *Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control*. Florence: IEEE, 2013: 2269 – 2274.
- [15] GOODARZI F A, LEE D, LEE T. Geometric stabilization of a quadrotor UAV with a payload connected by flexible cable [C] // *Proceedings of American Control Conference*. Portland: IEEE, 2014: 4925 – 4930.
- [16] DAI S C, LEE T, BERNSTEIN D S. Adaptive control of a quadrotor UAV transporting a cable-suspended load with unknown mass [C] // *Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles: IEEE, 2014: 6149 – 6154.
- [17] BEINARD M, KONDAK K. Generic slung load transportation system using small size helicopters [C] // *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Kobe: IEEE, 2009: 3258 – 3264.
- [18] LEE T, SREENATH K, KUMAR V. Geometric control of cooperating multiple quadrotor UAVs with a suspended payload [C] // *Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control*. Florence: IEEE, 2013: 5510 – 5515.
- [19] CRUZ P, FIERRO R. Autonomous lift of a cable-suspended load by an unmanned aerial robot [C] // *Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Control Applications*. Antibes: IEEE, 2014: 802 – 807.

- [20] SUN N, FANG Y C, ZHANG Y D, et al. A novel kinematic coupling-based trajectory planning method for overhead cranes [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*: 2012, 17(1): 166 – 173.
- [21] SCHULTZ J, MURPHEY T. Trajectory generation for underactuated control of a suspended mass [C] // *Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Minnesota: IEEE, 2012: 123 – 129.
- [22] SUN N, FANG Y. An efficient online trajectory generating method for underactuated crane systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*: 2014, 24(11): 1653 – 1663.
- [23] SREENATH K, MICHAEL N, KUMAR V. Trajectory generation and control of a quadrotor with a cable-suspended load-A differentially-flat hybrid system [C] // *Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Karlsruhe: IEEE, 2013: 4888 – 4895.
- [24] SUN N, FANG Y, ZHANG X, et al. Transportation task-oriented trajectory planning for underactuated overhead cranes using geometric analysis [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2012, 6(10): 1410 – 1423.
- [25] APOSTOL T M. *Mathematical Analysis* [M]. Second Edition. MA: Addison-Wesley, 1974: 1 – 492.

作者简介:

梁 潇 (1991–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为无人飞行器的控制与轨迹规划, E-mail: liangx@mail.nankai.cn;

方勇纯 (1973–), 男, 教授, 博士生导师, IEEE高级会员, 主要研究方向为非线性控制、机器人视觉伺服、无人机及桥式吊车等欠驱动系统控制, E-mail: fangyc@nankai.edu.cn;

孙 宁 (1988–), 男, 讲师, 目前研究方向为欠驱动机电系统的先进控制、轨迹规划等, E-mail: sunn@nankai.edu.cn.