第 33 卷第 1 期
2016 年 1 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 33 No. 1
Jan. 2016

DOI: 10.7641/CTA.2016.50556

概率布尔控制网络的弱能控性

李志强†, 肖会敏

(河南财经政法大学 数学与信息科学学院, 河南 郑州 450046)

摘要: 本文研究了概率布尔控制网络的弱能控性, 系统的弱能控性是概率布尔网络精确能控的一个推广. 首先利用矩阵的半张量积和逻辑变量的向量表示, 概率布尔控制网络被表示为离散时间动态系统. 接着给出概率布尔控制网络弱能控的定义, 从离散时间系统的结构矩阵出发, 构造了最大概率转移矩阵, 矩阵中的元素表示相应状态之间可能发生转移的最大概率, 在此基础上研究了概率布尔控制网络的弱能控的条件, 同时给出了两个状态弱能达时控制序列的设计算法. 最后通过例子进一步解释了弱能控的概念和控制序列设计算法的有效性.

关键词: 半张量积; 概率布尔控制网络; 弱能达性; 弱能控性

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Weak controllability of probabilistic Boolean control networks

LI Zhi-qiang†, XIAO Hui-min

(School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou Henan 450046, China)

Abstract: The weak controllability of probabilistic Boolean control networks (PBCNs) is discussed in this paper. The definition of weak controllability for PBCNs is introduced firstly. Using semi-tensor product and vectors expression of logical values, we express PBCNs as discrete time dynamic systems. Based on the structure matrix of PBCN, the maximum probability transfer matrix is constructed, the element of this matrix denotes the maximum probability with which one state is transferring to another. Also the weak controllability matrix is constructed, and the necessary and sufficient condition for weak controllability of PBCNs is obtained. Finally, the algorithm is given to construct the control sequence which drives the initial state to the desired value with probability ω. A numerical example is presented to show the applicability of our approach.

Key words: semi-tensor product; probabilistic Boolean control network; weak reachability, weak controllability

1 引言(Introduction)

N–K布尔网络最初由Kauffman[1–2]提出, 并用来描述刻画基因调控网络, 已经成为系统生物学里的热点研究课题[3–4], 同时也引起其他研究领域的兴趣. 在计算机科学中, 学者们将N–K布尔网络用于计算机中“门”的设计与优化[5]; 在物理学中, 学者们将它用于研究混沌现象[6–7]以及与玻璃等无序材料有关的相关问题[8–9].

矩阵的半张量积[10]是研究逻辑动态系统的重要工具[11]. 在文章[12]中具体地介绍了利用矩阵半张量积和逻辑变量的向量表示把布尔网络转化为离散时间动态系统, 这是在状态空间框架下研究逻辑系统的关键一步. 随后布尔网络的相关控制问题得到了广泛研究[13–19], 同时也引起了国外学者的广泛关注. 文献[20]从图论观点研究了布尔网络的能观性. 文献[21]研究了布尔控制网络的能观性，并且设计了网络观测器. 文献[22–23]研究了单输入的布尔网络的最大值原理和最小时间控制问题. 文献[24]从矩阵特征值角度研究块序列布尔网络的拓扑结构. 程代展研究员在文献[25]综述了逻辑系统的代数状态空间方法.

对于概率布尔控制网络的研究主要是基于马尔科夫链. 利用逻辑系统的状态空间方法, 概率布尔控制网络被表示为一个有限状态的马尔科夫链. 文献[26–28]利用动态规划研究了概率布尔控制网络的的最优化控制与干预问题. 文献[29]研究了含有状态约

收稿日期: 2015−06−25; 录用日期: 2015−09−30.
†通信作者. E-mail: lizhiqiang@amss.ac.cn. Tel.: +86 371-63519558.
本文责任编委: 赵千川.
国家自然科学基金项目(61203050, 61374079, 11202068), 河南省高等学校青年骨干教师计划项目(2013GGJS–099), 河南省基础与前沿技术研究计划项目(132300410011), 河南省高等学校哲学社会科学研究“三重”重大项目(专项)(2014–SZZD–30)资助.
Supported by National Natural Science Foundation (NNSF) of China (61203050, 61374079, 11202068), Young Core Instructor Foundation from the Education Commission of Henan Province (2013GGJS–099), Basic and Advanced Technology Research Foundation of Henan Province (1323004 0011) and The Three Major Programs for Philosophy Social Sciences Research in Henan Province University (2014–SZZD–30).

束和控制约束的混合值逻辑动态系统的能控性. 文献[29–30]研究了概率布尔控制网络和状态带有时滞的布尔网络的能控性与镇定性, 给出了概率布尔控制网络两个状态以概率1能达的充要条件, 只是条件的检验中计算量太大, 文献[31]利用马尔科夫链的遍历性理论研究了概率布尔控制网络的能控性，并给出了概率布尔控制网络的能控的充要条件, 并且简化了计算复杂性. 文献[32]研究了概率布尔控制网络避开状态集合的能控性与能达性.

在随机系统的能控性研究中, 倒向随机微分方程理论提供了一个新的思路[33]. 彭实戈院士在文献[34]从倒向随机微分方程的角度提出了随机控制系统的精确终端能控性和能控性. 在随机系统中, 状态之间的能控与能达性都是以在概率意义下的能控与能达, 因此研究的精确能控及以概率1的能控局限性太强. 受此启发, 本文研究概率布尔控制网络的弱能控性. 随机系统的弱能控性在理论上推广了精确能控性, 同时也丰富了逻辑系统控制理论; 在应用上, 也为研究基因调控网络的能控性和干预问题提供了新的研究思路和方法.

2 准备工作(Preliminaries)

为叙述方便, 本文用到的基本符号列表如下:

- $\mathcal{D}=\{0,1\}$;
- $1_k:=(\underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{k})^{\mathrm{T}}$;
- δ_n^i : 单位矩阵I_n的第i列;
- $\Delta_n:=\{\delta_n^i|i=1,\cdots,n\}, \Delta:=\Delta_2$;
- 矩阵$L\in\mathbb{R}^{n\times r}$称为逻辑矩阵, 其中$\mathrm{Col}(L)\subset\Delta_n$.
- 全体$n\times r$逻辑矩阵的集合为$\mathcal{L}_{n\times r}$; 逻辑矩阵$L=$
- $[\delta_n^{i_1},\delta_n^{i_2},\cdots,\delta_n^{i_r}]$, 记为$L=\delta_n[i_1,i_2,\cdots,i_r]$;
- 矩阵$B\in\mathbb{R}^{n\times r}$称为布尔矩阵, 其中$B_{ij}\in\mathcal{D}$.全体
- $n\times r$布尔矩阵的集合为$\mathcal{B}_{n\times r}$.

矩阵半张量积[10]是本文的主要工具. 首先将逻辑变量的取值与向量建立对应, 不引起混淆的情况下, $1\sim\delta_2^1, 0\sim\delta_2^2, \mathcal{D}\sim\Delta$. 利用矩阵的半张量积, 将逻辑动态系统转化为代数形式, 以逻辑动态系统的结构矩阵为主要研究对象. 本文所指的“半张量积”是指左半张量积. 关于矩阵半张量积的性质可以参看文献[10–11].

定义 1[10]　设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}, B\in\mathbb{R}^{p\times q}$, 记$t=\mathrm{lcm}(n,p)$为$n$和$p$的最小公倍数. 矩阵$A$和$B$的半张量积定义为

$$A\ltimes B=(A\otimes I_{t/n})(B\otimes I_{t/p}). \tag{1}$$

利用矩阵的半张量积, 将逻辑动态系统转化为代数形式的过程中, 下述引理起了关键作用.

命题 1[10]　设$x_1,\cdots,x_n\in\mathcal{D}$是$n$个逻辑变量, $f(x_1,\cdots,x_n)$是一个逻辑函数. 则存在唯一的矩阵$M_f\in L_{2\times 2^n}$, 使得

$$f(x_1,\cdots,x_n)=M_f\ltimes_{i=1}^{n}x_i,\ x_i\in\Delta. \tag{2}$$

式(2)称为是逻辑函数f的代数形式.

为了研究概率布尔控制网络的能达与能控性引进如下矩阵运算.

定义 2　1) n维行向量$a=(a_1,\cdots,a_n), b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义$a\odot b'$和$a\vee b$为

$$a\odot b'=\bigvee_{i=1}^{n}a_ib_i,\ a\vee b=(a_1\vee b_1\cdots,a_n\vee b_n).$$

2) 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}, B\in\mathbb{R}^{n\times p}$. 那么$A\odot B:=C=(c_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$定义为

$$c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

特别的, 如果$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 那么

$$A^{(k)}:=\underbrace{A\odot\cdots\odot A}_{k},\ k\geqslant 1.$$

当$k=2$时, $A^{(2)}:=A\odot A$.

3) 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$和$B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 那么$A\vee B:=C=(c_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$定义为

$$c_{ij}=a_{ij}\vee b_{ij}.$$

通过下述例子说明定义2.

例 1　1) 设行向量$\alpha=(1\ \ 0.1\ \ 1\ \ 0)$, 行向量$\beta=(0.2\ \ 0.1\ \ 0\ \ 0.9)$.

$$\alpha\odot\beta'=(1\ \ 0.1\ \ 1\ \ 0)\odot\begin{pmatrix}0.2\\0.1\\0\\0.9\end{pmatrix}=$$

$$(1\times 0.2)\vee(0.1\times 0.1)\vee(1\times 0)\vee(0\times 0.9)=0.2.$$

2) 矩阵A和B:

$$A=\begin{pmatrix}0.2&1&0&0.1\\0.4&0.1&0&0.3\\1&0&1&0.2\end{pmatrix}\text{和}B=\begin{pmatrix}1&0.2&1\\0.2&1&0.3\\1&0.1&1\\0.9&0&1\end{pmatrix}.$$

那么得到

$$A\odot B=\begin{pmatrix}0.2&1&0&0.1\\0.4&0.1&0&0.3\\1&0&1&0.2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1&0.2&1\\0.2&1&0.3\\1&0.1&1\\0.9&0&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0.2&1&0.3\\0.4&0.1&0.4\\1&0.2&1\end{pmatrix}.$$

$$A\vee B'=\begin{pmatrix}0.2&1&0&0.1\\0.4&0.1&0&0.3\\1&0&1&0.2\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}1&0.2&1&0.9\\0.2&0.1&0.1&0\\1&0.3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&0.9\\0.4&0.1&0.1&0.3\\1&0.3&1&1\end{pmatrix}.$$

本文定义的运算$\odot$有下面的保不等式性, 并且满足结合律和分配律.

命题 2 1) 设矩阵$A\in\mathbb{R}^{m\times n}, B\in\mathbb{R}^{m\times n}, C\in\mathbb{R}^{n\times p}$. 如果$A\leqslant B$, 那么$A\odot C\leqslant B\odot C$.

2) 设矩阵$A\in\mathbb{R}^{m\times n}, B\in\mathbb{R}^{n\times p}, C\in\mathbb{R}^{p\times q}$, 那么$(A\odot B)\odot C=A\odot(B\odot C)$.

3) 设矩阵$A\in\mathbb{R}^{m\times n}, B\in\mathbb{R}^{m\times n}, C\in\mathbb{R}^{n\times p}$, 那么$(A\vee B)\odot C=(A\odot C)\vee(B\odot C)$.

证 记

$$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}),\ C=(c_{ij}).$$

1) 矩阵$A\odot C$的第i行第j列元素为$(A\odot C)_{ij}=\bigvee\limits_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}$. 同样, 矩阵$B\odot C$的第$i$行第$j$列元素为$(B\odot C)_{ij}=\bigvee\limits_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj}$. 记$b_{ik_*}c_{k_*j}=\bigvee\limits_{k=1}^{s}b_{ik}c_{kj}$. 只需证明$\forall k=1,2,\cdots,n$, $a_{ik}c_{kj}\leqslant b_{ik_*}c_{k_*j}$.

用反证法, 设存在γ, 使得$a_{i\gamma}c_{\gamma j}>b_{ik_*}c_{k_*j}$. 由于$b_{ik_*}c_{k_*j}\geqslant b_{i\gamma}c_{\gamma j}$, 则

$$a_{i\gamma}c_{\gamma j}>b_{i\gamma}c_{\gamma j}.$$

这与条件$a_{i\gamma}\leqslant b_{i\gamma}$矛盾. 因此结论1)得证.

2) 由定义2, $(A\odot B)_{ik}=\bigvee\limits_{s=1}^{n}a_{is}b_{sk}$. 矩阵$(A\odot B)\odot C$的第$i$行第$j$列元素为

$$[(A\odot B)\odot C]_{ij}=\bigvee_{t=1}^{p}(\bigvee_{s=1}^{n}a_{is}b_{st})c_{tj}=\bigvee_{t=1}^{p}\bigvee_{s=1}^{n}a_{is}b_{st}c_{tj}.\tag{3}$$

类似地, 矩阵$[A\odot(B\odot C)]_{ij}$第i行第j列元素为

$$[A\odot(B\odot C)]_{ij}=\bigvee_{s=1}^{n}a_{is}(\bigvee_{t=1}^{p}b_{st}c_{tj})=\bigvee_{s=1}^{n}\bigvee_{t=1}^{p}a_{is}b_{st}c_{tj}.\tag{4}$$

比较式(3)和式(4)可知结论2)成立.

3) 对任意的i,j,

$$[(A\vee B)\odot C]_{ij}=\bigvee_{t=1}^{n}[(a_{it}\vee b_{it})\times c_{tj}]=\bigvee_{t=1}^{n}[(a_{it}c_{tj})\vee(b_{it}c_{tj})].\tag{5}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}(A\odot C)_{ij}&=\bigvee_{t=1}^{n}(a_{it}c_{tj}),\\(B\odot C)_{ij}&=\bigvee_{t=1}^{n}(b_{it}c_{tj}).\end{aligned}\tag{6}$$

因此

$$[(A\odot C)\vee(B\odot C)]_{ij}=\bigvee_{t=1}^{n}[(a_{it}c_{tj})\vee(b_{it}c_{tj})].$$

结论3)成立.

3 主要结论(Main results)

考虑一组布尔控制网络$\{\Sigma_\lambda,\lambda=1,\cdots,N\}$, 其中第$\lambda$个布尔网络$\Sigma_\lambda$的动态方程为

$$\begin{cases}x_1(t+1)=f_1^\lambda(x_1(t),\cdots,x_n(t),\\\qquad u_1(t),\cdots,u_m(t)),\\x_2(t+1)=f_2^\lambda(x_1(t),\cdots,x_n(t),\\\qquad u_1(t),\cdots,u_m(t)),\\\qquad\vdots\\x_n(t+1)=f_n^\lambda(x_1(t),\cdots,x_n(t),\\\qquad u_1(t),\cdots,u_m(t)),\end{cases}\tag{7}$$

其中: $x_i\in\mathcal{D}, i=1,2,\cdots,n$是状态变量, $u_j\in\mathcal{D}$, $j=1,\cdots,m$是输入变量, f_i^λ是$(m+n)$元布尔函数. 记$P=(P_1,\cdots,P_N)$为布尔网络的$\{\Sigma_\lambda,\lambda=1,\cdots,N\}$的概率分布列. 即在$t$时刻, 布尔控制网络$\Sigma_\lambda$被激活的概率为$P_\lambda$. 称$(\Sigma,P)$为一个概率布尔控制网络.

设$x(t):=\ltimes_{i=1}^{n}x_i(t), u=\ltimes_{i=1}^{m}u_i$, 由命题1, 动态方程(7)中的各个变量演化方程被表示为

$$x_i(t+1)=M_i^\lambda x(t),\ x_i\in\Delta, M_i^\lambda\in\mathcal{L}_{2\times2^n},\tag{8}$$

其中$\forall i=1,\cdots,n$, M_i^λ表示f_i^λ的结构矩阵. 利用文献[11–12]中的技巧, 布尔网络Σ_λ的代数形式为

$$x(t+1)=L_iu(t)x(t),\ i=1,\cdots,N.\tag{9}$$

概率布尔网络的状态在时刻$t+1$的数学期望为

$$\mathrm{E}x(t+1)=\sum_{i=1}^{N}P_iL_iu(t)\mathrm{E}x(t):=Lu(t)\mathrm{E}x(t),\tag{10}$$

其中

$$L:=\sum_{i=1}^{N}P_iL_i\in\mathbb{R}^{2^n\times2^n}.\tag{11}$$

定义 3 概率布尔控制网络(7). 1) 状态x_d称为以概率ω从状态x_0能达, 如果存在一个正整数T和一个控制序列$\{u(0),u(1),\cdots,u(T-1)\}$, 使得

$$\mathrm{P}(x(T)=x_\mathrm{d}|x(0)=x_0)\geqslant\omega,$$

也称概率布尔网络以从状态x_0到x_d(以概率)ω能控的.

2) 概率布尔控制网络(7)称为在x_0以概率ω弱能达, 如果对任意的$x_\mathrm{d}\in\Delta_{2^n}$, 系统都是从状态$x_0$至少以概率$\omega$弱能达的.

3) 概率布尔控制网络(7)称为以概率ω弱能控, 如果对任意的$x_0\in\Delta_{2^n}$, 系统在x_0都是以概率ω弱能控的.

将布尔控制网络(7)的结构矩阵(11)等分为2^m个子块,

$$L=[\mathrm{Blk}_1(L),\mathrm{Blk}_2(L),\cdots,\mathrm{Blk}_{2^m}(L)],\tag{12}$$

其中$\mathrm{Blk}_k(L) \in \mathbb{R}^{2^n \times 2^n}$, $k = 1, \cdots, 2^m$.

初始状态为$x_0 = \delta_{2^n}^j$, 选择控制$u(0) = \delta_{2^m}^k$, 则状态$x(1)$为$L_\lambda u(0)x_0$的概率为P_λ. 因此在$t = 1$时刻, 状态$x(1)$的数学期望为

$$X(1) = \mathrm{E}x(1) = L\delta_{2^m}^k x_0 = \mathrm{Blk}_k(L)x_0 = (x_{11}, \cdots, x_{12^n})^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

其中$\sum\limits_{i=1}^{2^n} x_{1i} = 1$. 第$i$个元素$x_{1i} = (B_k)_{ij}$表示在控制$u(0)$的作用下, 系统的状态从$x(0) = \delta_{2^n}^j$演化到$\delta_{2^n}^i$的概率为$x_{1i}$.

考虑控制$u(0)$的所有可能取值, 系统的状态从$x(0) = \delta_{2^n}^j$演化到状态$\delta_{2^n}^i$的最大概率可以表示为$(\mathrm{Blk}_1(L))_{ij} \vee (\mathrm{Blk}_2(L))_{ij} \vee \cdots \vee (\mathrm{Blk}_{2^m}(L))_{ij}$.

定义

$$M = \mathrm{Blk}_1(L) \vee \mathrm{Blk}_2(L) \vee \cdots \vee \mathrm{Blk}_{2^m}(L) = \mathop{\vee}\limits_{k=1}^{2^m} (\mathrm{Blk}_k(L)). \tag{14}$$

从矩阵M的构造, 可以从矩阵M的各个元素得到布尔控制网络任意两个状态之间相互能达的最大概率. 比如$M_{ij} = c \neq 0$意味着存在一个控制使系统的状态从$\delta_{2^n}^j$以最大概率c演化到$\delta_{2^n}^i$. 如果$M_{ij} = 0$, 表示系统的状态从$\delta_{2^n}^j$到$\delta_{2^n}^i$的概率为零.

命题 3 考虑概率布尔网络(7), 从式(7)的结构矩阵得到矩阵M. 如果$(M^{(s)})_{i,j} = c \neq 0$, 那么$\delta_{2^n}^i$可以从状态$\delta_{2^n}^j$出发在第$s$步以概率$c$能达.

证 用数学归纳法证明. 当$s = 1$时, 从式(14)中M的构造可知结论证明.

一般地, 假设$(M^{(s)})_{ij}$是从$\delta_{2^n}^j$出发, 在第s步到$\delta_{2^n}^i$的最大概率, 即

$$P_{\max}(x(s)) = \delta_{2^n}^i | x(0) = \delta_{2^n}^j = (M^{(s)})_{ij}.$$

系统的状态从$\delta_{2^n}^j$出发在第$(s+1)$步到$\delta_{2^n}^i$可以分解为两个步骤: 1) 首先系统全状态从$\delta_{2^n}^j$开始经1步演化到状态$\delta_{2^n}^k$; 2) 从状态$\delta_{2^n}^k$经过s步, 状态演化到$\delta_{2^n}^i$.

因此经过$s+1$步, 系统从全变量状态$\delta_{2^n}^j$开始, 最终演化到$\delta_{2^n}^i$的最大概率为

$$P_{\max}(x(s+1) = \delta_{2^n}^i | x(0) = \delta_{2^n}^j) = \mathop{\vee}\limits_{k=1}^{2^n} P_{\max}(x(s+1) = \delta_{2^n}^i | x(s) = \delta_{2^n}^k) \times P_{\max}(x(s) = \delta_{2^n}^k | x(0) = \delta_{2^n}^j). \tag{15}$$

由假设, 从状态$\delta_{2^n}^j$开始在第s步到$\delta_{2^n}^k$的最大概率为

$$(M^{(s)})_{kj} = P_{\max}(x(s) = \delta_{2^n}^k | x(0) = \delta_{2^n}^j). \tag{16}$$

另一方面, 从$\delta_{2^n}^k$一步到达$\delta_{2^n}^i$的最大概率为

$$M_{kj} = P_{\max}(x(s+1) = \delta_{2^n}^k | x(s) = \delta_{2^n}^j). \tag{17}$$

将式(16)和式(17)代入式(15)得到

$$P_{\max}(x(s+1) = \delta_{2^n}^i | x(0) = \delta_{2^n}^j) = \mathop{\vee}\limits_{k=1}^{2^n} M_{ik}(M^{(s)})_{kj}. \tag{18}$$

式(18)的右端可以理解为M的第i行和$M^{(s)}$的第j列的$\odot$积. 从式(16)–(18)可知, $(M^{(s+1)})_{i,j}$是从$\delta_{2^n}^j$出发在$s+1$到$\delta_{2^n}^i$最大概率. 证毕.

从$M^{(s)}$可以得到概率布尔控制网络在第s步的最大概率能达性信息. 为了研究网络(7)的能达性与能控性, 定义$M_{\mathrm{C}}(s)$:

$$M_{\mathrm{C}}(s) = \mathop{\vee}\limits_{t=1}^{s} M^{(t)}. \tag{19}$$

由命题3, 概率布尔控制网络的两个状态之间以概率ω弱能达性可以从矩阵$M_{\mathrm{C}}(\infty) = \mathop{\vee}\limits_{t=1}^{+\infty} M^{(t)}$得到.

命题 4 概率布尔网络(7)的代数形式为式(9). 如果存在正整数k, 使得

$$M^{(k+1)} \leqslant M_{\mathrm{C}}(k), \tag{20}$$

那么

$$M_{\mathrm{C}}(\infty) = \mathop{\vee}\limits_{t=1}^{\infty} M^{(t)} = M_{\mathrm{C}}(k).$$

证 只需证明$M^{(s)} \leqslant M_{\mathrm{C}}(k), \forall s \geqslant k+1$. 不失一般性, 对于任意的$s \geqslant k+1$, 记$s = k+1+p (p \geqslant 0)$. 当$p = 0$时结论显然成立. 对于$p \geqslant 1$, 有

$$M^{(s)} = M^{(k+p+1)} = M^{(k+1)} \odot M^{(p)}.$$

对p利用数学归纳法. 若$p = 1$, 由条件$M^{(k+1)} \leqslant M_{\mathrm{C}}(k)$和命题2可得

$$M^{(k+2)} = M^{(k+1)} \odot M \leqslant M_{\mathrm{C}}(k) \odot M = \mathop{\vee}\limits_{s=2}^{k} M^{(s)} \vee M^{(k+1)} \leqslant M_{\mathrm{C}}(k) \vee M_{\mathrm{C}}(k) = M_{\mathrm{C}}(k).$$

设$M^{(k+p+1)} \leqslant M_{\mathrm{C}}(k)$, 那么

$$M^{(k+p+2)} = M^{(k+p+1)} \odot M \leqslant M_{\mathrm{C}}(k) \odot M = \mathop{\vee}\limits_{s=2}^{k} M^{(s)} \vee M^{(k+1)} \leqslant M_{\mathrm{C}}(k).$$

因此

$$M_{\mathrm{C}}(\infty) = \mathop{\vee}\limits_{t=1}^{\infty} M^{(t)} = \mathop{\vee}\limits_{t=1}^{k} M^{(t)} \mathop{\vee}\limits_{t=k+1}^{\infty} = M_{\mathrm{C}}(k).$$

由命题3与命题4, 得到概率布尔网络(7)的弱能控性充分条件. 证毕.

定理 1 概率布尔网络(7)的代数形式为式(9). 如果存在正整数k, 使得$M^{(k+1)} \leqslant M_{\mathrm{C}}(k)$, 则

1) 如果$\mathrm{Col}_j(M_{\mathrm{C}}(k)) \geqslant \omega \times \mathbf{1}_{2^n \times 1}$, 则概率布尔控制网络(7)在$x_0 = \delta_{2^n}^j$是以概率$\omega$弱能达;

2) 如果$M_{\mathrm{C}}(k) \geqslant \omega \times \mathbf{1}_{2^n \times 2^n}$, 则概率布尔控制网络(7)以概率$\omega$弱能控.

在条件(20)约束下, 定理1提供了检验概率布尔网络(7)弱能控性的充分条件. 下面证明满足条件(20)的k必定存在, 并且$k \leqslant 2^n$.

命题 5 概率布尔网络(7)的代数形式为式(9). 设状态$\alpha = \delta_{2^n}^i$可以从$\beta = \delta_{2^n}^j$出发在s步以概率ω能达, 那么α必然能在2^n步以内从$\beta = \delta_{2^n}^j$以概率ω能达.

证 如果$1 \leqslant s \leqslant 2^n$, 则结论显然成立. 否则, 假设状态$\alpha = \delta_{2^n}^i$是从$\beta = \delta_{2^n}^j$出发在第$s(s > 2^n)$步以概率$\omega$弱能达. 则存在一个控制序列$u(0), u(1), \cdots, u(s-1)$和一条至少以概率$\omega$出现的状态轨线$x(1) \to x(2) \to \cdots \to x(s)$, 满足

$$\begin{cases} \mathrm{P}(x(1)=\delta_{2^n}^{i_1}|x(0)=\beta, u(0)=\delta_{2^m}^{\gamma_0}) \geqslant \omega, \\ \mathrm{P}(x(2)=\delta_{2^n}^{i_2}|x(1)=\delta_{2^n}^{i_1}, u(1)=\delta_{2^m}^{\gamma_1}) \geqslant \omega, \\ \quad \vdots \\ \mathrm{P}(x(p) = \delta_{2^n}^{i_p}|x(p-1) = \delta_{2^n}^{i_{p-1}}, \\ \quad u(p-1) = \delta_{2^m}^{\gamma_{p-1}}) \geqslant \omega, \\ \mathrm{P}(x(p+1) = \delta_{2^n}^{i_{p+1}}|x(p) = \delta_{2^n}^{i_p}, \\ \quad u(p) = \delta_{2^m}^{\gamma_p}) \geqslant \omega, \\ \quad \vdots \\ \mathrm{P}(x(q) = \delta_{2^n}^{i_q}|x(q-1) = \delta_{2^n}^{i_{q-1}}, \\ \quad u(q-1) = \delta_{2^m}^{\gamma_{q-1}}) \geqslant \omega, \\ \mathrm{P}(x(q+1) = \delta_{2^n}^{i_{q+1}}|x(q) = \delta_{2^n}^{i_q}, \\ \quad u(q) = \delta_{2^m}^{\gamma_q}) \geqslant \omega, \\ \quad \vdots \\ \mathrm{P}(x(s) = \delta_{2^n}^{i_s}|x(s-1) = \delta_{2^n}^{i_{s-1}}, \\ \quad u(s-1) = \delta_{2^m}^{\gamma_{s-1}}) \geqslant \omega, \end{cases} \tag{21}$$

其中$x(s)=\delta_{2^n}^{i_s} = \alpha$. 状态序列$\beta, \delta_{2^n}^{i_1}, \cdots, \delta_{2^n}^{i_s} = \alpha \in \Delta_{2^n}$中, 如果存在两个状态相等, 不妨$\delta_{2^n}^{i_p} = \delta_{2^n}^{i_q}$. 那么在时刻$p$, 可以选择控制$u(p) = \delta_{2^m}^{\gamma_q}$, 得到

$$\mathrm{P}(x(p+1) = \delta_{2^n}^{i_{q+1}}|x(p) = \delta_{2^n}^{i_p}, u(p) = \delta_{2^m}^{\gamma_p}) \geqslant \omega.$$

则从$\beta = \delta_{2^n}^j$到$\alpha = \delta_{2^n}^i$以概率ω出现的状态轨线$x(1) \to x(2) \to \cdots \to x(s)$变为

$$\beta \to \delta_{2^n}^{i_1} \to \cdots \to \delta_{2^n}^{i_p} \to \delta_{2^n}^{i_{q+1}} \to \cdots \to \delta_{2^n}^{i} = \alpha.$$

利用这种方法可以剔除序列$\delta_{2^n}^{i_1}, \cdots, \delta_{2^n}^{i_s}$中的重复状态. 不失一般性, 设如下序列不含有重复状态.

$$\delta_{2^n}^j = \beta \to \delta_{2^n}^{i_1} \to \cdots \to \delta_{2^n}^{i_s} = \alpha = \delta_{2^n}^i. \tag{22}$$

由于含有n个状态变量的布尔控制网络(7)之多有2^n个不同的状态. 因此从$\beta = \delta_{2^n}^j$到$\alpha = \delta_{2^n}^i$以概率ω出现的状态轨线(22)的长度不会超过2^n. 证毕.

4 控制序列设计算法(Control sequence design)

设$x_\mathrm{d} = \delta_{2^n}^i$可以从$x_0 = \delta_{2^n}^j$以概率$\omega$弱能达, 下面的算法给出了如何寻找相应的控制序列. 由定理1, 一定存在正整数$1 \leqslant s \leqslant 2^n$, 使得$(M^{(s)})_{ij} \geqslant \omega$.

算法 1 确定最小的s使得$(M^{(s)})_{ij} \geqslant \omega$.

对于$t = s, s-1, \cdots, 2$.

Step 1 考虑矩阵M和$M^{(t-1)}$, 存在k_{s-t}, 使得$M_{k_{s-t},j} \geqslant \omega$, $(M^{(t-1)})_{i,k_{s-t}} \geqslant \omega$, 并且$M_{k_{s-t},j} \times (M^{(t-1)})_{i,k_{s-t}} \geqslant \omega$.

Step 2 在式(12)中存在子块$\mathrm{Blk}_{\alpha_{s-t}}(L)$, 其中$[\mathrm{Blk}_{\alpha_{s-t}}(L)]_{k_{s-t},j} \geqslant \omega$. 取$u(s-t) = \delta_{2^m}^{\alpha_{s-t}}$, 可以得到$x(s-t+1) = \delta_{2^n}^{k_{s-t}}$.

Step 3 令$j = k_{s-t}$, 返回.

当$t = 1$时, 注意到$(M)_{i,k_{s-2}} \geqslant \omega$. 从式(12)中存在子块$\mathrm{Blk}_{\alpha_{s-1}}(L)$, 其中$[\mathrm{Blk}_{\alpha_{s-1}}(L)]_{i,k_{s-2}} \geqslant \omega$. 取$u(s-1) = \delta_{2^m}^{\alpha_{s-1}}$, 得到$x(s) = \delta_{2^n}^i$.

命题 6 设状态$\alpha = \delta_{2^n}^i$可以从$\beta = \delta_{2^n}^j$以概率ω能达. 由算法1构造的控制序列可以使状态从$x_0 = \beta$出发至少以概率ω演化到$x_\mathrm{d} = \alpha$.

证 设$x_0 = \beta = \delta_{2^n}^j$. 由算法1得到, $u(0) = \delta_{2^m}^{\alpha_0}$, $[\mathrm{Blk}_{\alpha_0}(L)]_{k_1,j} \geqslant \omega$. 因此

$$x(1) = Lu(0)x_0 = L\delta_{2^m}^{\alpha_0}\delta_{2^n}^j = [\mathrm{Blk}_{\alpha_0}(L)]\delta_{2^n}^j = [a_1, \cdots, a_{2^n}]^\mathrm{T}, \tag{23}$$

其中$x(1)$的第k_1个分量$a_{k_1} = [\mathrm{Blk}_{\alpha_0}(L)]_{k_1,j} \geqslant \omega$. 即

$$\mathrm{P}(x(1) = \delta_{2^n}^{k_1}|x(0) = \delta_{2^n}^j, u(0) = \delta_{2^m}^{\alpha_0}) \geqslant \omega.$$

一般地, 记$x(0) = x_0, x(s) = \alpha = \delta_{2^n}^i$. 在第$t$步, 有$u(t-1) = \delta_{2^m}^{\alpha_{t-1}}$, $[\mathrm{Blk}_{\alpha_{t-1}}(L)]_{k_t,k_{t-1}} \geqslant \omega$.

$$x(t) = Lu(t-1)x_{t-1} = L\delta_{2^m}^{\alpha_{t-1}}\delta_{2^n}^{t-1} = [\mathrm{Blk}_{\alpha_{t-1}}(L)]\delta_{2^n}^{t-1} = [b_1, \cdots, b_{2^n}]^\mathrm{T}, \tag{24}$$

其中$x(t)$的第k_t个分量$a_{k_t} = [\mathrm{Blk}_{\alpha_{t-1}}(L)]_{k_t,k_{t-1}} \geqslant \omega$. 即

$$\mathrm{P}(x(t)=\delta_{2^n}^{k_t}|x(t-1)=\delta_{2^n}^{t-1}, u(t-1)=\delta_{2^m}^{\alpha_{t-1}}) \geqslant \omega.$$

特别的当$t = 1$时, 得到

$$\mathrm{P}(x(s)=\delta_{2^n}^{k_s}|x(s-1)=\delta_{2^n}^{s-1}, u(s-1)=\delta_{2^m}^{\alpha_{s-1}}) \geqslant \omega.$$

因此控制序列$\{u(0), u(1), \cdots, u(s-1)\}$使状态从$\beta = \delta_{2^n}^j$出发在第$s$步至少以概率$\omega$到达$\alpha = x_\mathrm{d} = \delta_{2^n}^i$.

5 例子(An illustrative example)

这一部分用例子说明概率布尔控制网络的弱能控性与能达性, 并且设计控制序列使状态之间至少以概率ω能达.

例 考虑如下具有2个状态变量和2个输入变量的概率布尔控制网络.

$$\begin{cases} x_1(t+1)=f_1(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t)), \\ x_2(t+1)=f_2(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t)), \end{cases} \tag{25}$$

其中:

$$
\begin{aligned}
f_1(t+1)\in\{&f_1^1=x_2(t)\to u_1(t),\\
&f_1^2=u_1(t)\leftrightarrow(x_1(t)\wedge x_2(t)\},\\
f_2(t+1)\in\{&f_2^1=x_1(t)\wedge u_2(t),\\
&f_2^2=x_1(t)\vee u_2(t)\},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

同时

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(f_1=f_1^1)=0.2,\mathrm{P}(f_1=f_1^2)=0.8,\\
&\mathrm{P}(f_2=f_2^1)=0.3,\mathrm{P}(f_2=f_2^2)=0.7.
\end{aligned}
$$

设$x(t)=x_1(t)\ltimes x_2(t)\in\Delta_4$, $u(t)=u_1(t)\ltimes u_2(t)\in\Delta_4$, 则式(25)中各个可能被激活的布尔网络代数形式为

$$
x(t+1)=Lu(t)x(t),\tag{27}
$$

其中$L\in\{L_1,L_2,L_3,L_4\}$,

$$
\begin{cases}
L_1=\delta_4[1,1,2,2,2,2,2,2,3,1,4,2,4,2,4,2],\\
L_2=\delta_4[1,1,1,1,1,1,2,2,3,1,3,1,3,1,4,2],\\
L_3=\delta_4[1,3,4,4,2,4,4,4,3,1,2,2,4,2,2,2],\\
L_4=\delta_4[1,3,3,3,1,3,4,4,3,1,1,1,3,1,2,2],
\end{cases}
\tag{28}
$$

同　时: $\mathrm{P}(L=L_1)=0.06$, $\mathrm{P}(L=L_2)=0.14$, $\mathrm{P}(L=L_3)=0.24$, $\mathrm{P}(L=L_4)=0.56$.

在时刻$t+1$, 状态$x\in\mathcal{L}_{2^n}$的数学期望为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}x(t+1)=\sum_{i=1}^{4}L_i\mathrm{P}(L=L_i)u(t)\mathrm{E}x(t)=\\
&Lu(t)Ex(t),
\end{aligned}
\tag{29}
$$

其中矩阵L为

$$
L=\begin{pmatrix}
1&0.2&0.14&0.14&0.94&0.14&0&0&0&1&0.8&0.94&0&0.94&0&0\\
0&0&0.06&0.06&0.06&0.06&0.2&0.2&0&0&0&0.06&0&0.06&0.8&1\\
0&0.8&0.8&0.8&0&0.8&0&0&1&0&0.14&0&0.94&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0.8&0.8&0&0&0.06&0&0.06&0&0.2&0
\end{pmatrix}.\tag{30}
$$

从式(30)得到

$$
M=\mathrm{Blk}_1(L)\vee\mathrm{Blk}_2(L)=
\begin{pmatrix}
1&1&0.8&0.94\\
0.06&0.06&0.8&1\\
1&0.8&0.8&0.8\\
0.06&0&0.8&0.8
\end{pmatrix}.
$$

通过定义2, 计算得到$M^{(2)},M^{(3)},M^{(4)}$

$$
M^{(2)}=\begin{pmatrix}
1&1&0.8&1\\
0.8&0.64&0.8&0.8\\
1&1&0.8&0.94\\
0.8&0.64&0.64&0.64
\end{pmatrix},
$$

$$
M^{(3)}=\begin{pmatrix}
1&1&0.8&1\\
0.8&0.8&0.64&0.752\\
1&1&0.8&1\\
0.8&0.8&0.64&0.752
\end{pmatrix},
$$

$$
M^{(4)}=\begin{pmatrix}
1&1&0.8&1\\
0.8&0.8&0.64&0.8\\
1&1&0.8&1\\
0.8&0.8&0.64&0.8
\end{pmatrix}.
$$

进一步有

$$
M_{\mathrm{C}}(4)=M\vee M^{(2)}\vee M^{(3)}\vee M^{(4)}=
\begin{pmatrix}
1&1&0.8&1\\
0.8&0.8&0.8&1\\
1&1&0.8&1\\
0.8&0.8&0.8&0.8
\end{pmatrix}.\tag{31}
$$

矩阵(31)的各个元素有一定的物理意义, 即$(M_{\mathrm{C}}(4))_{ij}$表示在4步之内, 系统的状态从δ_4^j到δ_4^i能达的概率. 比如, $(M_{\mathrm{C}}(4))_{34}=1$表示存在一个控制序列使系统的状态从$\delta_4^4$到$\delta_4^3$以概率1能达. 考虑到$(M^{(3)})_{34}=1$, 确切的说, 存在一个控制序列使系统的状态从$\delta_4^4$出发在第3步以概率1到达$\delta_4^3$.

从定理1可知, 概率布尔控制网络(25)是以概率0.8弱能控的. 注意到$(M_{\mathrm{C}}(3))_{4,2}=0.8$, 因此状态从$\delta_4^2$出发在第3步以概率0.8到达$\delta_4^4$. 记下来利用算法1设计控制序列$u(0),u(1),u(2)$.

第1步　可以找到最小的整数3, 使得

$$
(M^{(3)})_{4,2}=0.8.
$$

取$k_0=1$, 注意到$(M^{(2)})_{4,1}=0.8$和$(M)_{1,2}=1$. 由矩阵L的分块形式(30)知$[\mathrm{Blk}_3(L)]_{1,2}=1$. 取$u(0)=\delta_4^3$, 那么$x(1)=\delta_4^1$. 状态$x(1)=\delta_4^1$可以从$x(0)=\delta_4^2$以概率1能达.

第2步　注意到$M^{(2)}=M\odot M$. 由$(M)_{3,1}=1$, $(M)_{4,3}=0.8$和$[\mathrm{Blk}_3(L)]_{3,1}=1$.

取$u(1)=\delta_4^3$, 那么$x(2)=\delta_4^3$. 状态$x(2)=\delta_4^3$从$x(1)=\delta_4^1$以概率1能达.

第3步　因为

$$
(M)_{4,3}=0.8,\ [\mathrm{Blk}_2(L)]_{4,3}=0.
$$

取$u(2)=\delta_4^2$, 那么$x(3)=\delta_4^4$. 因此$x(3)=\delta_4^4$可以从$x(2)=\delta_4^3$以概率0.8能达. 至此, 得到控制序列$u(0),u(1),u(2)$, 使系统的状态从$x_0=\delta_4^2\sim(1,0)$出发在第3步以概率0.8到达$x_d=\delta_4^4\sim(0,0)$. 进一

步控制序列为

$$u(0)=\delta_4^3\sim(0,1),$$
$$u(1)=\delta_4^3\sim(0,1),$$
$$u(2)=\delta_4^2\sim(1,0),$$

得到的可能控制序列为

$$\begin{cases}\mathrm{P}(x(1)=\delta_4^1|x(0)=\delta_4^2,u(0)=\delta_4^3)=1,\\ \mathrm{P}(x(2)=\delta_4^3|x(1)=\delta_4^1,u(1)=\delta_4^3)=1,\\ \mathrm{P}(x(3)=\delta_4^4|x(2)=\delta_4^3,u(2)=\delta_4^2)=0.8.\end{cases}\tag{32}$$

从式(32)可知, 对于概率布尔网络(25), 设初始状态为$x(0)=\delta_4^2$, 取控制序列$u(0)=\delta_4^3$, $u(1)=\delta_4^3$, $u(2)=\delta_4^2$, 在第3步系统(32) 的状态以概率0.8到达状态δ_4^4.

6 结论(Conclusions)

精确能控性概念是在研究非线性抛物型偏微分方程和扩散型微分方程时出现的, 后来彭实戈院士将精确能控性概念推广到倒向随机微分方程, 同时也建立了倒向微分方程和偏微分方程系统的联系, 推动了偏微分方程理论的发展. 从倒向微分方程来看, 精确能控性主要是研究随机控制系统的终端状态精确能控的问题. 同时精确能控性概念在证券市场定价问题研究中有重要的应用价值.

本文主要研究了概率布尔控制网络的弱能控性, 弱能控性是与精确能控相对的, 当弱能控概率$\omega=1$时, 弱能控性就退化为精确能控性. 因此弱能控性是精确能控性的一般推广.

下一步, 笔者将进一步研究概率布尔网络的弱能控性、弱能观性, 同时为了也可以考虑带有噪声干扰的概率布尔控制网络的相关性质.

参考文献(References):

[1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1969, 22(3): 437 – 467.

[2] KAUFFMAN S A. *The Origins of Order: Self-organization and Selection in Evolution* [M]. New York: Oxford University Press, 1993.

[3] ALDANA M. Boolean dynamics of networks with scale-free topology [J]. *Physica D*, 2003, 185(1): 45 – 66.

[4] AKUTSU T, HAYASHIDA M, CHING W K, et al. Control of Boolean networks: Hardness results and algorithms for tree structured networks [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2007, 244(4): 670 – 679.

[5] ATLAN H, FOGELMAN S F, SALOMON J, et al. Random Boolean networks [J]. *Cybernetics and Systems*, 1981, 71(5): 103 – 121.

[6] LUQUE B, SOLE R V. Controlling chaos in random Boolean networks [J]. *Europhysics Letters*, 1997, 37(9): 597 – 602.

[7] LUQUE B, SOLE R V. Stable core and chaos control in random Boolean networks [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1998, 31(6): 1533 – 1537.

[8] DERRIDA B, POMEAU Y. Random networks of automata–A simple annealed approximation [J]. *Europhysics Letters*, 1986, 1(2): 45 – 49.

[9] DERRIDA B, FLYVBJERG H. Multi-valley structure in Kauffman model analogy with spin glasses [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1986, 19(6): 1003 – 1008.

[10] CHENG Daizhan, QI Hongsheng. *Semi-tensor Product of Matrices: Theory and Applications* [M]. Beijing: Science Press, 2007.
(程代展, 齐洪胜. 矩阵的半张量积理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.)

[11] CHENG D Z, QI H S, LI Z Q. *Analysis and Control of Boolean Networks*—*A Semi-tensor Product Approach* [M]. London: Springer, 2011.

[12] CHENG D Z, QI H S. A linear representation of dynamics of Boolean networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2251 – 2258.

[13] CHENG D Z, QI H S. Controllability and observability of Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2009, 45(7): 1659 – 1667.

[14] ZHAO Y, CHENG D Z, QI H S. Input-state incidence matrix of Boolean control networks and its applications [J]. *Systems and Control Letters*, 2010, 59(12): 767 – 774.

[15] LI F F, SUN J T. Synchronization analysis for multi valued logical networks [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, 23(4): DOI: 10.1142/S0218127413500594.

[16] LI H T, WANG Y Z, LIU Z B. Observability of free Boolean networks by means of the semi-tensor product method [J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2014, 27(4): 666 – 678.

[17] LI Z Q, SONG J L. Controllability of Boolean control networks avoiding states set [J]. *Science China Information Sciences*, 2014, 57(3): 032205(13), doi: 10.1007/s11432-013-4839-0.

[18] MENG M, FENG J E, HOU Z S. Synchronization of interconnected multi-valued logical networks[J]. *Asian Journal of Control*, 2014, 16(6): 1659 – 1669.

[19] LI R, YANG M, CHU T G. State feedback stabilization for probabilistic Boolean networks [J]. *Automatica*, 2014, 50(4): 1272 – 1278.

[20] LASCHOV D, MARGALIOT M, EVEN G. Observability of Boolean networks: A graph-theoretic apprpach [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2351 – 2362.

[21] FORNASINI E, VALCHER M E. Observability, reconstructibility and state observers of Boolean control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(6): 1390 – 1401.

[22] LASCHOV D, MARGALIOT M. A maximum principle for single-input Boolean control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(4): 913 – 917.

[23] LASCHOV D, MARGALIOT M. Minimum-time control of Boolean networks [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2013, 51(4): 2869 – 2892.

[24] SONG Jinli, LI Zhiqiang. Topological structure of block Boolean networks [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(2): 142 – 149.
(宋金利，李志强, 块序列布尔网络的拓扑结构 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(2):142 – 149.)

[25] CHENG Daizhan, QI Hongsheng. Algebraic state space approach to logical dynamic systems and its applications[J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(12): 1632 – 1639.
(程代展, 齐洪胜, 逻辑系统的代数状态空间方法的基础、现状及其应用 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(12): 1632 – 1639.)

[26] SHMULEVICH I, DOUGHERTY E R, KIM S, et al. Probabilistic Boolean networks: a rule-based uncertainty model for gene regulatory networks [J]. *Bioinformatics*, 2002, 18(2): 261 – 274.

[27] SHMULEVICH I, DOUGHERTY E R, ZHANG W. From Boolean to probabilistic Boolean networks as models of genetic regulatory networks [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2002, 90(11): 1778 – 1792.

[28] SHMULEVICH I, GLUHOVSKY I, HASHIMOTO R F, et al. Steady-state analysis of genetic regulatory networks modelled by probabilistic Boolean networks [J]. *Comparative and Functional Genomics*, 2003, 4(6): 601 – 608.

[29] LIU Z B, WANG Y Z, LI H T. Controllability of context-sensitive probabilistic mix-valued logical control networks with constraints [J]. *Asian Journal of Control*, 2015, 17(1): 246 – 254.

[30] LI F F, SUN J T. Controllability of probabilistic Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2011, 47(12): 2765 – 2771.

[31] ZHAO Y, CHENG D Z. On controllability and stabilizablity of probabilistic Boolean control networks [J]. *Science China Information Sciences*, 2014, 57(1): 012202(14), doi: 10.1007/s11432-013-4851-4.

[32] LIU Y, CHEN H W, LU J Q, et al. Controllability of probabilistic Boolean control networks based on transition probability matrices [J]. *Automatica*, 2015, 52: 340 – 345.

[33] DU Haoming. *Study of exact controllability of discrete stochastic control systems* [D]. Shandong: Shandong University of Science and Technology, 2012.
(杜浩铭. 离散随机控制系统的精确能控性研究 [D]. 山东: 山东科技大学, 2012.)

[34] PENG S G. Backward stochastic differential equation and exact controllability of stochastic control systems [J]. *Progress in Natural Science*, 1994, 4(3): 274 – 284.

作者简介:

李志强 (1980–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为逻辑系统理论、复杂系统建模与分析, E-mail: lizhiqiang@amss.ac.cn;

肖会敏 (1963–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为系统理论、网络动态系统分析与控制, E-mail: huiminxiao@126.com.