

# 考虑Taguchi损失函数时自适应指数加权平滑控制图的经济统计设计

常志远, 孙金生<sup>†</sup>

(南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

**摘要:** 为解决指数加权平滑(EWMA)控制图惯性问题而提出的自适应EWMA(adaptive EWMA, AEWMA)控制图的统计特性已经被广泛研究, 但AEWMA控制图经济特性的研究却从未见有成果发表. 针对该问题, 在考虑Taguchi损失函数的基础上, 给出了AEWMA控制图经济统计设计的模型. 提出了一种在偏移区间上对AEWMA控制图进行优化设计的方法, 用该方法优化设计的AEWMA控制图与针对固定偏移优化设计的EWMA控制图进行了比较. 结果表明该方法设计的AEWMA控制图仍然保持其解决EWMA控制图惯性问题的特性, AEWMA控制图的经济特性同样优于EWMA控制图. 分析了AEWMA控制图经济统计设计的参数灵敏度, 总结了AEWMA控制图的参数变化与损失、平均链长以及最优参数组合之间的关系.

**关键词:** 自适应EWMA控制图; 经济统计设计; 损失函数; 多目标优化; 灵敏度分析

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Considering Taguchi loss function on economic-statistical design of adaptive exponentially weighted moving average control chart

CHANG Zhi-yuan, SUN Jin-sheng<sup>†</sup>

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

**Abstract:** The statistical properties of adaptive exponentially weighted moving average (AEWMA) control chart, which is proposed to deal with the inertia problem of EWMA control chart, have been thoroughly investigated by many authors. However, the research results on economic properties of AEWMA control chart have never been reported in the publications. In this paper, an economic-statistical design model based on Taguchi loss function is proposed for AEWMA control chart. The optimal algorithm based on the range of shift is developed for economic-statistical design of AEWMA chart. The effectiveness of the optimal algorithm is validated by the comparison between AEWMA chart and EWMA chart. The comparison results show that the designed AEWMA chart is still able to deal with the inertia problem of EWMA chart, and the economic properties of AEWMA chart outperforms the EWMA chart. Finally, the sensitivity analysis of AEWMA chart is performed, and the relationship between parameter changes and cost, average run length and optimal decision variables of AEWMA chart are summarized respectively.

**Key words:** AEWMA chart; economic-statistical design; loss function; multiobjective optimization; sensitivity analysis

### 1 引言(Introduction)

1924年Shewhart博士设计了均值控制图, 作为一种有效的统计质量控制方法, 控制图在科学研究与工业生产中得到了广泛的应用. 控制图的设计主要有统计设计与经济设计, 前者的目标是使得控制图能够更快、更准确的检测过程中发生的异常, 后者则是针对降低控制图监控下过程损失而提出的. 控制图的设计方法直接影响到制造过程质量控制的效率与成本.

控制图经济设计最早是由Duncan<sup>[1]</sup>针对均值控制

图提出的, 随后, Lorenzen等<sup>[2]</sup>提出了一个适用于控制图经济设计的统一方法, 该方法极大地影响了后续研究. Taguchi等<sup>[3]</sup>提出用损失函数方法来描述产品质量特性不符合目标值时所产生的损失, 由于损失函数更符合实际情况, 因此被广泛应用在控制图经济设计中. Woodall<sup>[4]</sup>指出单纯的经济设计会使得控制图统计性能下降, 针对该问题, Saniga<sup>[5]</sup>提出一种针对 $\bar{X}$ 和 $R$ 控制图的带有统计约束的经济设计模型.

由于Shewhart型控制图对小偏移不敏感,

收稿日期: 2015-07-11; 录用日期: 2015-10-14.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: jssun67@163.com.

本文责任编辑: 张化光.

国家自然科学基金项目(70931002)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (70931002).

Roberts<sup>[6]</sup>提出了指数加权移动平均(exponentially weighted moving average, EWMA)控制图, 这种控制图通过对历史数据指数加权, 从而增加了控制图对小偏移的敏感性. EWMA控制图的经济设计最早由 Torng<sup>[7]</sup>提出, 经过长期研究, EWMA 控制图的经济设计已经取得了丰富的成果<sup>[8-11]</sup>. EWMA控制图虽然可以很快的检测出过程中的小偏移, 但是过程中突然出现大偏移时, 小的平滑系数会导致EWMA控制图报警滞后. 针对该问题, Capizzi等<sup>[12]</sup>将自适应EWMA滤波方法应用于控制图设计, 提出了自适应指数加权移动平均(adaptive EWMA, AEWMA)控制图, 该控制图可以克服常规EWMA控制图只对固定偏移敏感的问题. Woodall等<sup>[13]</sup>指出AEWMA控制图实质上是将 Shewhart控制图与EWMA控制图更平滑的结合在一起, 这种方法优于常规的Shewhart-EWMA控制图. 因此, AEWMA控制图的统计特性被广泛的研究<sup>[14-16]</sup>.

目前为止, 针对AEWMA控制图的统计特性研究的成果比较丰富, 但是AEWMA控制图经济特性的研究却从未见有成果发表. 本文首先给出基于Taguchi损失函数的AEWMA控制图经济统计设计的模型, 针对AEWMA控制图的特点, 提出了在偏移区间上对该模型进行优化设计的多目标优化方法. 通过比较该方法优化设计的AEWMA控制图与针对固定偏移优化设计的EWMA 控制图的统计与经济特性, 结果表明该设计方法的有效性. 最后, 在不同环境下测试了控制图参数的灵敏度, 结果表明在偏移区间上优化设计的AEWMA控制图的损失变化规律不再符合单纯经济设计时的损失变化规律.

## 2 AEWMA控制图(AEWMA control chart)

假设第*i*时刻采集来自同一正态分布总体的样本大小为*n*的样本 $X_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n})$ , 即 $x_{ij} \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma_0^2)$ , 其中:  $\mu_0, \sigma_0^2$ 分别是正态分布的均值和方差,  $\delta$ 为均值偏移系数.  $\delta = 0$ 时过程处于受控

状态, 其他情况表明过程出现了异常. 第*i*个采样时刻样本均值 $\bar{X}_i$ 为

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad (1)$$

则Capizzi<sup>[12]</sup>所提出的AEWMA控制图可按照如下方式进行构造:

$$Y_i = Y_{i-1} + \phi(e_i), \quad (2)$$

其中:  $Y_i$ 是第*i*时刻的AEWMA统计量,  $e_i = \bar{X}_i - Y_{i-1}$ ,  $\phi(e_i)$ 是估计问题中的误差项. 本文中取 $\phi(e_i)$ 为如下形式:

$$\phi(e_i) = \begin{cases} e_i + (1 - \lambda)\gamma, & e_i < -\gamma, \\ \lambda e_i, & |e_i| \leq \gamma, \\ e_i - (1 - \lambda)\gamma, & e_i > \gamma, \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $\lambda \in (0, 1]$ ,  $\gamma > 0$ 为AEWMA控制图的两个决策变量, 当控制图设计完成后 $\lambda, \gamma$ 为常数. 设计一个完整的控制图, 除了设计统计量以外还包括上控制限(upper control limit, UCL)、下控制限(lower control limit, LCL).

## 3 经济统计设计模型(Economic-statistical design model)

### 3.1 经济部分: 损失模型(Economic: lost model)

过程的一个质量周期是从生产过程开始到排除异常原因为止, 主要包括受控、失控、检测和修复过程3个阶段. 在一个完整的质量周期中, 过程产生的主要费用包括: 过程处于受控、失控状态时生产出不合格产品的费用; 过程处于受控状态时误报警产生的费用; 查找和剔除异常原因的费用以及采样的费用. 衡量一个周期费用大小的有效方式为单位时间内产生的费用, 即周期总费用与周期总时间的比值. 通常情况下假设异常的发生是服从均值为 $1/\theta$ 的指数分布. Lorenzen等<sup>[2]</sup>通过一个质量周期的期望成本与期望时间, 建立了如下损失函数模型:

$$C = \frac{C_0/\theta + C_1(-\tau + n \cdot E + h \cdot ARL_1 + \gamma_1 \cdot T_1 + \gamma_2 \cdot T_2) + s \cdot F/ARL_0 + W}{1/\theta + (1 - \gamma_1) \cdot s \cdot T_0/ARL_0 - \tau + n \cdot E + h \cdot ARL_1 + T_1 + T_2} + \frac{((a + b \cdot n)/h) \cdot (1/\theta - \tau + n \cdot E + h \cdot ARL_1 + \gamma_1 \cdot T_1 + \gamma_2 \cdot T_2)}{1/\theta + (1 - \gamma_1) \cdot s \cdot T_0/ARL_0 - \tau + n \cdot E + h \cdot ARL_1 + T_1 + T_2}, \quad (4)$$

其中:  $h$ 为相邻两个样本之间的采样间隔;  $C_0$ 为受控状态下单位时间内不合格产品的质量损失;  $C_1$ 为失控状态下单位时间内不合格产品的质量损失;  $\tau = (1 - (1 + \theta \cdot h) \exp(-\theta \cdot h))/(\theta(1 - \exp(-\theta \cdot h)))$ 为异常发生到上一采样时刻之间的平均时间;  $E$ 为每次作图和抽样的时间;  $ARL_0$ 为受控状态下平均链长(average run length, ARL);  $ARL_1$ 为失控状态下平均链长;  $T_0$ 为寻找错误报警的平均时间;  $T_1$ 为发

现异常原因的平均时间;  $T_2$ 为纠正过程的平均时间;  $\gamma_1$ 可取的值为0或1, 代表寻找异常原因时生产过程停止或继续;  $\gamma_2$ 可取的值为0或1, 代表纠正异常原因时生产过程停止或继续;  $s = \exp(-\theta \cdot h)/(1 - \exp(-\theta \cdot h))$ 为受控状态下抽取样本的期望值;  $F$ 为每次误报警的费用;  $W$ 为每次定位和修复异常的费用;  $a$ 为每个样本的费用;  $b$ 为每个单元的费用.

以上模型假设受控与失控状态下单位时间内不

合格产品的质量损失 $C_0$ 与 $C_1$ 为常数,在实际生产中往往不能满足这种假设. Taguchitt等<sup>[3]</sup>提出的二次损失函数在对过程损失描述时更符合实际情况,其形式如下:

$$L(x) = K(x - \mu_0)^2, \quad (5)$$

其中:  $x$ 为质量特性的实际值,  $K$ 为固定系数. 因此, 每单位产品受控状态下的质量损失 $J_0$ 可按照下式求取:

$$J_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - \mu_0)^2 f(x)dx = K\sigma_0^2, \quad (6)$$

其中 $f(x)$ 为 $x$ 的概率密度函数. 每单位产品失控状态下的质量损失 $J_1$ 可按照同样的方法求取, 其结果为

$$J_1 = K(1 + \delta^2)\sigma_0^2. \quad (7)$$

假设生产过程中每单位时间生产产品数为 $p$ , 则受控状态与失控状态下单位时间内的质量损失 $C_0$ 和 $C_1$ 可分别表示为如下形式:

$$C_0 = J_0 \cdot p, \quad (8)$$

$$C_1 = J_1 \cdot p. \quad (9)$$

单纯的经济设计会使得控制图统计性能下降, 因此在对AEWMA控制图的经济设计时加上统计约束则会改善其性能. AEWMA控制图的经济统计设计是在保证其ARL符合特定要求的基础上寻找最优的决策变量组合 $\Omega = (h, n, UCL, \lambda, \gamma)$ , 使得单位时间损失函数 $C$ 最小化. 具体可以通过求解如下优化问题来实现:

$$\begin{cases} \min_{\Omega} C, \\ \min_{\Omega} ARL_1, \\ \text{s.t. } h > 0, n \in \mathbb{N}, ARL_0 = B, \\ UCL > 0, \lambda \in (0, 1], \gamma > 0, \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $\mathbb{N}$ 表示自然数集,  $n \in \mathbb{N}$ 是对样本大小 $n$ 的整数约束;  $B$ 为所要求的AEWMA控制图受控平均链长. AEWMA控制图的平均链长ARL可通过Markov链方法求取.

### 3.2 统计部分: ARL的求取(Statistic: calculation of ARL)

将控制限区间 $[UCL, LCL]$ 等分为 $2m + 1$ 个小区间, 每个小区间的宽度为

$$D = \frac{UCL - LCL}{2m + 1}. \quad (11)$$

第 $u$ 个小区间的中心 $S_u$ 为

$$S_u = LCL + (u - 0.5)D, u = 1, \dots, 2m + 1. \quad (12)$$

当统计量 $Y_i$ 落入第 $u$ 小区间内时, 就认为 $Y_i = S_u$ . 受控状态下状态之间的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{U} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中:  $\mathbf{R}$ 为一个 $(2m+1) \times (2m+1)$ 的实值矩阵,  $\mathbf{U}$ 是一个 $2m + 1$ 维全1列向量,  $\mathbf{0}$ 为 $2m + 1$ 维全0行向量,  $\mathbf{I}$ 为单位阵.  $\mathbf{R}$ 中每一个元 $r_{uv}$ 代表状态 $u$ 到状态 $v$ 的一步转移概率, 由式(2)可得

$$\begin{aligned} r_{uv} &= \Pr(Y_i = S_v | Y_{i-1} = S_u) = \\ &= \Pr(S_v - D/2 < Y_{i-1} + \phi(T_i - Y_{i-1}) \leq \\ &= S_v + D/2 | Y_{i-1} = S_u) = \\ &= \Pr(S_v - S_u - D/2 < \phi(T_i - S_u) \leq \\ &= S_v - S_u + D/2), \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\Pr(\cdot)$ 为质量特性所服从分布的累积分布函数. 由式(3)可知 $\phi(e_i)$ 是可逆的, 其逆函数为

$$\phi^{-1}(z) = \begin{cases} z - (1 - \lambda) \cdot \gamma, & z < -\lambda\gamma, \\ z/\lambda, & |z| \leq \lambda\gamma, \\ z + (1 - \lambda) \cdot \gamma, & z > \lambda\gamma. \end{cases} \quad (15)$$

其中 $z$ 为估计的误差. 将式(15)代入式(14), 则AEWMA控制图ARL可通过下式求取:

$$ARL = P_m \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{U}. \quad (16)$$

其中 $P_m$ 为一个 $1 \times (2m + 1)$ 的行向量, 除了第 $m + 1$ 个元为1外其他均为零.

### 4 优化设计方法(Optimal design algorithm)

常规的EWMA控制图经济统计设计是针对固定的偏移进行的, 而Capizzi等<sup>[12]</sup>提出的AEWMA控制图是在一个偏移区间上设计的, 因此常规的EWMA控制图经济统计设计方法不再适用于AEWMA控制图. 本文在Capizzi等<sup>[12]</sup>提出的AEWMA控制图统计设计方法的基础上, 提出了一种针对AEWMA控制图经济统计设计的方法, 具体如下:

- 1) 选定所要优化的均值偏移区间的两个端点 $\delta_1, \delta_2$  ( $\delta_1 < \delta_2$ ), 以及受控状态下平均链长 $B$ ;
- 2) 计算大偏移 $\delta_2$ 时的决策变量 $\Omega_1$ , 使得 $ARL(\delta_2, \Omega_1)$ 最小, 同时保证 $ARL(0, \Omega_1) = B$ , 即

$$\begin{aligned} &\min_{\Omega} ARL(\delta_2, \Omega), \\ &\text{s.t. } ARL(0, \Omega) = B. \end{aligned} \quad (17)$$

- 3) 选取一个接近于0的正数 $\alpha_1$ , 计算大偏移

$\delta_2$  时的决策变量  $\Omega_2$ , 使得损失函数  $C(\delta_2, \Omega_2)$  最小, 同时保证  $ARL(0, \Omega_2) = B$ ,  $ARL(\delta_2, \Omega_2) \leq (1 + \alpha_1)ARL(\delta_2, \Omega_1)$ , 即

$$\begin{cases} \min_{\Omega} ARL(\delta_2, \Omega), \\ \text{s.t. } ARL(0, \Omega) = B, \\ ARL(\delta_2, \Omega) \leq (1 + \alpha_1)ARL(\delta_2, \Omega_1). \end{cases} \quad (18)$$

4) 选取一个接近于0的正数  $\alpha_2$ , 计算小偏移  $\delta_1$  时的决策变量  $\Omega_3$ , 使得  $ARL(\delta_1, \Omega_3)$  最小, 同时保证

$$\begin{aligned} ARL(0, \Omega_3) &= B, \\ ARL(\delta_2, \Omega_3) &\leq (1 + \alpha_2)ARL(\delta_2, \Omega_2), \\ C(\delta_2, \Omega_3) &\leq (1 + \alpha_2)C(\delta_2, \Omega_2), \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} \min_{\Omega} ARL(\delta_1, \Omega), \\ \text{s.t. } ARL(0, \Omega) = B, \\ ARL(\delta_2, \Omega) \leq (1 + \alpha_2)ARL(\delta_2, \Omega_2), \\ C(\delta_2, \Omega) \leq (1 + \alpha_2)C(\delta_2, \Omega_2). \end{cases} \quad (19)$$

5) 选择一个接近于0的正数  $\alpha_3$ , 计算小偏移  $\delta_1$  时的决策变量  $\Omega^*$ , 使得损失函数  $C(\delta_1, \Omega^*)$  最小, 同时保证

$$\begin{aligned} ARL(0, \Omega^*) &= B, \\ ARL(\delta_1, \Omega^*) &\leq (1 + \alpha_3)ARL(\delta_1, \Omega_3), \\ ARL(\delta_2, \Omega^*) &\leq (1 + \alpha_3)ARL(\delta_2, \Omega_3), \\ C(\delta_2, \Omega^*) &\leq (1 + \alpha_3)C(\delta_2, \Omega_3), \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} \min_{\Omega} C(\delta_1, \Omega), \\ \text{s.t. } ARL(0, \Omega) = B, \\ ARL(\delta_1, \Omega) \leq (1 + \alpha_3)ARL(\delta_1, \Omega_3), \\ ARL(\delta_2, \Omega) \leq (1 + \alpha_3)ARL(\delta_2, \Omega_3), \\ C(\delta_2, \Omega) \leq (1 + \alpha_3)C(\delta_2, \Omega_3). \end{cases} \quad (20)$$

该方法使用了分层优化的思想, 能够同时保证 AEWMA 控制图在偏移区间上的统计性能与经济性. 式(17)–(20)的优化可以通过罚函数法将约束条件转化成目标函数的一部分. 以式(18)为例, 式(18)的优化问题可等价优化为:

$$\begin{aligned} C(\delta_2, \Omega) + \varsigma \cdot \left( \left( \frac{ARL(0, \Omega) - B}{B} \right)^2 + \right. \\ \left. \eta \cdot \left( \frac{ARL(\delta_2, \Omega) - (1 + \alpha_1) \cdot ARL(\delta_2, \Omega_1)}{(1 + \alpha_1) \cdot ARL(\delta_2, \Omega_1)} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (21)$$

其中:  $\varsigma$  为一个很大的正数, 例如  $\varsigma = 10^{10}$ ;  $\eta$  的取值

为0或1, 当  $ARL(\delta_2, \Omega) \geq (1 + \alpha_1) \cdot ARL(\delta_2, \Omega_1)$  时  $\eta = 1$ , 否则  $\eta = 0$ .

### 5 算例分析(Example)

为了更好地说明 AEWMA 控制图的统计与经济特性, 本文针对不同的  $B$  和不同的偏移区间优化了 AEWMA 控制图. 引用文献[11]中的算例数据, 具体参数设置为:  $K = 1, p = 300, \theta = 0.02, E = 0.5, T_0 = 2, T_1 = 2, T_2 = 0, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, F = 300, W = 150, a = 5, b = 1$ . 不失一般性, 假设  $\mu_0 = 0, \sigma_0 = 1$ .

按照本文提出的优化设计方法, 通过 Zheng 等<sup>[17]</sup>提出的差分进化式烟花算法 (fireworks algorithm with difference evolution, FWA-DE) 对式(10)进行寻优, 得到 AEWMA 控制图的最优决策变量组合  $\Omega$ . 烟花算法 (fire work algorithm, FWA) 是通过模仿烟花爆炸而提出的一种优化算法. 搜索过程中, 烟花之间通过交互机制来计算每个烟花的爆炸半径和爆炸火花数目, 使得适应度值较好的烟花获取更多的资源; 反之, 适应度值较差的烟花获取较少的资源. 差分进化式烟花算法是使用差分进化 (difference evolution, DE) 来对烟花算法进行改进, 使得其性能得到了提高<sup>[17]</sup>. 取受控平均链长  $B = 100, B = 500$  两种情况, 对 AEWMA 控制图决策变量优化, 结果如表1–2所示.

表 1  $B = 100$  时, AEWMA 控制图最优决策变量  
Table 1 Optimal parameters of AEWMA chart when  $B = 100$

编号	$\delta_1$	$\delta_2$	$h$	$n$	UCL	$\lambda$	$\gamma$
1	0.25	4	2.9363	4	0.2508	0.1026	6.3605
2	0.50	4	0.5966	5	0.3038	0.1606	6.7602
3	1.00	4	1.2277	4	0.3388	0.1599	9.6467
4	0.25	5	3.3403	14	0.1946	0.1782	6.4492
5	0.50	5	1.0961	3	0.2158	0.0644	1.7306
6	1.00	5	0.9845	3	0.3490	0.1350	2.9875
7	0.25	6	0.6051	1	0.3059	0.0508	3.5641
8	0.50	6	0.3449	2	0.3991	0.1219	4.2302
9	1.00	6	5.1961	11	0.1258	0.0788	6.3683

根据表1–2所示结果, 本文将经济统计设计的 AEWMA 控制图与统计设计的 AEWMA 控制图在不同偏移大小下的 ARL 进行了比较. 定义两者之差为前者减后者, 两者的相对差为两者之差再除以后者. 使用 ME 代表两者之差的均值, MR 代表两者相对差的均值, MaxE 代表两者之差中绝对值最大的值, MaxR 代表两者相对差中绝对值最大的值. 对于  $B = 100$  和  $B = 500$ , 将不同情况下优化的 AEWMA 控制图对比结果记录在表3–4中.

表2  $B = 500$ 时, AEWMA控制图最优决策变量  
Table 2 Optimal parameters of AEWMA chart when  $B = 500$

编号	$\delta_1$	$\delta_2$	$h$	$n$	UCL	$\lambda$	$\gamma$
1	0.25	4	1.0700	3	0.4765	0.1472	2.0118
2	0.50	4	2.1792	12	0.2714	0.1846	4.9965
3	1.00	4	0.8535	2	0.6536	0.1359	1.8415
4	0.25	5	1.0131	5	0.2279	0.0682	3.1645
5	0.50	5	0.4332	2	0.6884	0.1954	9.2897
6	1.00	5	0.8407	10	0.2622	0.1504	5.4785
7	0.25	6	1.5106	4	0.2341	0.0596	2.3128
8	0.50	6	1.4679	5	0.4290	0.1908	7.1265
9	1.00	6	0.6704	2	0.6497	0.1778	5.4389

表3  $B = 100$ 时 AEWMA控制图两种设计方法下失控状态ARL的比较

Table 3 The comparison of out of control ARL of AEWMA chart when  $B = 100$

编号	ME	MR	MaxE	MaxR
1	-0.057	0.060	-3.063	0.231
2	0.106	-0.008	1.672	-0.055
3	3.630	0.127	28.574	1.316
4	-0.005	0.001	-0.109	0.005
5	0.372	0.035	5.448	0.299
6	0.089	-0.011	1.325	-0.050
7	0.462	-0.035	5.275	-0.166
8	-0.069	0.017	-1.133	0.062
9	2.850	0.079	37.805	1.299

表4  $B = 500$ 时 AEWMA控制图两种设计方法下失控状态ARL的比较

Table 4 The comparison of out of control ARL of AEWMA chart when  $B = 500$

编号	ME	MR	MaxE	MaxR
1	-2.033	0.076	-28.156	0.410
2	-0.818	0.018	-13.464	0.179
3	-9.040	-0.046	-87.157	-0.384
4	1.160	-0.041	19.904	0.181
5	-6.214	-0.030	-71.375	-0.330
6	10.917	0.152	158.727	1.834
7	0.901	0.101	12.930	0.655
8	-1.271	0.013	-17.982	0.130
9	-2.771	0.046	-31.512	0.223

由表3-4中ME与MR的值可知, 本文提出的经济统计设计方法对AEWMA控制图的统计特性的影响很小. 尤其是在 $B = 100$ 时, 由MaxE可知大部分情况两者之间的差异在6以内. 表3-4中的负值代表经济统计设计下的AEWMA控制图在某些情况下的统计特性优于单纯统计设计下的AEWMA控制图.

该结论说明本文提出的AEWMA控制图经济统计设计方法是合理的.

同时, 针对不同的偏移量对EWMA控制图进行优化. 对EWMA控制图进行经济统计设计时先最小化EWMA控制图的损失, 然后类似式(21)构造罚函数使得EWMA控制图的损失与失控平均链长达到最优. EWMA控制图最优决策变量组合如表5-6所示.

表5  $B = 100$ 时, EWMA控制图最优决策变量

Table 5 Optimal parameters of EWMA chart when  $B = 100$

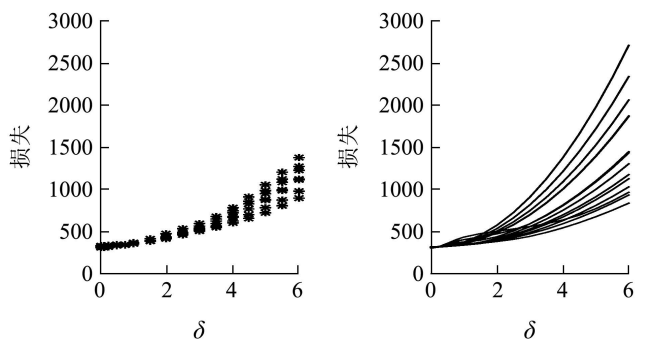
编号	$\delta$	$h$	$n$	UCL	$\lambda$
1	0.10	22.4992	30	0.2593	0.4795
2	0.25	14.1086	28	0.1605	0.2244
3	0.50	7.8161	22	0.3621	0.6131
4	0.75	5.6399	24	0.4873	0.9244
5	1.00	8.6766	26	0.4766	0.9421
6	1.50	2.3795	11	0.5097	0.6093
7	2.00	6.3718	6	0.5855	0.4861
8	2.50	14.3362	5	0.9334	0.7945
9	3.00	23.9718	5	0.9289	0.7899
10	3.50	1.0759	7	0.5560	0.5039
11	4.00	3.2790	3	0.6760	0.3627
12	4.50	5.2799	11	0.3371	0.3387
13	5.00	15.9152	3	0.9301	0.5711
14	5.50	7.9086	1	1.6761	0.6024
15	6.00	4.3040	6	0.3995	0.2777

表6  $B = 500$ 时, EWMA控制图最优决策变量

Table 6 Optimal parameters of EWMA chart when  $B = 500$

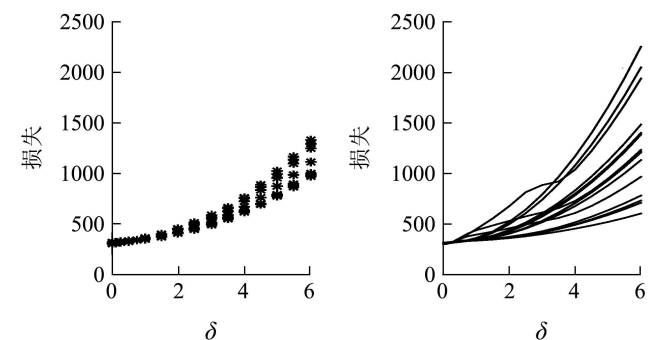
编号	$\delta$	$h$	$n$	UCL	$\lambda$
1	0.10	26.6277	4	0.3983	0.1408
2	0.25	10.9476	29	0.2143	0.2574
3	0.50	6.1933	12	0.4154	0.3650
4	0.75	9.4489	25	0.6044	0.9778
5	1.00	2.4003	18	0.6120	0.8281
6	1.50	1.3471	17	0.3675	0.3952
7	2.00	6.2513	8	0.6038	0.4732
8	2.50	5.3993	9	0.4245	0.3013
9	3.00	0.5736	3	1.3654	0.7396
10	3.50	1.4469	11	0.9175	0.9847
11	4.00	1.1787	3	1.4559	0.7999
12	4.50	2.2313	3	0.9538	0.4505
13	5.00	7.0562	2	1.0524	0.3845
14	5.50	12.6452	2	1.1651	0.4487
15	6.00	0.4825	1	1.3943	0.3475

根据表1-2与表5-6所示结果, 本文计算了不同偏移下AEWMA控制图与EWMA控制图所产生的损失大小, 结果如图1-2所示.



(a) AEWMA控制图损失 (b) EWMA控制图损失

图1  $B = 100$ 时, AEWMA控制图与EWMA控制图的损失  
Fig. 1 The cost of AEWMA and EWMA chart when  $B = 100$



(a) AEWMA控制图损失 (b) EWMA控制图损失

图2  $B = 500$ 时, AEWMA控制图与EWMA控制图的损失  
Fig. 2 The cost of AEWMA and EWMA chart when  $B = 500$

图1-2中, 每条曲线分别代表针对不同偏移区间优化的AEWMA控制图与针对不同偏移优化的EWMA控制图损失随着偏移变化的趋势.

由图1-2中(a)-(b)的对比明显可知, AEWMA控制图的损失更为集中. 这种现象说明针对固定偏移优化的EWMA控制图只对单一偏移敏感, 这也正是EWMA控制图的惯性问题的一种表现. 显然, 针对偏移区间优化的AEWMA几乎不存在这种惯性问题.

并且, 本文计算了每个偏移下控制图损失的均值 $M$ 、极差 $R$ 及其标准差Std., 结果如图3-4所示.

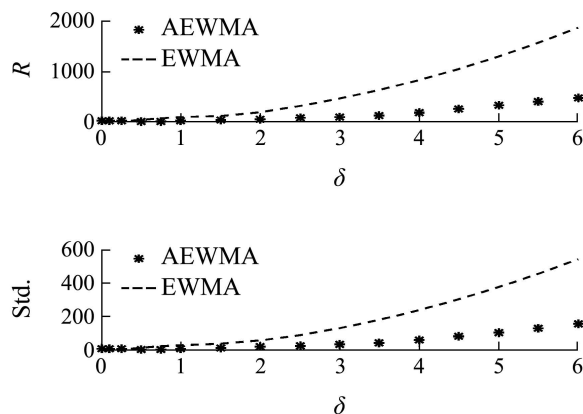
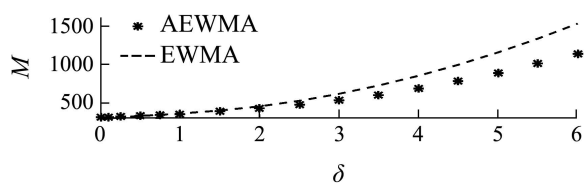


图3  $B = 100$ 时, AEWMA控制图与EWMA控制图经济特性  
Fig. 3 The economic performance of AEWMA and EWMA chart when  $B = 100$

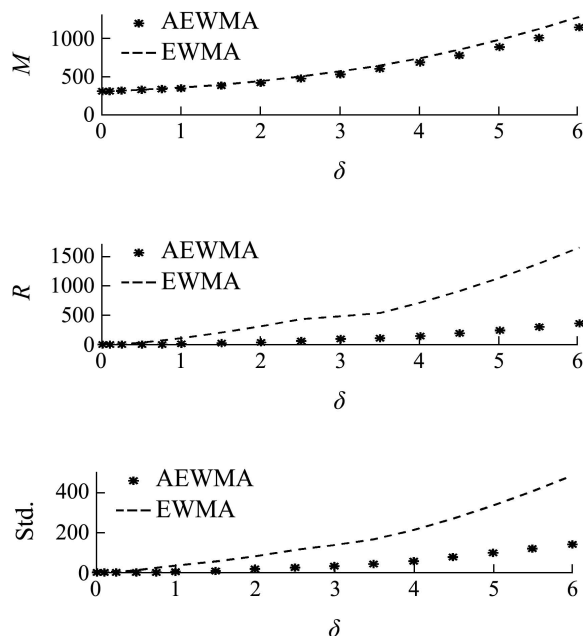


图4  $B = 500$ 时, AEWMA控制图与EWMA控制图经济特性  
Fig. 4 The economic performance of AEWMA and EWMA chart when  $B = 500$

由图3-4可知, AEWMA控制图的均值小于EWMA控制图, 这说明在对偏移平均的意义下AEWMA控制图的损失小于EWMA控制图. 实际生产过程中的偏移大小往往是无法提前获知的, 以上结论表明AEWMA控制图更适用于实际中的应用.

并且, 无论受控状态下ARL取多大, AEWMA控制图的极差 $R$ 与标准差Std.都明显小于EWMA控制图, 这种现象也说明了AEWMA控制图几乎不存在惯性问题. AEWMA控制图与EWMA制图能够达到的最小损失如图5-6所示, 使用AE代表两者之间的绝对误差, RE代表两者之间的相对误差.

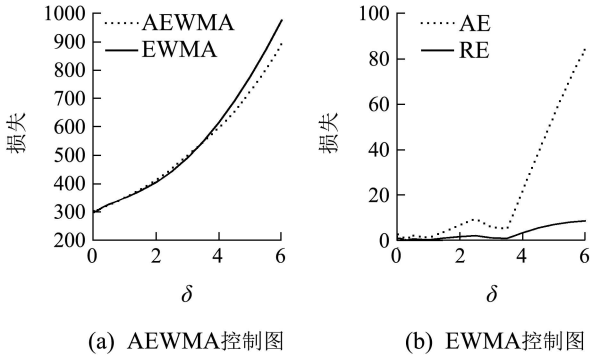


图5  $B = 100$ 时, AEWMA控制图与EWMA控制图最优损失比较

Fig. 5 Comparison of optimal cost between AEWMA chart and EWMA chart when  $B = 100$

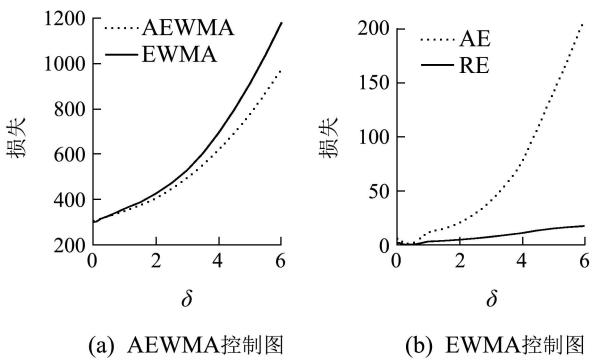


图6  $B = 500$ 时, AEWMA控制图与EWMA控制图最优损失比较

Fig. 6 Comparison of optimal cost between AEWMA chart and EWMA chart when  $B = 500$

由图5-6可知,当 $B = 500$ 时, AEWMA控制图的最优损失小于EWMA控制,随着偏移的加大最优损失的差 $AE$ 也随之加大.当 $B = 100$ 时,对于小的偏移, AEWMA控制图最优损失与EWMA控制图最优损失非常接近,随着偏移的加大, AEWMA控制图的最优损失明显小于EWMA控制图.由此可知,针对偏移区间优化的AEWMA控制图并没有不仅可以减小EWMA控制图的惯性,而且能够减小控制图监控的损失.

根据表1-2与表5-6中的最优决策变量,分别计算了不同偏移下AEWMA控制图与EWMA控制图的平均链长.当 $B = 100$ 时, AEWMA控制图的最优ARL在针对偏移区间 $[0.25, 5]$ 优化的AEWMA控制图处取到,当 $B = 500$ 时AEWMA控制图的最优ARL在针对偏移区间 $[0.5, 4]$ 优化的AEWMA控制图处取到.为了说明AEWMA控制图在解决EWMA控制图惯性问题的有效性,取 $B = 100$ 时针对 $\delta = 0.25$ 和 $\delta = 5$ 优化的EWMA控制图,取 $B = 500$ 时针对 $\delta = 0.5$ 和 $\delta = 4$ 优化的EWMA控制图,将它们在不同偏移下的ARL绘制在图7中.

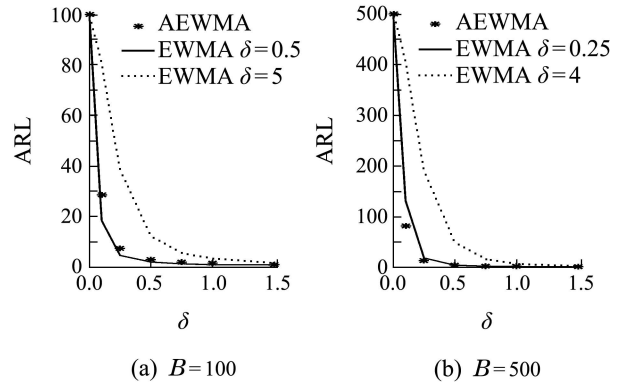


图7 AEWMA控制图与EWMA控制图ARL比较  
Fig. 7 Comparison of ARL between AEWMA and EWMA chart

图7中明显可以看出,  $B = 100$ 和 $B = 500$ 时,针对大偏移优化的EWMA控制图在检测小偏移时存在严重的报警滞后问题.当 $B = 100$ 时,在偏移区间上优化的AEWMA控制图的ARL非常接近最优ARL,当 $B = 500$ 时, AEWMA控制图的ARL是最优的.这表明本文所提出的AEWMA控制图经济统计设计方法可以保证AEWMA控制图的统计特性,在解决EWMA控制图的惯性问题上依然是有效的.

在实际应用中,考虑到同时使用多个EWMA控制图的复杂性与不易操作性,而且多个EWMA控制图同时使用会增加额外成本.因此,本文建议使用单个AEWMA控制图监控生产过程.

### 6 灵敏度分析(Sensitivity analysis)

本文分别取AEWMA控制图中对应编号为3, 9的两种情况,对参数 $K$ 和 $\theta$ 的灵敏度进行分析.设定参数 $K$ 和 $\theta$ 分别在其原来的基础上增减20%,重新优化控制图.参数 $K$ 和 $\theta$ 的变化对AEWMA控制图损失的影响如表7-8所示.其中每个单元表示参数 $K$ 和 $\theta$ 变化后的最优损失与参数未变化时的最优损失之差.

表7  $B = 100$ 时, 参数 $K$ 和 $\theta$ 的变化对AEWMA控制图损失的影响

Table 7 The impact of AEWMA chart cost with the change of  $K$  and  $\theta$  when  $B = 100$

编号	$\delta$				
	0.25	1	3	6	
$K$	3	-61.9	-65.19	-67.36	-78.55
(-20%)	9	-59.0	-77.24	-179.81	-758.46
$K$	3	60.07	76.48	132.30	371.81
(+20%)	9	72.55	38.58	<b>-122.6</b>	<b>-713.84</b>
$\theta$	3	-1.84	-7.06	-56.29	-236.87
(-20%)	9	11.72	-31.00	-245.20	-1033.60
$\theta$	3	7.06	16.55	191.85	760.77
(+20%)	9	1.11	<b>-8.87</b>	<b>-90.28</b>	<b>-368.16</b>

表8  $B = 500$ 时, 参数 $K$ 和 $\theta$ 的变化对AEWMA控制图损失的影响

Table 8 The impact of AEWMA chart cost with the change of  $K$  and  $\theta$  when  $B = 500$

编号		$\delta$			
		0.25	1	3	6
$K$	3	-66.98	-61.12	-51.74	-24.34
	(-20%) 9	-66.31	-60.97	-64.38	-50.62
$K$	3	60.52	61.85	158.97	415.06
	(+20%) 9	56.57	80.52	233.49	874.25
$\theta$	3	-1.25	-10.96	<b>21.81</b>	<b>95.09</b>
	(-20%) 9	-5.51	-1.50	-26.98	-8.82
$\theta$	4	<b>-3.69</b>	13.78	188.41	717.74
	(+20%) 9	1.28	18.20	222.13	986.59

由式(4)可知, 单纯经济设计时参数 $K$ 和 $\theta$ 的增加会给过程带来更大的损失, 参数 $K$ 和 $\theta$ 的减小会使得过程损失减小. 但是, 同时要求过程损失与平均链长最小化时会使得单一目标的变化不再符合原有规律. 这种现象主要是由以下原因引起的:

首先, 相较于常规的单纯经济设计, 本文提出的同时要求损失与平均链长达到最优使得优化目标多样化, 优化方法中引入了松弛变量以保证最优解的存在, 当参数变化对损失的减小作用很微弱时, 松弛变量的放大作用就会使得其实际结果是增加的.

其次, 平均链长 ARL 与损失  $C$  是耦合的, 为保证受控平均链长为固定值, 决策变量 UCL,  $\lambda$  和  $\gamma$  的变化规律是确定的, 由式(4)可知, 失控状态下平均链长  $ARL_1$  同时出现在了损失函数  $C$  的分子分母上, 由此可知存在一个“最优的  $ARL_1$ ”使得损失函数  $C$  最小, 但“最优的  $ARL_1$ ”未必是“最小的  $ARL_1$ ”. 另外, 在偏移区间上进行设计增加了优化的难度.

除了研究参数  $K$  和  $\theta$  的变化对控制图损失的影响, 本文还计算了参数  $K$  和  $\theta$  的变化对 AEWMA 控制图平均链长 ARL 的影响, 结果如表 9-10 所示.

表 9-10 中失控状态下平均链长  $ARL_1$  的变化也没有单一的规律可循, 这也验证了以上的分析结论. 由于损失  $C$  与  $ARL_1$  的最小值不能同时取到, 因此, 在优化过程中取二者之间的一种折衷. 由式(15)可知, 罚函数法实质上是将约束条件与目标函数的一种加权和, 这种方法并不能严格保证约束条件成立. 这也是在本文优化结果中损失  $C$  关于参数  $K$  和  $\theta$  的变化不符合单纯经济设计规律的一个原因.

表9  $B = 100$ 时,  $K$ 和 $\theta$ 的变化对AEWMA控制图ARL的影响

Table 9 The impact of AEWMA chart ARL with the change of  $K$  and  $\theta$  when  $B = 100$

编号		$\delta$			
		0.25	0.75	1.5	3
$K$	3	-4.42	-0.94	-0.40	-0.04
	(-20%) 9	22.38	0.19	-0.58	0.00
$K$	3	2.43	-0.02	-0.45	-0.04
	(+20%) 9	33.61	3.48	-0.13	0.00
$\theta$	3	4.87	0.73	0.22	0.09
	(-20%) 9	7.23	0.74	0.13	0.00
$\theta$	3	7.48	-1.88	-1.05	-0.04
	(+20%) 9	4.29	0.67	0.25	0.00

表10  $B = 500$ 时,  $K$ 和 $\theta$ 的变化对AEWMA控制图ARL的影响

Table 10 The impact of AEWMA chart ARL with the change of  $K$  and  $\theta$  when  $B = 500$

编号		$\delta$			
		0.25	0.75	1.5	3
$K$	3	-68.80	-4.89	-0.95	-0.04
	(-20%) 9	-21.66	-2.57	-0.80	-0.44
$K$	3	-88.32	-6.04	-1.08	0.18
	(+20%) 9	-55.84	-5.47	-1.59	-0.84
$\theta$	3	-91.46	-7.00	-1.49	-0.11
	(-20%) 9	-36.25	-2.14	-0.45	-0.73
$\theta$	3	-104.92	-7.03	-1.29	0.05
	(+20%) 9	-58.22	-6.23	-2.51	-0.85

将参数 $K$ 和 $\theta$ 变化对AEWMA控制图决策变量的影响记录在表11-12中.

表11  $B = 100$ 时,  $K$ 和 $\theta$ 的变化对AEWMA控制图决策变量的影响

Table 11 The impact of AEWMA chart  $\Omega$  with the change of  $K$  and  $\theta$  when  $B = 100$

编号		$h$	$n$	UCL	$\lambda$	$\gamma$
$K$	3	0.3214	2	-0.0348	0.0242	-5.1591
	(-20%) 9	-2.3153	-3	0.3687	-0.0476	-5.9384
$K$	3	1.2334	0	0.0458	0.0157	-8.3507
	(+20%) 9	-4.5361	-7	0.1447	-0.0564	-5.3223
$\theta$	3	0.1421	-1	0.0858	0.0209	-1.1984
	(-20%) 9	-4.5971	-6	0.2219	0.1175	-4.6334
$\theta$	3	-0.0067	5	0.1218	-0.0891	-9.2649
	(+20%) 9	-2.2910	-5	0.1045	0.0431	0.6664



表 12  $B = 500$  时,  $K$  和  $\theta$  的变化对 EWMA 控制图决策变量的影响

Table 12 The impact of AEWMA chart  $\Omega$  with the change of  $K$  and  $\theta$  when  $B = 500$

编号	$h$	$n$	UCL	$\lambda$	$\gamma$	
$K$	3	1.4099	1	-0.0963	0.0559	0.3281
(-20%)	9	1.0157	1	-0.0822	0.0207	3.6886
$K$	3	-0.0906	2	-0.2447	0.0111	7.1222
(+20%)	9	1.3562	5	-0.3186	-0.0133	2.9418
$\theta$	3	-0.0713	3	-0.2209	0.0575	3.2234
(-20%)	9	0.6181	1	-0.2703	-0.0757	-3.2968
$\theta$	3	0.6602	4	-0.4455	-0.0587	5.5025
(+20%)	9	0.4529	8	-0.4116	-0.0820	-4.5902

表11-12中的值为参数 $K$ 和 $\theta$ 变化后的控制图最优决策变量与变化前最优决策变量之差。

正如之前的分析, 参数 $K$ 和 $\theta$ 的变化对决策变量的影响也是不规律的。

## 7 结论(Conclusions)

EWMA控制图以其对小偏移敏感而备受关注。关于EWMA控制图的统计设计与经济设计的研究已经有很多成果发表, 其中EWMA控制图的惯性问题也是被研究的一个热点。为解决EWMA控制图的惯性问题而提出的AEWMA控制图的统计特性已经被广泛研究, 但是针对AEWMA控制图的经济特性研究还未有成果发表。本文针对AEWMA的特点, 设计了一种在偏移区间上对AEWMA控制图进行经济统计设计的方法。将该方法优化的AEWMA控制图统计与经济特性与针对固定偏移优化的EWMA控制图进行比较, 结果表明该设计方法的有效性。同时, 仿真结果表明EWMA控制图的经济特性也具有与其统计特性相似的惯性问题, 而针对偏移区间优化的AEWMA控制图可以解决该问题。AEWMA控制图的一系列特点表明其更适合实际中的应用。灵敏度分析的结果显示, 参数的变化对AEWMA控制图的损失与平均链长的影响非常复杂, 各个参数之间的耦合以及损失函数的非线性使得针对不同偏移区间优化的AEWMA控制的损失变化不再符合单纯经济设计下的规律, 平均链长以及最优参数组合的变化也没有直观规律可循。

## 参考文献(References):

[1] DUNCAN A J. The economic design of  $\bar{X}$  charts used to maintain current control of a process [J]. *Journal of the American Statistical*

*Association*, 1956, 51(2): 228 – 242.

- [2] LORENZEN T J, VANCE L C. The economic design of control charts: a unified approach [J]. *Technometrics*, 1987, 28(1): 3 – 10.
- [3] TAGUCHI G, ELSAYED E A, HSIANG T. *Quality Engineering in Production Systems* [M]. New York: McGraw-Hill, 1989.
- [4] WOODALL W H. The statistical design of quality control charts [J]. *Statistician*, 1985, 34(2): 155 – 160.
- [5] SANIGA E M. Economic statistical control chart with an application to  $\bar{X}$  and  $R$  charts [J]. *Technometrics*, 1989, 31(3): 313 – 320.
- [6] ROBERTS S W. Control chart tests based on geometric moving averages [J]. *Technometrics*, 1959, 3(1): 239 – 250.
- [7] TORNG J C, MONTGOMERY D C, COCHRAN J K. Economic design of EWMA control chart [J]. *Economic Quality Control*, 1994, 9(1): 3 – 23.
- [8] PARK C, LEE J, KIM Y. Economic design of a variable sampling rate EWMA chart [J]. *IIE Transactions*, 2004, 36(5): 387 – 399.
- [9] AMIRI A, MOSLEMI A, DOROUDYAN M H. Robust economic and economic-statistical design of EWMA control chart [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2014, 78(1/2/3/4): 511 – 523.
- [10] CHIU W C. Economic-Statistical design of EWMA control charts based on Taguchi's loss function [J]. *Communications in Statistics Simulation & Computation*, 2015, 44(1): 137 – 153.
- [11] SEREL D A. Economic design of EWMA control charts based on loss function [J]. *Mathematical & Computer Modelling*, 2009, 49(3-4): 745 – 759.
- [12] CAPIZZI G, MASAROTTO G. An adaptive exponentially weighted moving average control chart [J]. *Technometrics*, 2003, 45(3): 199 – 207.
- [13] WOODALL W H, MAHMOUND A M. The inertial properties of quality control charts [J]. *Technometric*, 2005, 47(4): 425 – 436.
- [14] SALEH N A, MAHMOUND M A, ABDEL-SALAM A G. The performance of the adaptive exponentially weighted moving average control chart with estimated parameters [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2013, 29(4): 595 – 606.
- [15] SU Y, SHU L, TSUI K. Adaptive EWMA procedures for monitoring processes subject to linear drifts [J]. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2011, 55(10): 2819 – 2829.
- [16] HUANG W, SHU L, SU Y. An accurate evaluation of adaptive exponentially weighted moving average schemes [J]. *IIE Transactions*, 2014, 46(5): 457 – 469.
- [17] ZHENG Y J, XU X L, LING H F, et al. A hybrid fireworks optimization method with differential evolution operators [J]. *Neurocomputing*, 2015, 148(19): 75 – 82.

## 作者简介:

常志远 (1987-), 男, 博士研究生, 主要研究质量控制、非线性控制, E-mail: changzy0510@163.com;

孙金生 (1967-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究质量控制、网络拥塞控制, E-mail: jssun67@163.com.