

## 参数未知耦合时滞不同复杂网络的广义同步

韦 相<sup>1,2</sup>, 赵军产<sup>3†</sup>

(1. 红河学院 工学院, 云南 红河 661100; 2. 武汉大学 数学与统计学院, 湖北 武汉 430072;

3. 湖南商学院 数学与统计学院, 湖南 长沙 410205)

**摘要:** 针对具有不同动力学节点和不同拓扑结构的两个复杂网络, 研究其广义同步问题, 并考虑具有耦合时滞和参数未知的情况. 基于Babalat引理, 并利用Lyapunov稳定性方法, 获得广义同步判据, 设计有效的自适应控制器, 实现混沌系统参数已知和参数未知两种情况下的广义同步. 仿真验证了算法的有效性.

**关键词:** 复杂网络; 广义同步; 参数未知; 自适应控制

中图分类号: TP301

文献标识码: A

## Generalized synchronization between two different complex networks with unknown parameters and delay coupling

WEI Xiang<sup>1,2</sup>, ZHAO Jun-chan<sup>3†</sup>

(1. Department of Engineering, Honghe University, Honghe Yunnan 661100, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan Hubei 430072, China;

3. School of Mathematics and Statistics, Hunan University of Commerce, Changsha Hunan 410205, China)

**Abstract:** This paper investigate the problem of generalized synchronization (GS) between two different networks with different nodes' dynamics, and consider the facts of delay coupling and unknown parameters of nodes. Based on the Barbalat lemma, GS criterion is given via the Lyapunov stability scheme. By designing a adaptive controller, GS is achieved, numerical simulations are provided to show the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** complex networks; generalized synchronization; unknown parameters; adaptive control

### 1 引言(Introduction)

复杂网络在自然界中普遍存在, 包括因特网、社会网络、生态网络、食物链网络等. 自从文献[1]提出小世界模型和文献[2]提出无标度网络模型后, 有关复杂网络的结构、同步以及应用成为各个领域的研究热点.

在人们的日常生活中, 同步现象广泛存在. 1680年, 荷兰旅行家肯普弗观察到了一个奇特的现象: 同一棵树上的萤火虫有规律地同时闪光又同时不闪光, 而且在时间上很准确. 在人类的心脏中, 无数的心脏细胞同时做着同一个动作, 使心瓣膜舒张开, 然后又同时停下来, 心瓣膜就收缩了, 它们同步震荡着. 这两个例子表现的就是现实世界中的同步现象. 复杂网络的同步是指网络中各个相互作用节点的一种一致行为, 因其应用广泛而备受关注<sup>[3-8]</sup>. 文献[3]使用主稳定函数(master stability function, MSF)法分析了复杂网络的同步状态, 文献[4]依据主稳定函数(MSF)法, 把同

步分为3种类型. 文献[5]和文献[6]分别研究了小世界网络和无标度网络的同步问题.

以上的研究都关注于一个网络的同步行为, 就是一个网络的“内同步”<sup>[9]</sup>. 然后, 在现实世界中, 存在着另外一种类型的同步行为, 即两个网络之间的“外同步”. 生态网络的捕食者和被捕食者模型中, 捕食者之间组成一个网络, 被捕食者之间组成另一个网络, 因捕食关系, 捕食者和被捕食者又存在相关关系, 如过多的捕食者会使被捕食者消亡, 而被捕食者的减少, 就会抑制捕食者的存在, 它们之间要达到一种动态的平衡. 近年来, 外同步得到了广泛的研究. 外同步包括完全同步、投影同步和广义同步等. 文献[9]研究两个具有相同拓扑结构复杂网络的完全同步, 文献[10]设计了自适应控制器实现两个不同拓扑结构复杂网络的完全同步, 但都没有考虑到时滞因素的影响. 文献[11]研究了离散系统复杂网络的同步问题. Wu等构

收稿日期: 2015-07-19; 录用日期: 2016-02-26.

†通信作者. E-mail: junchanzhao@163.com; Tel.: +86 731-88687262.

本文责任编辑: 席在荣.

国家自然科学基金项目(61573262, 61203159, 41201418, 41301442)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61573262, 61203159, 41201418, 41301442).

造非线性控制器研究了具有不同动力系统复杂网络之间的广义同步,文献[12]实现了拓扑结构未知情况的广义同步,文献[13]实现广义同步并应用于供应链网络,但都没有考虑动力系统的参数是未知的情况.外同步不仅具有理论研究价值,还具有应用价值.文献[14]实现基于完全同步的加权网络的拓扑识别,文献[15]实现基于广义同步的复杂网络重构.

同时,在复杂网络中信息传输速度是有限的,因此,时滞是不可避免的.时滞广泛存在于现实世界,如通信网络、基因调控网络、电力网络等.因此,考虑到时滞具有现实意义.因此,很多学者在研究复杂网络的同步和控制中都考虑了时滞<sup>[16-17]</sup>.文献[18]对时滞耦合和非时滞耦合的奇异复杂网络,采用线性矩阵不等式,获得同步准则.文献[19]对具有不确定输入时滞的非线性系统,利用动态面控制方法,达到对系统跟踪控制的目的.

基于上述的讨论,本文研究具有时滞耦合不同复杂网络的广义同步,包括系统参数已知和未知两种情况,因为广义同步是指驱动网络的某个节点和相应网络的对应节点满足一定的函数关系,因此,它就包含了完全同步和投影同步,同时还考虑到系统参数未知的情况,因此,本文的模型更具有普遍意义.本文首先设计了两个网络的关系模型;其次,设计相应的控制器并实现广义同步;最后用两个数值仿真验证算法的有效性.

## 2 网络模型和预定义(Network modeling and preliminaries)

考虑具有驱动网络和响应网络的复杂网络模型,每个网络分别由 $N$ 个节点构成,网络内的节点动力学方程相同,但不同网络的节点动力学方程不同,且拓扑结构不同,如图1所示,上层为驱动网络,驱动网络的节点发出驱动信号,下层为响应网络,响应网络的对应节点在接收驱动信息后,调整状态,使得上下两个网络的对应节点达到广义同步,因此,这个网络模型要求驱动网络和响应网络的节点个数是相同的.

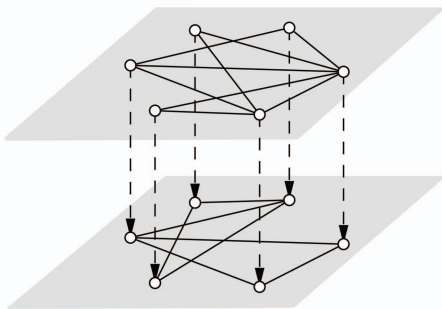


图1 驱动和响应网络模型

Fig. 1 Drive and response networks model

具体模型如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma_1 x_j(t - \tau), \\ i &= 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) &= g(y_i(t)) + \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 y_j(t - \tau) + u_i(t), \\ i &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

其中:  $x_i(t) = (x_{i1}, \dots, x_{in})^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_i(t) = (y_{i1}, \dots, y_{im})^T \in \mathbb{R}^m$  分别是驱动网络和响应网络的动力学状态变量,  $\tau$  表示耦合时滞,  $u_i$  表示响应网络节点 $i$ 的控制器.  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  表示驱动网络的节点动力学, 且驱动网络节点动力学参数是未知的. 为了区分驱动系统的未知参数, 把驱动系统分成无未知参数部分和有未知参数部分, 那么  $f(x_i(t)) = \bar{f}(x_i(t)) + \bar{F}(x_i(t))\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^h$  表示系统未知参数向量,  $h$  是未知参数的个数.  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  表示响应网络的节点动力.  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  分别表示驱动网络和响应网络的内耦合矩阵.  $C = (c_{ij})_{N \times N}$  和  $D = (d_{ij})_{N \times N}$  分别是驱动网络和响应网络的外耦合矩阵,  $c_{ij}$  和  $d_{ij}$  定义如下: 如果节点 $j$ 到节点 $i$  ( $i \neq j$ ) 有连接, 则  $c_{ij} > 0$ ,  $d_{ij} > 0$ , 否则

$$\begin{aligned} c_{ij} &= 0, \quad d_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \\ c_{ii} &= - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}, \quad d_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N d_{ij}. \end{aligned}$$

$\Phi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 是连续可微的向量映射.

驱动网络(1)和响应网络(2)实现广义同步可以这样描述<sup>[12]</sup>: 对驱动网络节点 $i$ 进行映射, 映射关系为  $\Phi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), 如果存在控制器  $u_i(t)$ , 使得映射结果  $\Phi_i(x_i(t))$  与响应网络的对应节点误差趋于0, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - \Phi_i(x_i(t))\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

那么驱动网络(1)和响应网络(2)实现广义同步. 向量  $x$  的范数  $\|\cdot\|$  定义为  $\|x\| = (x^T x)^{1/2}$ .

**假设1** 对任意的  $x, y \in \mathbb{R}^m$ , 存在正常量  $L$ , 满足

$$\|g(y(t)) - g(x(t))\| \leq L \|y(t) - x(t)\|. \quad (4)$$

## 3 自适应控制方法 (Adaptive controlling method)

首先定义广义同步误差如下:

$$e_i = y_i(t) - \Phi_i(x_i(t)). \quad (5)$$

为了实现对不同复杂网络的广义同步, 本文使用自适应控制器. 因为自适应控制方法有很多优点. 首先, 可以根据同步误差自动调整控制强度, 不需要人为地确定控制强度; 其次, 可以根据系统参数或者拓扑结构本身的特性, 设计出适当的更新规则, 来更新

自适应控制器自身的参数,从而达到控制或同步的目的<sup>[20]</sup>.文献[21]对多智能体分布式追踪问题的研究时,针对领导者节点的输入参数未知的情况,使用自适应控制器,可以有效地实现追踪问题.本文分别对系统参数未知和已知的情况分别设计不同的控制器和更新规则.

### 3.1 系统参数未知(System with unknown parameters)

对驱动系统参数未知的情况,本文给响应网络的节点设计如下的控制器,并给出广义同步的证明:

$$u_i = J_{\Phi_i} \bar{f}(x_i(t)) + J_{\Phi_i} \bar{F}(x_i(t)) \hat{\alpha}(t) + J_{\Phi_i} \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma_1 x_j(t-\tau) - g(\Phi_i(x_i(t))) - \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 \phi_j(x_j(t-\tau)) - k_i(t) e_i(t), \quad (6)$$

$$\dot{\hat{\alpha}}(t) = - \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^T(x_i(t)) J_{\Phi_i}^T(x_i(t)) e_i(t), \quad (7)$$

$$\dot{k}_i(t) = \|e_i(t)\|^2. \quad (8)$$

上式中:  $J_{\Phi_i}$  是映射  $\Phi_i(x_i(t))$  的雅克比矩阵,  $\hat{\alpha}(t)$  是  $\alpha$  估计,  $k_i(t)$  反馈控制参数. 使用同步误差  $e_i(t) = y_i(t) - \Phi_i(x_i(t))$ , 以及参数的估计值和真值之间的误差  $\tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t) - \alpha$ , 获得以下的同步误差动态方程:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \dot{y}_i(t) - J_{\Phi_i} \dot{x}_i(t) = \\ &g(y_i(t)) + \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 y_j(t-\tau) + u_i(t) - \\ &J_{\Phi_i} [\bar{f}(x_i(t)) + \bar{F}(x_i(t)) \alpha + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma_1 x_j(t-\tau)] = \\ &g(y_i(t)) - g(\Phi_i(x_i(t))) + \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 e_j(t-\tau) + \\ &J_{\Phi_i} \bar{F}(x_i(t)) \tilde{\alpha}(t) - k_i e_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

**定理 1** 当假设1成立, 驱动系统参数未知时, 在控制器(6)和更新规则(7)–(8)的作用下, 驱动网络(1)和响应网络(2)达到广义同步.

**证** 考虑如下的Lyapunov函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i^T(t) \tilde{\alpha}_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_i(t) - \bar{k})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau}^t e_i^T(\theta) e_i(\theta) d\theta.$$

对  $V(t)$  沿着误差系统(5)的轨迹求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \dot{e}_i(t) + \tilde{\alpha}^T(t) \dot{\tilde{\alpha}}(t) + \sum_{i=1}^N (k_i(t) - \bar{k}) \dot{k}_i + \\ &\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) - \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau) e_i(t-\tau) \right) = \\ &\sum_{i=1}^N e_i^T(t) [g(y_i(t)) - g(\phi_i(x_i(t))) - k_i e_i(t)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N e_i^T(t) d_{ij} \Gamma_2 e_j(t-\tau) + \\ &\sum_{i=1}^N (k_i - \bar{k}) \|e_i(t)\|^2 + \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau) e_i(t-\tau). \end{aligned}$$

因为

$$e_i^T(t) A e_j(t-\tau) \leq \frac{1}{2} e_i^T(t) A A^T e_i(t) + \frac{1}{2} e_i^T(t-\tau) e_i(t-\tau), \quad (9)$$

$A = D \otimes \Gamma_2$ , 设  $e(t) = (e_1(t)^T, e_2(t)^T, \dots, e_N(t)^T)^T \in \mathbb{R}^{nN}$ , 由假设1得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq (L - k + \frac{1}{2}) e^T(t) e(t) + \frac{1}{2} e^T(t) A A^T e(t) \leq \\ &-(k - L - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A A^T)) e^T(t) e(t). \end{aligned}$$

上式  $\lambda_{\max}(A A^T)$  表示矩阵  $A A^T$  的最大特征值.

当取  $k = 1 + L + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A A^T)$  时,  $\dot{V}(t) \leq -e^T(t) e(t)$ , 所以,  $\dot{V}(t)$  是半负定的. 同时,  $V(0)$  有界, 因此  $V(t)$  有界, 根据Barbalat引理可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

因此, 驱动网络(1)和响应网(2)达到广义同步.

### 3.2 参数已知(System with known parameters)

对系统参数已知的情况, 驱动网络的动力系统使用  $f(x_i(t))$ , 设计如下的控制器并给出广义同步证明:

$$\begin{aligned} u_i &= J_{\Phi_i} f(x_i(t)) + J_{\Phi_i} \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma_1 x_j(t-\tau) - \\ &g(\Phi_i(x_i(t))) - \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 \phi_j(x_j(t-\tau)) - \\ &k_i e_i(t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{k}_i = \|e_i(t)\|^2, \quad (12)$$

上式中,  $J_{\Phi_i}$  映射  $\Phi_i(x_i(t))$  的雅克比矩阵.  $k_i$  反馈控制参数. 使用  $e_i(t) = y_i(t) - \Phi_i(x_i(t))$ , 获得以下的同步误差动态方程:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \dot{y}_i(t) - J_{\Phi_i} \dot{x}_i(t) = \\ &g(y_i(t)) + \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 y_j(t-\tau) + u_i(t) - \\ &J_{\Phi_i} [f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma_1 x_j(t-\tau)] = \\ &g(y_i(t)) - g(\Phi_i(x_i(t))) + \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 e_j(t-\tau) - \\ &k_i e_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

**定理 2** 当假设1成立, 驱动系统参数已知时, 在控制器(11)和更新规则(12)的作用下, 驱动网络(1)和响应网络(2)达到广义同步.

证 考虑如下的Lyapunov函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_i(t) - \bar{k})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau}^t e_i^T(\theta) e_i(\theta) d\theta.$$

对 $V(t)$ 沿着误差系统(5)轨迹求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \dot{e}_i(t) + \sum_{i=1}^N (k_i(t) - \bar{k}) \dot{k}_i(t) + \\ & \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) - \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau) e_i(t-\tau) \right) = \\ & \sum_{i=1}^N e_i^T(t) [g(y_i(t)) - g(\phi_i(x_i(t))) - k e_i(t)] + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau) e_i(t-\tau) + \\ & \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N e_i^T(t) d_{ij} \Gamma_2 e_j(t-\tau), \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} e_i^T(t) A e_j(t-\tau) \leq \\ \frac{1}{2} e_i^T(t) A A^T e_i(t) + \frac{1}{2} e_i^T(t-\tau) e_i(t-\tau), \end{aligned} \quad (13)$$

式中:  $A = D \otimes \Gamma_2$ ,  $\otimes$ 是矩阵的Kronecker积. 设 $e(t) = (e_1(t)^T, e_2(t)^T, \dots, e_N(t)^T)^T \in \mathbb{R}^{nN}$ , 由假设1得到

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & (L - k + \frac{1}{2}) e^T(t) e(t) + \frac{1}{2} e^T(t) A A^T e(t) \leq \\ & - (k - L - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A A^T)) e^T(t) e(t). \end{aligned}$$

当取 $k = 1 + L + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A A^T)$ 时,  $\dot{V}(t) \leq -e^T(t) e(t)$ , 所以 $\dot{V}(t)$ 是半负定的. 同理, 驱动网络(1)和响应网络(2)达到广义同步.

**推论 1** 当驱动系统参数未知, 两个网络都没有耦合时滞时, 设计如下的控制器可实现网络的广义同步:

$$\begin{aligned} u_i = & J_{\Phi_i} \bar{f}(x_i(t)) + J_{\Phi_i} \bar{F}(x_i(t)) \hat{\alpha}(t) + \\ & J_{\Phi_i} \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma_1 x_j(t) - g(\Phi_i(x_i(t))) - \\ & \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 \phi_j(x_j(t)) - k_i e_i(t), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\dot{\hat{\alpha}}(t) = - \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^T(x_i(t)) J_{\Phi_i}^T(x_i(t)) e_i(t), \quad (15)$$

$$\dot{k}_i(t) = \|e_i(t)\|^2. \quad (16)$$

**推论 2** 当驱动系统参数未知, 网络没有耦合时滞时, 且内部耦合和外部耦合矩阵都相同, 设计如下

的控制器可实现网络的广义同步:

$$\begin{aligned} u_i = & J_{\Phi_i} \bar{f}(x_i(t)) + J_{\Phi_i} \bar{F}(x_i(t)) \hat{\alpha}(t) - \\ & g(\Phi_i(x_i(t))) - k_i(t) e_i(t), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\dot{\hat{\alpha}}(t) = - \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^T(x_i(t)) J_{\Phi_i}^T(x_i(t)) e_i(t), \quad (18)$$

$$\dot{k}_i(t) = \|e_i(t)\|^2. \quad (19)$$

**说明** 对于推论1和推论2, 可利用如下的Lyapunov函数, 证明达到广义同步:

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i^T(t) \tilde{\alpha}_i(t) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_i(t) - \bar{k})^2. \end{aligned}$$

#### 4 数值仿真(Numerical simulation)

在本文的仿真中, 驱动网络的节点都是超混沌Lü系统, 节点动力学方程如下:

$$\begin{aligned} f(x_i) = & \begin{pmatrix} a(x_{i2} - x_{i1}) + x_{i4} \\ -x_{i1}x_{i3} + cx_{i1} - x_{i2} \\ x_{i1}x_{i2} - bx_{i3} \\ dx_{i4} - x_{i2}x_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i4} \\ -x_{i1}x_{i3} - x_{i2} \\ x_{i1}x_{i2} \\ -x_{i2}x_{i3} \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} x_{i2} - x_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{i1} & 0 \\ 0 & -x_{i3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{i4} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

上式参数 $a = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $c = 28$ ,  $d = -0.8$ . 上式是当参数向量 $\alpha = (a, b, c, d)^T$ 是未知时, 把动力系统方程写成无未知参数和有未知参数两部分. 而当参数已知时, 就不需要写成两部分.

响应网络的节点都是蔡氏电路, 节点动力学方程如下:

$$g(y_i) = \begin{pmatrix} \varsigma(-y_{i1} + y_{i2} - l(y_{i1})) \\ y_{i1} - y_{i2} + y_{i3} \\ -\varrho y_{i3} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

式中 $l(y_{i1}) = by_{i1} + 0.5(a-b)(|y_{i1}+1| - |y_{i1}-1|)$ . 当 $\varsigma = 10$ ,  $\varrho = 18$ ,  $a = -4/3$ ,  $b = -3/4$ , 蔡氏电路进入混沌状态. 对任意的状态向量 $y_i$ , 因为混沌吸引子是有界的<sup>[22-23]</sup>, 所以必存在正的常数 $M$ 满足

$$\|x_{ik}\| \leq M (k = 1, 2, 3, 4),$$

且 $\|y_{ik}\| \leq M (k = 1, 2, 3)$ . 同时, 蔡氏电路是线性系统, 所以它满足假设1成立的条件.

##### 4.1 案例1(Case 1)

在这一案例中, 驱动网络和响应网络各有5个节点. 驱动网络的耦合矩阵 $C$ 为

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

响应网络的耦合矩阵 $D$ 为

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

定义广义映射为 $\Phi_i(x_i) = (2x_{i1} \ x_{i2} + x_{i3} \ x_{i4})^T$ , 故

$$J_{\Phi_i}(x_i) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 5. \quad (22)$$

仿真中, 耦合时滞 $\tau = 0.2$  s, 驱动网络和响应网络的内连矩阵分别是 $\Gamma_1 = I_4$ ,  $\Gamma_2 = I_3$ . 驱动网络节点和响应网络节点的初始状态为 $[0, 1]$ 的随机数, 未知参数 $\hat{\alpha}_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )和反馈控制参数 $k_i(t)$ 的初始值也是 $[0, 1]$ 中的随机数. 此案例对参数已知和参数未知两种情况都做了仿真, 图2–4是在驱动系统参数已知条件下, 3个维度的同步误差的时间演化过程. 图5–7是在驱动系统参数未知条件下, 3个维度的同步误差的时间演化过程.

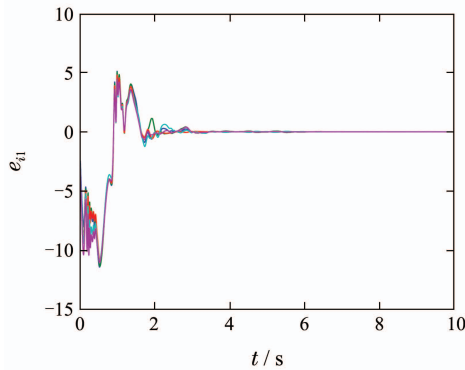


图2 广义同步误差 $e_{i1}$

Fig. 2 GS error of  $e_{i1}$

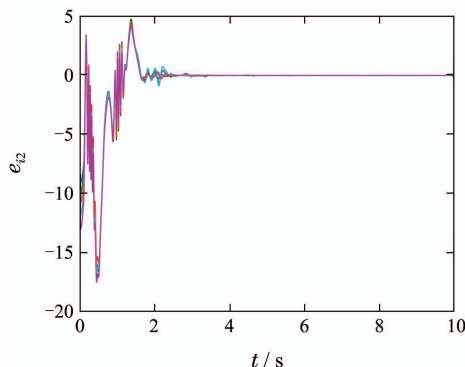


图3 广义同步误差 $e_{i2}$

Fig. 3 GS error of  $e_{i2}$

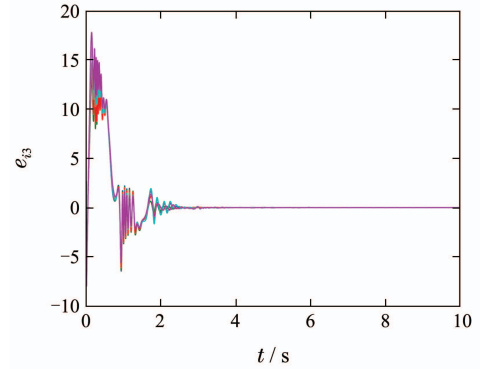


图4 广义同步误差 $e_{i3}$

Fig. 4 GS error of  $e_{i3}$

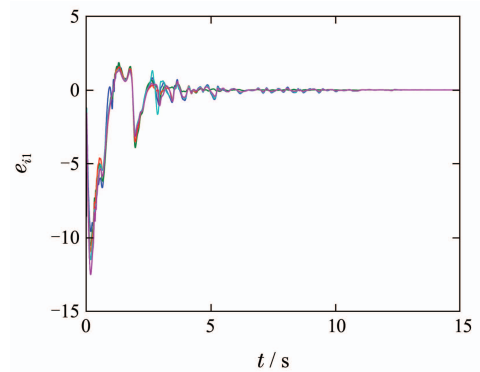


图5 参数未知广义同步误差 $e_{i1}$

Fig. 5 GS error of  $e_{i1}$  with unknown parameters

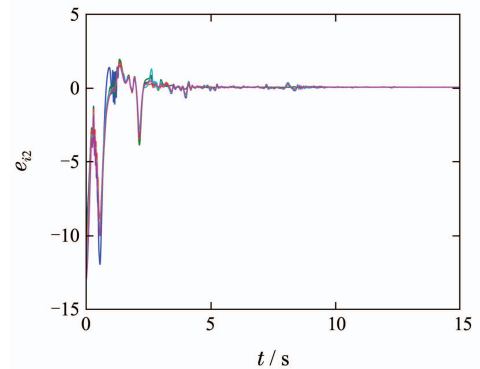


图6 参数未知广义同步误差 $e_{i2}$

Fig. 6 GS error of  $e_{i2}$  with unknown parameters

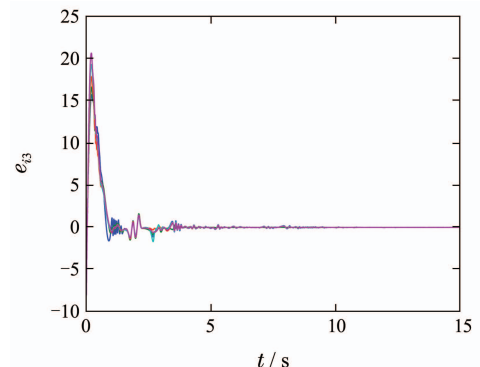


图7 参数未知广义同步误差 $e_{i3}$

Fig. 7 GS error of  $e_{i3}$  with unknown parameters

如图5-7所示, 经过一定的时间演化后, 广义同步误差很快趋于0, 两个网络实现了广义同步。

## 4.2 案例2(Case 2)

此案例对参数未知的情况做了仿真, 驱动网络是美国政治博客网(political blogs)<sup>[24]</sup>, 该有向网络有1224个节点, 19090条连边, 响应网络是在驱动网络的基础, 对20%的连边以概率0.8随机重连, 以保证两个网络有相同的节点数目, 但拓扑结构不同. 定义的广义映射和案例1相同, 仿真中, 耦合时滞 $\tau = 0.2$  s, 驱动网络和响应网络的内连矩阵分别是 $I_1 = I_4$ ,  $I_2 = I_3$ . 驱动网络节点和响应网络的初始状态与案例1有相同的取法, 未知参数 $\hat{\alpha}_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )和反馈控制参数 $k_i(t)$ 是 $[0, 1]$ 中的随机数。

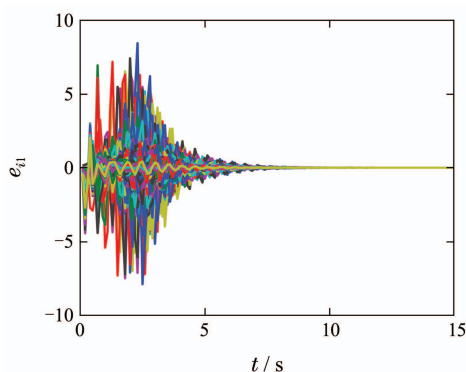


图8 参数未知广义同步误差 $e_{i1}$

Fig. 8 GS error of  $e_{i1}$  with unknown parameters

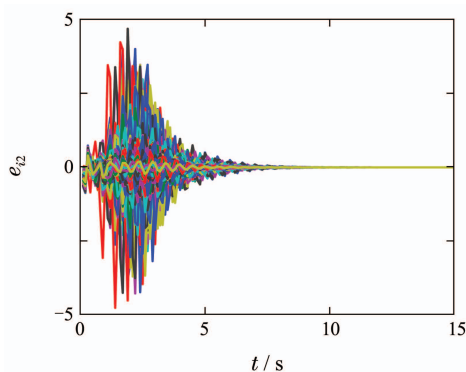


图9 参数未知广义同步误差 $e_{i2}$

Fig. 9 GS error of  $e_{i2}$  with unknown parameters

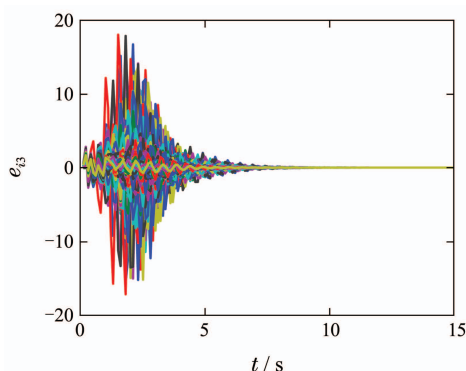


图10 参数未知广义同步误差 $e_{i3}$

Fig. 10 GS error of  $e_{i3}$  with unknown parameters

图8-10展示了在驱动系统参数未知条件下, 3个维数同步误差的时间演化过程. 如图8-10所示, 经过一定的时间演化后, 广义同步误差趋于0, 说明两个网络实现了广义同步。

## 5 结论(Conclusions)

本文基于不同节点和不同拓扑结构的两个复杂网络, 研究其广义同步问题, 并考虑具有耦合时滞和参数未知的情况. 利用驱动-响应同步策略, 对响应网络施加控制, 并利用Lyapunov稳定性方法, 获得广义同步判据, 从而设计出有效的自适应控制器, 实现在混沌系统参数已知和参数未知两种情况下的广义同步. 仿真验证了算法的有效性. 对于有扰动的多个网络的广义同步问题, 时滞大小的确定性问题以及应用有待后续研究。

## 参考文献(References):

- [1] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks [J]. *Nature*, 1998, 393(6684): 440 – 442.
- [2] BARABASI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks [J]. *Science*, 1999, 286(5439): 509 – 512.
- [3] PECORA L M, CARROLL T L. Master stability functions for synchronized coupled systems [J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(10): 2109 – 2112.
- [4] HUANG L, CHEN Q, LAI Y C, et al. Generic behavior of master stability functions in coupled nonlinear dynamical systems [J]. *Physical Review E*, 2009, 80(3): 1863 – 1870.
- [5] WANG X F, CHEN G R. Synchronization in small-world dynamical networks [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2009, 12(1): 187 – 192.
- [6] WANG X F, CHEN G R. Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility [J]. *IEEE Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(1): 54 – 62.
- [7] NISHIKAWA T, MOTTER A E, LAI Y C, et al. Heterogeneity in oscillator networks: are smaller worlds easier to synchronize? [J]. *Physical Review Letters*, 2003, 91(1): 014101.
- [8] MOTTER A E, ZHOU C S, KURTHS J. Enhancing complex-network synchronization [J]. *Europhysics Letters*, 2005, 69(3): 334 – 340.
- [9] LI C, SUN W, KURTHS J. Synchronization between two coupled complex networks [J]. *Physical Review E*, 2007, 76(4): 70 – 80.
- [10] TANG H, CHEN L, LU J A, et al. Adaptive synchronization between two complex networks with nonidentical topological structures [J]. *Physica A*, 2008, 387(22): 5623 – 5630.
- [11] LI C, XU C, SUN W, et al. Outer synchronization of coupled discrete-time networks [J]. *Chaos*, 2009, 19(1): 283 – 290.
- [12] WANG Jianan. Adaptive generalized synchronization between two different complex networks with time-varying delay coupling [J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(2): 1 – 7.  
(王健安. 时变时滞耦合两个不同复杂网络的自适应广义同步 [J]. 物理学报, 2012, 61(2): 1 – 7.)
- [13] XU Junqun, ZHANG Jianxiong, PANG Mingbao. Generalized synchronization between two different complex delayed networks [J]. *Journal of Tianjin University(Science and Technology)*, 2014, 47(1): 81 – 85.  
(徐君群, 张建雄, 庞明宝. 2个时滞复杂动态网络的广义同步 [J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2014, 47(1): 81 – 85.)

- [14] WU X. Synchronization-based topology identification of weighted general complex dynamical networks with time-varying coupling delay [J]. *Physica A*, 2008, 387(4): 997 – 1008.
- [15] ZHANG S, WU X, LU J A, et al. Recovering structures of complex dynamical networks based on generalized outer synchronization [J]. *IEEE Transactions on Circuits & Systems I Regular Papers*, 2014, 61(11): 3216 – 3224.
- [16] ZHENG S, WANG S, DONG G, et al. Adaptive synchronization of two nonlinearly coupled complex dynamical networks with delayed coupling [J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2012, 17(1): 284 – 291.
- [17] SUN Y, LI W, RUAN J. Generalized outer synchronization between complex dynamical networks with time delay and noise perturbation [J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulations*, 2013, 18(4): 989 – 998.
- [18] DUAN Wenyong, CAI Chenxiao, ZOU Yun, et al. Synchronization criteria for singular complex dynamical networks with delayed coupling and non-delayed coupling [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(8): 947 – 955.  
(段文勇, 蔡晨晓, 邹云, 等. 时滞耦合和非时滞耦合的奇异复杂动态网络之同步性准则 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(8): 947 – 955.)
- [19] ZHU Qing, SONG Aiguo, FEI Shumin, et al. Adaptive dynamic surface control for a class of nonlinear time-delay systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(11): 1437 – 1444.  
(朱清, 宋爱国, 费树岷, 等. 一类非线性时滞系统的自适应动态面控制 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(11): 1437 – 1444.)
- [20] YANG X, CAO J, LU J. Stochastic synchronization of complex networks with nonidentical nodes via hybrid adaptive and impulsive control [J]. *IEEE Transactions on Circuits & Systems I Regular Papers*, 2012, 59(2): 371 – 384.
- [21] LI Z, LIU X, REN W. Distributed containment control of linear multi-agent systems with multiple leaders of bounded unknown inputs [C] //2012 31st Chinese Control Conference (CCC). Hefei: IEEE, 2012, 31: 6165 – 6170.
- [22] LI D, LU J A, WU X, et al. Estimating the ultimate bound and positively invariant set for the Lorenz system and a unified chaotic system [J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2006, 323(2): 844 – 853.
- [23] XU Hongxing. Globally exponentially attractive set of a hyperchaotic Lorenz chaotic system and its application [J]. *Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science)*, 2012, 26(7): 111 – 114.  
(胥红星. 一个超混沌Lorenz系统的全局指数吸引集及应用 [J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2012, 26(7): 111 – 114.)
- [24] MARK Newman. *Network data* [DB/OL]. <http://www-personal.umich.edu/mejn/netdata>. 2013-04-19/2015-10-30.

### 作者简介:

**韦 相** (1980–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为复杂网络的同步与拓扑结构识别、复杂网络传播动力学, E-mail: weixiangwx2003@163.com;

**赵军产** (1982–), 男, 副教授, 目前研究方向为复杂网络与复杂系统、混沌动力学、复杂网络传播动力学, E-mail: junchanzhao@163.com.