DOI: 10.7641/CTA.2016.50630

# 无人机吊挂飞行的非线性控制方法设计

鲜 斌<sup>†</sup>,张 旭,杨 森

(天津大学 电气与自动化工程学院; 机器人与自主系统研究所; 天津市过程检测与控制重点实验室, 天津 300072)

摘要:针对四旋翼无人机吊挂飞行系统,本文设计了一种新型控制策略.本文首先建立了四旋翼无人机吊挂系统的数学模型.其中负载被看作由刚性绳悬挂在四旋翼无人机重心位置的质点.之后本文通过能量分析的方法设计了针对此系统的非线性控制器.本文提出的控制方法可以在抑制吊挂负载摆动的同时将四旋翼无人机移动到目标位置.本文运用李雅普诺夫稳定性分析和拉塞尔不变性原理对闭环系统的稳定性进行了证明.最后,通过数值仿真,分别将本控制器镇定控制和调节控制的控制效果与线性二次调节器(linear-quadratic regulator, LQR)控制器进行了对比.

关键词:四旋翼;无人机;抗摆控制;吊挂;能量方法中图分类号: TP273 文献标识码: A

# Nonlinear controller design for an unmanned aerial vehicle with a slung-load

# XIAN Bin<sup>†</sup>, ZHANG Xu, YANG Sen

(Tianjin Key Laboratory of Process Measurement and Control; Institute of Robotics and Autonomous System; School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: This article presents a novel nonlinear control strategy for a quadrotor unmanned aerial vehicle (UAV) with a slung-load. The dynamic model for a quadrotor UAV system with slung-load is firstly obtained. The load is considered as a mass point, with a rigid link connected to the centre of gravity of the quadrotor UAV. Then, a nonlinear control strategy for the considered system is designed via the energy-based methodology. The proposed control design is able to move the quadrotor UAV to its desired position while suppress the swing of the load. The Lyapunov-based stability analysis and the LaSalle Invariance Theorem are employed to prove the stability of the closed-loop system. The control performance of the proposed control strategy is compared with that of a linear-quadratic regulator (LQR) controller via numerical simulation of stabilization control and regulation control.

Key words: quadrotor; unmanned aerial vehicle (UAV); anti-swing control; slung-load; energy method

# 1 引言(Introduction)

四旋翼无人机是一种多旋翼结构的飞行器. 微型 无人机以其在自然灾害中查险救援、警用及军用任 务、农业施肥等领域发挥的重大作用, 引起科研人员 的广泛关注. 无人机吊挂飞行是将微型无人机运用于 各种具体任务的重要实现方式.

近年来,无人机吊挂飞行的问题日益得到国内外 高校和研究团队的关注.目前国内研究人员的相关研 究工作多为针对全尺寸直升机吊挂飞行中,面向飞行 员的操作控制性性能问题,以及针对吊挂绳索和吊挂

本文责任编委: 方勇纯.

国外研究人员针对无人机直升机吊挂飞行的问题 提出了多种控制方法.其中,美国宾夕法尼亚大学的 研究人员较早开展了这方向的研究工作,并已取得了 一些前期的研究成果.在文献[3]中,研究人员基于微 分平滑(differential flatness)方法设计了针对平面四旋 翼无人机吊挂系统的控制器,实现了针对四旋翼无人 机吊挂系统的轨迹生成和跟踪,并将这种控制方法扩 展到三维环境.在文献[4]中,研究人员利用几何控制 (geometric control)和微分平滑方法,达到了四旋翼无

收稿日期: 2015-07-20; 录用日期: 2015-11-06.

<sup>&</sup>lt;sup>†</sup>通信作者. E-mail: xbin@tju.edu.cn; Tel.: +86 22-27400897.

载荷的空气动力学特性分析问题[1-2].

天津市应用基础与前沿技术研究计划重点项目(14JCZDJC31900), 天津市科技计划项目(14RCHZGX00862), 国家自然科学基金项目(60804004, 90916004)资助.

Supported by Key Project of Tianjin Application and Research Program in Cuting-edge Technology (14JCZDJC31900), Science and Technology Program of Tianjin (14RCHZGX00862) and National Natural Science Foundation of China (60804004, 90916004).

人机吊挂系统几乎全局指数稳定的控制效果.

美国新墨西哥大学同样在无人机吊挂飞行领域取 得了较多科研成果.在文献[5]中,研究人员利用动态 规划(dynamic programming)算法实现了四旋翼无人 机吊挂飞行的轨迹跟踪.在文献[6]中,研究人员利用 强化学习(reinforcement learning)的方法,实现了通过 对四旋翼飞行器位置和姿态的调整达到对吊挂负载 的轨迹进行规划的目的.在文献[7]中,研究人员对带 有吊挂负载的四旋翼无人机的起飞过程进行了研究, 文献解决了四旋翼无人机在吊挂负载未知的情况下 实现安全起飞的问题,并通过仿真结果证实了其算法 的有效性.

美国乔治华盛顿大学的Taeyoung Lee等人也在四旋翼无人机吊挂系统的相关研究中取得了一些研究成果. 文献[8]中, 研究人员研究分析了对多无人机吊挂刚体负载系统的控制问题, 并设计控制器实现了指数稳定的控制效果, 仿真结果验证了该控制方法的有效性. 此外, 该研究团队还对柔性绳吊挂问题<sup>[9]</sup>和吊挂负载质量未知的自适应问题<sup>[10]</sup>进行了分析和研究.

另外一些研究团队将不同的控制思想应用于四旋 翼无人机吊挂系统的分析和研究.在文献[11]中,研究 人员利用非线性模型预测控制方法实现了对无人机 位置跟踪控制和抗摆控制,并与LQR控制器进行了对 比.在文献[12]中,研究人员基于模糊理论设计了一 种新型控制器,实现了无人直升机吊挂系统在平衡点 附近的抗摆控制,并通过与经典模糊PD控制器的对 比,表明该控制器具有良好的控制效果.

综上所述,近年来对无人机吊挂系统的研究成果 显著,但是许多方法仍存在一些局限性.例如:文献 [3-4]中所设计的控制器虽然控制效果显著,但控制器 结构较为复杂,并且需要无人机飞行状态的高阶导数 项,在运算能力有限的无人机机载控制器上难以实现; 文献[10,12]中,对无人机吊挂系统模型进行了线性化 处理或较多简化处理,虽然在平衡点附近可以很好的 描述系统特性,但在系统偏离平衡点严重时难以保证 闭环系统控制性能;文献[5,7]中,没有就所设计控制 策略给出较为严格的稳定性分析和收敛性证明.

在本文中,基于能量法为四旋翼无人机吊挂系统 设计了一种非线性控制策略,能有效地控制无人机的 飞行位置,且能较好地抑制吊挂负载在飞行中的摆动. 本文的创新性包括:1)直接针对四旋翼无人机吊挂 系统的非线性模型进行分析和控制器设计,并不对模 型进行线性化处理,从而使控制器在距离平衡点较远 的位置仍可以达到良好的控制效果.2)控制器结构较 为简单,本文所设计的控制器在保证控制效果良好的 同时保持了控制器结构的简洁,从而便于在运算速度 受限的机载控制器中实现.3)本文所设计的控制算法 不仅通过数值仿真进行了检验,其稳定性经过严格的 数学证明,确保了该控制方法的有效性和可实现性.

#### 2 动力学模型(Dynamics model)

四旋翼无人机吊挂系统的结构简图如图1所示: 图1(a)所示为四旋翼无人机吊挂系统3维模型示意图, 图1(b)为其对应的2维示意图.



首先建立如图1(b)所示的坐标系,包括惯性坐标 系{ $\mathcal{I}$ }和四旋翼无人机的体坐标系{ $\mathcal{B}$ },图1(b)中 { $x_i, z_i$ }和{ $x_b, z_b$ }分别表示坐标系{ $\mathcal{I}$ }和坐标系{ $\mathcal{B}$ } 各坐标轴的正方向.图1(b)中: F表示四旋翼无人 机4个旋翼的总升力, $\theta$ 表示无人机的俯仰角, $m_Q$ 和  $m_L$ 分别为无人机和负载的质量,L为绳长, $\gamma$ 为绳索与 竖直方向的夹角,T表示绳索的张力.根据实际飞行的 情况可以做出如下合理假设:

**假设1** 在地面坐标系和四旋翼无人机体坐标 系下,吊挂物体都始终在飞行器的下方,即吊挂物体 相对于四旋翼无人机的摆角 $\gamma \in (-90^\circ, 90^\circ), \mathbb{1}-90^\circ$  $< \gamma - \theta < 90^\circ.$ 

**假设2** 吊挂的绳索始终是张紧的,且其长度不 发生变化,即T > 0,且 $|P_Q - P_L| \equiv L$ ,其中 $P_Q(x_Q, z_Q)$ 与 $P_L(x_L, z_L)$ 分别为四旋翼无人机与负载的位置.

**假设3** 吊挂物体可以看作质点,且吊挂点与四 旋翼无人机的质心重合.

将F分解: 1) 按照图1(b)中的惯性坐标系下 $x_i$ 轴和 $z_i$ 轴方向分解为 $F_x$ 和 $F_z$ ; 2) 按照垂直与平行于绳的方向分解为 $F_{nx}$ 和 $F_{ny}$ . 具体的表达形式为

$$F_{\rm x} = -F\sin\theta, \tag{1a}$$

$$\hat{F}_{nx} = F \sin(\gamma - \theta),$$
  
 $F_{ny} = F \cos(\gamma - \theta).$  (1b)

由假设2可以将负载的水平和竖直方向的位置 x<sub>L</sub>和 z<sub>L</sub>分别表示为

$$\begin{cases} x_{\rm L} = x_{\rm Q} + L \sin \gamma, \\ z_{\rm L} = z_{\rm Q} - L \cos \gamma. \end{cases}$$
(2)

对式(2)两边同时求时间的二阶导数得到负载的加

## 速度在水平和竖直两个方向上的分量äL和žL分别为

$$\begin{cases} \ddot{x}_{\rm L} = \ddot{x}_{\rm Q} - L\dot{\gamma}^2 \sin\gamma + L\ddot{\gamma}\cos\gamma, \\ \ddot{z}_{\rm L} = \ddot{z}_{\rm Q} + L\dot{\gamma}^2\cos\gamma + L\ddot{\gamma}\sin\gamma. \end{cases}$$
(3)

分析四旋翼无人机和吊挂负载可以得到

$$\begin{cases} m_{\rm Q} \ddot{x}_{\rm Q} = F_{\rm x} + T \sin \gamma, \\ m_{\rm Q} \ddot{z}_{\rm Q} = F_{\rm z} - T \cos \gamma - m_{\rm Q} g, \\ m_{\rm L} \ddot{x}_{\rm L} = -T \sin \gamma, \\ m_{\rm L} \ddot{z}_{\rm L} = T \cos \gamma - m_{\rm L} g. \end{cases}$$

$$(4)$$

将式(4)代入式(3),可以解出T和ÿ的具体表达式为

$$\begin{cases} T = \frac{m_{\rm L}(-F_{\rm x}\sin\gamma + F_{\rm z}\cos\gamma + LM_{\rm Q}\dot{\gamma}^2)}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}}, \\ \ddot{\gamma} = -\frac{1}{m_{\rm Q}L} \left(F_{\rm x}\cos\gamma + F_{\rm z}\sin\gamma\right). \end{cases}$$
(5)

将式(5)中的T代回式(4),并经过整理可以得到四旋翼 飞行器吊挂飞行的动态模型:

$$\begin{cases} m_{\rm Q} \ddot{x}_{\rm Q} = \\ F \sin(\gamma - \theta) \cos \gamma - \\ \frac{m_{\rm Q} \sin \gamma}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}} F \cos(\gamma - \theta) + \frac{m_{\rm Q} m_{\rm L} \sin \gamma}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}} L \dot{\gamma}^2, \\ m_{\rm Q} \ddot{z}_{\rm Q} = \\ F \sin(\gamma - \theta) \sin \gamma - m_{\rm Q} g + \\ \frac{m_{\rm Q} \cos \gamma}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}} F \cos(\gamma - \theta) - \frac{m_{\rm Q} m_{\rm L} \cos \gamma}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}} L \dot{\gamma}^2, \\ m_{\rm Q} L \ddot{\gamma} = -F \sin(\gamma - \theta). \end{cases}$$
(6)

当假设1成立时,式(1b)为(F, $\theta$ )到( $F_{nx}$ , $F_{ny}$ )一一 对应非线性映射.因此为便于之后的分析,可以通过 式(1b)将(F, $\theta$ )替换为( $F_{nx}$ , $F_{ny}$ )作为系统输入设计控 制器.则式(6)可以改写为

$$\begin{cases}
m_{\rm Q}\ddot{x}_{\rm Q} = F_{\rm nx}\cos\gamma - \frac{m_{\rm Q}\sin\gamma}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}}F_{\rm ny+} \\
\frac{m_{\rm Q}m_{\rm L}\sin\gamma}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}}L\dot{\gamma}^{2}, \\
m_{\rm Q}\ddot{z}_{\rm Q} = F_{\rm nx}\sin\gamma + \frac{m_{\rm Q}\cos\gamma}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}}F_{\rm ny} - \\
\frac{m_{\rm Q}m_{\rm L}\cos\gamma}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}}L\dot{\gamma}^{2} - m_{\rm Q}g, \\
m_{\rm Q}L\ddot{\gamma} = -F_{\rm nx}.
\end{cases}$$
(7)

在如式(7)所示的动力学模型中,系统参数 $m_Q$ ,  $m_L$ 和L为已知恒值,状态量 $(x_Q, \dot{x}_Q, z_Q, \dot{z}_Q, \gamma, \dot{\gamma})$ 为 可测量的变量, $(F_{nx}, F_{ny})$ 为系统输入.

# 3 基于能量方法的控制器设计(Energy-based controller design)

基于能量的控制方法现目前已被广泛应用于桥式 吊车等欠驱动系统<sup>[13]</sup>.本文将对四旋翼无人机吊挂系 统的能量变化进行分析,并利用系统动能的储能函数 来构建李雅普诺夫候选函数,设计控制器,并在此基 础上进行稳定性分析.

# 3.1 能量函数构建(Energy storage function construction)

对于式(7)所示的吊挂系统,考虑四旋翼无人机和 吊挂物体的动能:

$$\begin{cases} E_{\rm Q} = \frac{1}{2} m_{\rm Q} (\dot{x}_{\rm Q}^2 + \dot{z}_{\rm Q}^2), \\ E_{\rm L} = \frac{1}{2} m_{\rm L} (\dot{x}_{\rm L}^2 + \dot{z}_{\rm L}^2). \end{cases}$$
(8)

对式(8)两边同时求时间的一阶导数得到

$$\begin{cases} \dot{E}_{\rm Q} = \dot{x}_{\rm Q}(m_{\rm Q}\ddot{x}_{\rm Q}) + \dot{z}_{\rm Q}(m_{\rm Q}\ddot{z}_{\rm Q}), \\ \dot{E}_{\rm L} = \dot{x}_{\rm L}(m_{\rm L}\ddot{x}_{\rm L}) + \dot{z}_{\rm L}(m_{\rm L}\ddot{z}_{\rm L}). \end{cases}$$
(9)

将式(4)代入式(9),并进行整理何以得到

$$\dot{E}_{\rm L} = \dot{x}_{\rm Q}(-T\sin\gamma) + \dot{z}_{\rm Q}(T\cos\gamma - m_{\rm L}g) - m_{\rm L}Lg\dot{\gamma}\sin\gamma.$$
(10)

注意到若以摆角为零时的位置为零势能面,则吊挂物体的势能可以表示为

$$E_{\rm Lp} = Lm_{\rm L}g(1 - \cos\gamma). \tag{11}$$

对式(11)两边同时求时间的一阶导数得到

$$\dot{E}_{\rm Lp} = Lm_{\rm L}\dot{\gamma}g\sin\gamma.$$
 (12)

由此,定义针对吊挂物体的能量函数*E*<sup>'</sup><sub>L</sub>,具体表达式为

$$E'_{\rm L} = E_{\rm L} + E_{\rm Lp}.$$
 (13)

对式(13)两边同时求时间的一阶导数可以得到

$$\dot{E}'_{\rm L} = \dot{x}_{\rm Q}(-T\sin\gamma) + \dot{z}_{\rm Q}(T\cos\gamma - m_{\rm L}{\rm g}).$$
(14)

#### 3.2 控制器设计(Controller design)

定义误差 $e_x = x_Q - x_d$ ,  $e_z = z_Q - z_d$ , 其中 $(x_d, z_d)$ 为四旋翼无人机的目标位置, 且满足 $\dot{x}_d = 0$ ,  $\dot{z}_d = 0$ . 选取李雅普诺夫候选函数

$$V(t) = k_{\rm Q} E_{\rm Q} + k_{\rm L} E_{\rm L}' + \frac{1}{2} k_{\rm p} (e_{\rm x}^2 + e_{\rm z}^2).$$
(15)

显然V(t)是关于 $e_x, \dot{x}_Q, e_z, \dot{z}_Q, \gamma, \dot{\gamma}$ 的正定函数. 对 V(t)两边同时求时间的一阶求导,并整理得到

$$V(t) = \dot{x}_{\rm Q}(k_{\rm Q}F_{\rm x} + (k_{\rm Q} - k_{\rm L})T\sin\gamma + k_{\rm p}e_{\rm x}) + \dot{z}_{\rm Q}(k_{\rm Q}F_{\rm z} - (k_{\rm Q} - k_{\rm L})T\cos\gamma + k_{\rm p}e_{\rm z} - (k_{\rm Q}m_{\rm Q} + k_{\rm L}m_{\rm L})g).$$
(16)

要使 $\dot{V}(t) \leq 0$ ,只需要设计控制器使得

$$\begin{cases} k_{\rm Q} F_{\rm x} + (k_{\rm Q} - k_{\rm L}) T \sin \gamma + k_{\rm p} e_{\rm x} = -k \dot{x}_{\rm Q}, \\ k_{\rm Q} F_{\rm z} - (k_{\rm Q} - k_{\rm L}) T \cos \gamma + k_{\rm p} e_{\rm z} - \\ (k_{\rm Q} m_{\rm Q} + k_{\rm L} m_{\rm L}) g = -k \dot{z}_{\rm Q}. \end{cases}$$
(17)

根据式(5)中T的表达式和式(1a)-(1b)可以整理 从而有 得到

$$\begin{cases} k_{\rm Q}F_{\rm nx}\cos\gamma - k_{\rm M}F_{\rm ny}\sin\gamma + \\ \frac{(k_{\rm Q} - k_{\rm L})m_{\rm Q}m_{\rm L}}{M}L\dot{\gamma}^{2}\sin\gamma = -A, \\ k_{\rm Q}F_{\rm nx}\sin\gamma + k_{\rm M}F_{\rm ny}\cos\gamma - \\ \frac{(k_{\rm Q} - k_{\rm L})m_{\rm Q}m_{\rm L}}{M}L\dot{\gamma}^{2}\cos\gamma = -B, \end{cases}$$
(18)

其中:

$$\begin{cases}
A = k_{\rm p}e_{\rm x} + k\dot{x}_{\rm Q}, \\
B = k_{\rm p}e_{\rm z} + k\dot{z}_{\rm Q} - (m_{\rm Q}k_{\rm Q} + m_{\rm L}k_{\rm L})g, \\
M = m_{\rm Q} + m_{\rm L}, \\
k_{\rm M} = \frac{m_{\rm Q}k_{\rm Q} + m_{\rm L}k_{\rm L}}{M}.
\end{cases}$$
(19)

将式(18)看作关于*F*<sub>nx</sub>和*F*<sub>ny</sub>的方程组, 解之即得 到控制器的具体表达式形式为

$$\begin{cases} F_{\rm nx} = \frac{1}{k_{\rm Q}} (-A\cos\gamma - B\sin\gamma), \\ F_{\rm ny} = \frac{1}{k_{\rm M}} (A\sin\gamma - B\cos\gamma + \frac{(k_{\rm Q} - k_{\rm L})m_{\rm Q}m_{\rm L}}{M}L\dot{\gamma}^2). \end{cases}$$
(20)

**注** 1 根据能量函数的设计可以较直观地看出,  $k_Q$  和 $k_L$ 分别影响"飞行器位置"和"吊挂负载摆动"在控制器中的比重. 也即 $k_L - k_Q$ 增大,则"减摆作用"在整个控制器中的比重增大,反之该比重则减小. 同时注意到,当控制器参数选取 $k_Q = k_L$ 时,如式(24)所示的控制器将简化为简单的PD控制器,  $k_p$ 与k分别为比例项与微分项的系数.

### 4 稳定性分析(Stability analysis)

**定理1** 对于如式(7)所示的平面四旋翼无人机 吊挂系统,式(20)中的控制器可以使得四旋翼无人机 渐近收敛到目标位置,同时使得摆角渐近收敛到0,即

- $\lim_{t \to \infty} [x_{\rm Q} \ \dot{x}_{\rm Q} \ z_{\rm Q} \ \dot{z}_{\rm Q} \ \gamma \ \dot{\gamma}] = [x_{\rm d} \ 0 \ z_{\rm d} \ 0 \ 0].$
- 证 将式(20)代入式(16)可以得到

$$V(t) = -k(\dot{x}_{\rm Q}^2 + \dot{z}_{\rm Q}^2) \leqslant 0.$$
 (21)

由此可知 $V(t) \in L_{\infty}$ ,则 $e_{x}(t), e_{z}(t), \dot{x}_{Q}(t), \dot{z}_{Q}(t), \dot{\gamma}(t) \in L_{\infty}$ ,又由假设1可知 $\gamma(t) \in L_{\infty}$ .

下面将利用拉塞尔不变性原理[14]证明定理1.

首先, 定义一个集合

$$\Omega = \{q | \dot{V}(t) = 0\},$$

其中 $q = [x_Q \dot{x}_Q z_Q \dot{z}_Q \gamma \dot{\gamma}]$ 为系统(7)的状态变量. 则在 $\Omega$ 中:

$$\begin{cases} \dot{x}_{\rm Q} = 0, \\ \dot{z}_{\rm Q} = 0, \end{cases}$$
(22)

,\_\_\_\_ ,

$$\ddot{x}_{Q} = 0,$$

$$\ddot{z}_{Q} = 0.$$
(23)

将式(23)代入式(7)可以得到

$$\begin{cases} 0 = F_{\rm nx} \cos \gamma - \frac{m_{\rm Q} \sin \gamma}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}} F_{\rm ny} + \\ \frac{m_{\rm Q} m_{\rm L} \sin \gamma}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}} L \dot{\gamma}^2, \\ 0 = F_{\rm nx} \sin \gamma + \frac{m_{\rm Q} \cos \gamma}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}} F_{\rm ny} - \\ \frac{m_{\rm Q} m_{\rm L} \cos \gamma}{m_{\rm Q} + m_{\rm L}} L \dot{\gamma}^2 - m_{\rm Q} g. \end{cases}$$

$$(24)$$

将式(24)看作关于 $F_{nx}$ 和 $F_{ny}$ 的方程组, 解之可以得到  $F_{nx}$ 和 $F_{ny}$ 的具体表达式为

$$\begin{cases} F_{\rm nx} = m_{\rm Q}g\sin\gamma, \\ F_{\rm ny} = m_{\rm L}L\dot{\gamma}^2 + Mg\cos\gamma. \end{cases}$$
(25)

再将式(25)代回式(7)的第3个式子可以得到

$$L\ddot{\gamma} = -g\sin\gamma. \tag{26}$$

由式(20)与式(25)可以得到

$$\begin{cases} k_{\rm Q}m_{\rm Q}g\sin\gamma = -A\cos\gamma - B\sin\gamma, \\ k_{\rm M}m_{\rm L}L\dot{\gamma}^2 + k_{\rm M}Mg\cos\gamma = \\ A\sin\gamma - B\cos\gamma + \frac{(k_{\rm Q} - k_{\rm L})m_{\rm Q}m_{\rm L}}{M}L\dot{\gamma}^2. \end{cases}$$
(27)

将式(27)看作关于A和B的方程组,可以求出A和B的 具体表达式为

$$\begin{cases}
A = k_{\rm L} m_{\rm L} g \sin \gamma \cos \gamma + k_{\rm L} m_{\rm L} L \dot{\gamma}^2 \sin \gamma, \\
B = -k_{\rm Q} m_{\rm Q} g - k_{\rm L} m_{\rm L} g \cos^2 \gamma - \\
k_{\rm L} m_{\rm L} L \dot{\gamma}^2 \cos \gamma.
\end{cases}$$
(28)

对式(28)两边同时求时间的一阶导数,并经过整理可 以得到

$$\begin{cases} \dot{A} = k_{\rm L} m_{\rm L} \dot{\gamma} (L \dot{\gamma}^2 \cos \gamma + g - 4g \sin^2 \gamma), \\ \dot{B} = k_{\rm L} m_{\rm L} \dot{\gamma} \sin \gamma (4g \cos \gamma + L \dot{\gamma}^2). \end{cases}$$
(29)

因为

$$\begin{cases} \dot{A} = k_{\rm p} \dot{x}_{\rm Q} + k \ddot{x}_{\rm Q} = 0, \\ \dot{B} = k_{\rm p} \dot{z}_{\rm Q} + k \ddot{z}_{\rm Q} = 0, \end{cases}$$
(30)

所以

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(L\dot{\gamma}^2\cos\gamma + g - 4g\sin^2\gamma) = 0, \\ \dot{\gamma}\sin\gamma(4g\cos\gamma + L\dot{\gamma}^2) = 0. \end{cases}$$
(31)

为证明q = 0是 $\Omega$ 中最大的不变集,下面利用反证 法证明 $\dot{\gamma} = 0$ :

首先,假设在集合
$$\Omega$$
中存在某一点 $q_A$ ,满足 $\dot{\gamma} \neq 0$ .

则此时由式(31)可以得到

$$\begin{cases} 0 = L\dot{\gamma}^2 \cos\gamma + g - 4g\sin^2\gamma, \\ 0 = \sin\gamma(4g\cos\gamma + L\dot{\gamma}^2). \end{cases}$$
(32)

注意到其中 $4g\cos\gamma + L\dot{\gamma}^2 > 0$ ,则

$$\sin \gamma = 0. \tag{33}$$

由假设1可得 $\gamma = 0$ ,所以由(31)中的第一个式子可以 得到

$$\dot{\gamma}(L\dot{\gamma}^2 + \mathbf{g}) = 0. \tag{34}$$

因为 $L\dot{\gamma}^2 + g > 0$ ,所以有 $\dot{\gamma} = 0$ .这与原假设矛盾,所 以原假设不成立,即在集合 $\Omega$ 中总有 $\dot{\gamma} = 0$ ,所以 $\ddot{\gamma} = 0$ ,  $\gamma = 0$ .

将式(35)和式(36)代入式(28)可以得到

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = -k_{\rm Q}m_{\rm Q}g - k_{\rm L}m_{\rm L}g. \end{cases}$$
(35)

由式(35)和式(19)可以得到 $e_x = 0, e_z = 0.$ 

综上分析,在集合 $\Omega$ 中,q = 0,所以由拉塞尔不变 性原理可得定理1成立.

由此,本文所设计的控制方法具有如下特点: 1)所依据的非线性动力学模型并未进行线性化处理 或过多的简化,可以较为真实地反映实际四旋翼无人 机吊挂飞行系统的动力学特性.2)本文通过将控制器 输入信号重新分解(将(*F*<sub>x</sub>,*F*<sub>z</sub>)重新分解为(*F*<sub>nx</sub>,*F*<sub>ny</sub>)) 等手段,使控制器结构更加简化,更易于在小型四旋 翼无人机的机载控制器上等计算能力受限的情况下 实现.3)本文利用李雅普诺夫稳定性理论和拉塞尔不 变性原理对控制器的稳定性进行了证明,从而保证了 该控制方法的安全性和可靠性.

# 5 数值仿真(Numerical simulation)

为测试控制器(20)对于四旋翼无人机吊挂飞行系统的控制性能,在MATLAB/SIMULINK环境下,进行了镇定控制和调节控制的数值仿真,由旋翼的升力和 姿态解算出对应的旋翼转速以验证控制器的合理性和可行性.并通过与LQR控制方法进行的比较,突出 了本控制策略的优势.

无人机吊挂系统的相关参数设定为[15]

$$\rho = 3.84 \times 10^{-7}, I_{\theta} = 4.9 \times 10^{-3}, l = 0.225,$$

 $L = 0.9, m_{\rm Q} = 0.468, m_{\rm L} = 0.068, g = 9.81.$ 

其中:  $I_{\theta}$ 为四旋翼无人机俯仰方向的转动惯量, l为每个旋翼轴心到四旋翼无人机中心的距离,  $\rho$ 满足

$$\begin{bmatrix} F \\ \tau_{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & \rho & \rho & \rho \\ -l\rho & 0 & l\rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}.$$
 (36)

其中:  $\tau_{\theta}$ 为四旋翼无人机俯仰方向的力矩,  $n_i$ , i = 1, 2, 3, 4 为四旋翼无人机4个旋翼的转速. 四旋翼无人机 俯仰方向的姿态和力矩之间的关系为

$$\ddot{\theta}I_{\theta} = \tau_{\theta}.$$
 (37)

仿真结果1 镇定控制数值仿真.

给定上述参数,并选取系统状态初值 $x_Q(0) = 0$ ,  $z_Q(0) = 0$ ,  $\gamma(0) = 20^\circ$ .

将控制器(20)应用于四旋翼无人机吊挂系统(7), 根据注1的分析结合对飞行器位置控制与减摆作用的 综合考虑,并考虑到系统输入幅值的约束,选取控制 器参数如下:

$$k_{\rm Q} = 0.5, \ k_{\rm L} = 5, \ k_{\rm p} = 0.3, \ k = 0.5.$$

则此时可以得到控制效果如图2-4所示,其中:图2描述了系统状态量随时间变化的曲线,图3描述了系统控制输入随时间变化的曲线,图4描述了由输入解算得到的四旋翼无人机旋翼转速随时间的变化曲线.图像中:实线代表本文所设计的控制的数据,点线为LQR控制器的数据.从图2-3中可以看出本文所设计的控制器可以在较短的时间内达到抗摆的目标,摆角震荡的衰减速度明显快于LQR控制的控制效果.期间四旋翼无人机的位置变化虽然较LQR控制略大,但也能较快速的回到平衡位置.



#### 图 2 镇定控制:系统状态







图 4 填走空前: 无入机旋翼转速 Fig. 4 Angular rates of quadrotor UAV rotors of stabilization control

**仿真结果 2** 调节控制数值仿真. 系统状态初值选取

$$x_{\mathbf{Q}}(0) = 0, \ z_{\mathbf{Q}}(0) = 0, \ \gamma(0) = 0^{\circ}.$$

设定目标位置为 $x_d = 2, z_d = 1.$ 

根据与仿真1相同原则,选取控制器参数如下:

 $k_{\rm Q} = 0.5, \ k_{\rm L} = 5, \ k_{\rm p} = 0.3, \ k = 0.5.$ 

则此时可以得到控制效果如图5-7所示,其中: 图5描述了系统状态量随时间变化的曲线,图6描述了 系统控制输入随时间变化的曲线,图7描述了由输入 解算得到的四旋翼无人机旋翼转速随时间的变化曲 线.图中:实线代表本文所设计的控制的数据,点线为 LQR控制器的数据.从图5-7中可以看出本文所设计 控制器在较短的时间内使四旋翼无人机从初始位置 到达了目标位置,并且期间四旋翼无人机的吊挂负载 摆角变化明显比LQR控制器更小.

![](_page_5_Figure_11.jpeg)

![](_page_5_Figure_12.jpeg)

![](_page_6_Figure_2.jpeg)

图 7 调节控制:无人机旋翼转速

Fig. 7 Angular rates of quadrotor UAV rotors of regulation control

注意到由于仿真给定的初始值有较大的扰动,本 文所设计的控制器的系统输入表现出较大的初始值 (如图3,6所示),但是输入幅值的变化始终保持在一个 合理的范围之内,并且由控制输入得到的无人机4个 旋翼的转速变化也在合理范围内(如图4,7所示).仿真 结果通过与LQR控制算法的对比,表明本文所设计的 控制器可以较为快速地实现四旋翼无人机吊挂飞行 系统无人机定位,负载抗摆的控制效果.

# 6 结论(Conclusions)

针对四旋翼无人机吊挂飞行系统,本文建立了平 面情况下的动力学模型,并在此基础上提出了一种基 于能量方法的控制器,基于李雅普诺夫的分析方法和 拉塞尔定理分析证明了控制误差的收敛性和闭环系 统的稳定性.与LQR控制算法的对比仿真结果表明该 控制器能够实现在对四旋翼无人机的准确定位的同 时快速抗摆的控制效果.

后续工作将对本文所设计的控制方法进行实验测 试,并且本论文只考虑了俯仰方向,后续的工作包括 将本控制方法扩展到包含俯仰方向和滚转方向的四 旋翼无人机吊挂飞行系统模型.

#### 参考文献(References):

- QI Wantao, CHEN Renliang. Stability and control characteristic analysis for flight of helicopter with slung-load [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2011, 43(3): 406 – 412.
   (齐万涛,陈仁良.直升机吊挂飞行稳定性和操纵性分析 [J]. 南京航 空航天大学学报, 2011, 43(3): 406 – 412.)
- [2] MA Chao, CAO Yihua, XU Zhongda. Numerical simulation of helicopter slung-load flow field and fins design [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2012, 38(5): 654 658.
  (马超,曹义华,徐忠达.直升机吊挂流场数值模拟与尾鳍设计分析 [J]. 北京航空航天大学学报, 2012, 38(5): 654 658.)
- [3] SREENATH K, MICHAEL N, KUMAR V. Trajectory generation and control of a quadrotor with a cable-suspended load—A differentiallyflat hybrid system [C] //Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation (ICRA). Karlsruhe: IEEE, 2013: 4888 – 4895.
- [4] SREENATH K, LEE T, KUMAR V. Geometric control and differential flatness of a quadrotor UAV with a cable-suspended load [C]

//Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control. Firenze: IEEE, 2013: 2269 – 2274.

- [5] PALUNKO I, FIERRO R, CRUZ P. Trajectory generation for swingfree maneuvers of a quadrotor with suspended payload: a dynamic programming approach [C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Saint Paul, Minnesota, USA: IEEE, 2012: 2691 – 2697.
- [6] PALUNKO I, FAUST A, CRUZ P, et al. A reinforcement learning approach towards autonomous suspended load manipulation using aerial robots [C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Karlsruhe: IEEE, 2013: 4896 4901.
- [7] CRUZ P, FIERRO R. Autonomous lift of a cable-suspended load by an unmanned aerial robot [C] //The 2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA). Antibes, France: IEEE, 2014: 802 – 807.
- [8] LEE T. Geometric control of multiple quadrotor UAVs transporting a cable-suspended rigid body [C] //The 2014 IEEE 53rd Annual Conference on Decision and Control (CDC). Los Angeles, CA, USA: IEEE, 2014: 6155 – 6160.
- [9] GOODARZI F, LEE D, LEE T. Geometric stabilization of a quadrotor UAV with a payload connected by flexible cable [C] //American Control Conference (ACC). Portland, OR, USA: IEEE, 2014: 4925 – 4930.
- [10] DAI S, LEE T, BERNSTEIN D. Adaptive control of a quadrotor uav transporting a cable-suspended load with unknown mass [C] //The 2014 IEEE 53rd Annual Conference on Decision and Control (CD-C). Los Angeles, CA, USA: IEEE, 2014: 6149 – 6154.
- [11] TRACHTE J, GONZALEZ F, MCFADYEN A. Nonlinear model predictive control for a multi-rotor with heavy slung load [C] //The 2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). Orlando, FL, USA: IEEE, 2014: 1105 – 1110.
- [12] OMAR H M. Designing anti-swing fuzzy controller for helicopter slung-load system near hover by particle swarms [J]. Aerospace Science and Technology, 2013, 29(1): 223 – 234.
- [13] MA Bojun, FANG Yongchun, WANG Yutao, et al. Adaptive control for an underactuated overhead crane system [J]. Control Theory & Applications, 2008, 25(6): 1105 1109.
  (马博军, 方勇纯, 王字韬, 等. 欠驱动桥式吊车系统自适应控制 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(6): 1105 1109.)
- [14] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. Third Edition. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.
- [15] TAYEBI A, MAGILVRAY S. Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(3): 562 – 571.

#### 作者简介:

**鲜** 斌 (1975-), 男, 教授, 博士生导师, IEEE高级会员, 研究方向为非线性系统控制、无人机系统、实时控制系统等, E-mail: xbin@tju.edu.cn;

**张 旭** (1983--), 男, 博士研究生, 研究方向为无人机的非线性控制研究, E-mail: xu\_zhang@tju.edu.cn;

**杨** 森 (1991-), 男, 硕士研究生, 研究方向为无人机的非线性控制研究, E-mail: yangsen1991@tju.edu.cn.