

多尺度正负反馈交替论模型及其应用

林屹^{1,2,3†}, 严洪森^{1,2}

(1. 东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096;

2. 东南大学 复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室, 江苏 南京 210096;

3. 南京信息工程大学 信息与控制学院, 江苏 南京 210044)

摘要: 结合物质系统由量变到质变而呈现“平稳→剧变→再平稳→再剧变”这一变化规律, 基于正负反馈交替论思想, 提出了多尺度正负反馈交替论的数学模型. 该模型引入等效正、负反馈作用, 以状态变化速度作为第一尺度、状态变化加速度作为第二尺度进行等效正、负反馈作用的判定, 根据状态变化剧烈程度以及剧烈变化趋势, 将状态稳定性分离, 以动力学方程形式表述物质系统的上述变化规律. 该模型建立方法简单、实施方便, 无需系统的内在机理或先验知识, 是一种基于观测数据的通用模型. 将该模型应用于时间序列预测, 分别以空气质量指数AQI和大气主要污染物PM2.5数据为基础, 进行系统建模及预报的仿真研究. 结果表明, 该模型能较准确反映系统的变化规律, 能有效进行预报, 且精度高, 为具有量变引起质变而呈现出这一变化规律的复杂系统建模及预测提供了一种新颖而有效的手段.

关键词: 多尺度正负反馈交替论; 多维泰勒网; 时间序列; 建模; 预报

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A

The model of multi-scale alternate positive negative feedbacks and its applications

LIN Yi^{1,2,3†}, YAN Hong-sen^{1,2}

(1. School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China;

2. Key Laboratory of Measurement and Control of Complex Systems of Engineering, Ministry of Education, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China;

3. College of Information and Control, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing Jiangsu 210044, China)

Abstract: Combining with the material systems whose state changes from stabilization to revulsion and then re-stabilization to re-revulsion due to quantitative and qualitative changes, the mathematical model of multi-scale alternate positive negative feedbacks is proposed based on ideas of the alternate positive negative feedbacks. The equivalent positive and negative feedbacks are introduced into the model and are discriminated by the state change speed as the first scale and its acceleration as the second scale. The states stability are divided according to the change intensity of the state and the trend of changes, and the above mentioned variation is expressed in the form of dynamic equations. The model establishing method is simple and easy to implement, and it is a general model based on observation data without needing the internal mechanism of the system or priori knowledge. The model is applied in time series forecast, and based on the air quality index of AQI data and the index of PM2.5 which is the main atmospheric pollutants, the model is established and used to forecast respectively. The results show that the model can reflect the variation of the system accurately and be effectively applied to forecast and has high precision. The model provides a novel and effective means for modeling and forecasting of the complex system whose state changes conform to the above law.

Key words: multi-scale alternate positive negative feedbacks; multi-dimensional Taylor network; time series; model buildings; forecasting

1 引言(Introduction)

物质系统的状态变化均遵循着一定的规律. 对于系统状态变化规律的研究是非线性系统理论的一个重要组成部分. 由于建模方法的不同, 系统模型的类型也有所不同. 自回归滑动平均 (autoregressive moving average, ARMA)、非线性自回归滑动平均 (nonlinear autoregressive moving average, NARMA) 等方法建立的是系统的统计模型^[1-2]. 神经网络^[3-4]建模时往往受到符号函数、sigmoid函数或径向基函数的限制. 而且, 从神经网络的函数逼近定理看, 一个3层神经网络能很好地逼近定义在有界闭子集上的任意非线性实值连续函数, 但不能保证在有界闭子集之外也能很好地进行逼近, 所以神经网络难于逼近定义在整个状态空间(即非有界闭子集)上的一般非线性动力学系统. 多维泰勒网可以在其有界闭区域内任意逼近一般的非线性系统, 也可以表示定义在整个状态空间(即非有界闭子集)上的具有多项式结构的非线性动力学系统, 为建立基于观测数据的系统显性动力学模型提供了一种有效手段^[5-6]. 从目前的研究进展来看, 结合系统状态由量变到质变而呈现的“平稳→剧变→再平稳→再剧变”这一变化规律建立系统动力学模型的研究成果还很少. 虽然也有一些文献结合此变化规律进行了研究^[7-9], 然而这些文献或是进行定性讨论^[8], 或是建立几何模型^[7,9], 均未从建立系统动力学方程的角度反映这一变化规律.

物质系统的这种状态变化规律在诸如地震、空气污染、洪涝灾害等的形成和发生中表现得尤为突出. 如果能在灾害尚未发生时及时进行预测, 将有可能避免灾害的发生, 或将灾害发生带来的损失尽可能降低. 很多学者已将神经网络、小波理论、模糊理论、突变理论、混沌理论等应用于不同领域的灾害预报^[10-19]. 然而, 结合系统状态这一变化规律建立系统动力学模型进行预报的研究成果还很少.

鉴于此, 严洪森^[20]经过多年方法论的研究, 提出了正负反馈交替论: 即事物的变化往往都具有由基于负反馈的量变到基于正反馈的质变的过程, 量变到一定程度引起质变, 产生新质, 然后, 在新质的基础上又开始新的量变. 于是, 质变量变交替出现, 与此相应, 正负反馈也交替出现.

在这一思想基础上, 本文提出了多尺度正负反馈交替论的数学模型及其建立方法. 该模型不从系统内在机理出发, 而是基于系统内在机理的外部表征数据, 在多维泰勒网方法的基础上, 引入状态控制向量, 采用状态变化速度以及状态变化加速度分别作为第一、第二尺度进行等效正负反馈的划分, 从而将系统状态稳定性分离, 建立系统的动力学模型, 是一种将等效反馈思想与物质系统的“平稳→剧变→再平稳→再剧变”这一变化规律相结合的建模方法. 在此基础

上, 本文分别针对城市的空气质量指标AQI指数和大气主要污染物PM2.5污染指数进行仿真研究, 在实现准确预报的同时, 建立系统具有量变质变特性的动力学模型. 算例实验表明, 该模型无需复杂的系统机理和先验知识, 可以将系统量变质变这一普遍规律以多项式结构的动力学模型形式加以表达, 特别是针对数据呈现大幅度剧烈变化的时间序列预测, 具有更高的预测精确, 可应用于灾害预报.

2 多尺度正负反馈交替论模型(The model of multi-scale alternate positive negative feedbacks)

物质系统在运行过程中, 其状态演变规律可以通过该系统的某一状态的变化, 以外部数据的形式表现. 所谓多尺度, 就是将状态的变化速度和变化加速度分别作为等效正、负反馈的第一和第二界定尺度, 根据状态变化剧烈程度以及剧烈变化趋势, 将状态稳定性分离. 平稳期内, 状态变化速度或变化加速度呈现小幅度波动; 剧变期内, 由于内部能量积累, 或受到外部激励, 状态变化速度或变化加速度突然增大, 产生大幅度变化. 而这种剧变期内状态变化速度以及变化加速度大幅度增加的现象, 可以视为对系统加入阶跃信号后的等效正反馈作用; 随着能量的消散, 或外部激励的撤销, 状态变化速度以及变化加速度的变化幅度减小, 视为等效阶跃信号的撤销, 状态变化速度回归到阈值范围之内, 再次呈现小范围的波动, 进入新的平稳期. 这种将状态变化速度和变化加速度分别作为等效正反馈界定第一、第二尺度的正负反馈交替论模型称为多尺度正负反馈交替论模型.

系统状态变化速度, 或者状态变化加速度的大幅度变化, 均源于系统内部能量的爆发, 或外部激励的加入, 随着能量的消散或激励的撤销, 状态变化速度或者变化加速度回归平缓, 这种等效正反馈作用可用死区叠加函数表示.

对于由系统的某一参数构成的时间序列而言, 可令状态变化速度表示为 Δx , 则令状态变化速度的变化量, 即变化加速度表示为 $\Delta^2 x$.

定义1 状态变化速度死区叠加函数

$$\text{sdez}(\Delta x, \alpha_{BP}, \alpha_{EP}, \alpha_{BN}, \alpha_{EN}) = \begin{cases} 1, & \alpha_{BP} < \Delta x \leq \alpha_{EP}, \\ 0, & \text{其他}, \\ -1, & \alpha_{EN} < \Delta x \leq \alpha_{BN}, \end{cases} \quad (1)$$

其中: Δx 为状态变化速度; α_{BP} 为能量爆发时变化速度的正向初值, 即正反馈的状态变化速度正向起点; α_{BN} 为能量爆发时变化速度的负向初值, 即正反馈的状态变化速度负向起点. 当系统状态变化速度达到正向阈值 α_{BP} (或负向阈值 α_{BN})时, 正反馈起作用. 而 α_{EP} 称为增量的正向终值, α_{EN} 称为增量的负向终值,

表示当系统能量爆发后系统状态的变化速度达到更高的正向数值 α_{EP} (或负向数值 α_{EN})后, 系统能量释放结束, 正反馈随之消失. 该变化速度死区叠加函数示意图如图1所示.

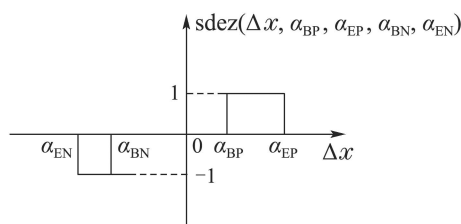


图 1 变化速度死区叠加函数

Fig. 1 Change-speed dead-zone superimposed function
 $sdez(\Delta x, \alpha_{BP}, \alpha_{EP}, \alpha_{BN}, \alpha_{EN})$

定义 2 状态变化加速度死区叠加函数

$$sdez(\Delta^2 x, \beta_{BP}, \beta_{EP}, \beta_{BN}, \beta_{EN}) = \begin{cases} 1, & \beta_{BP} < \Delta^2 x \leq \beta_{EP}, \\ 0, & \text{其他}, \\ -1, & \beta_{EN} < \Delta^2 x \leq \beta_{BN}, \end{cases} \quad (2)$$

其中状态与各参数的具体定义类似上述在定义变化速度死区叠加函数时的情况, 不同之处在于式(2)中状态与各参数是针对变化加速度进行定义, 具体如下: $\Delta^2 x$ 为状态变化加速度; β_{BP} 为能量爆发时变化加速度的正向初值, 即正反馈起作用时变化加速度的正向起点; β_{BN} 为能量爆发时变化加速度的负向初值, 即正反馈起作用时变化加速度的负向起点; 而 β_{EP} 为能量爆发结束时变化加速度的正向终值, 即正反馈作用结束时变化加速度的正向终值, β_{EN} 为能量爆发结束时变化加速度的负向终值, 即正反馈作用结束时变化加速度的负向终值. 该变化加速度死区叠加函数示意图如图2所示.

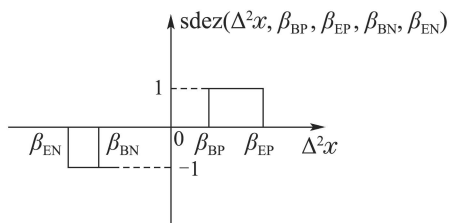


图 2 变化加速度死区叠加函数

Fig. 2 Change-acceleration dead-zone superimposed function
 $sdez(\Delta^2 x, \beta_{BP}, \beta_{EP}, \beta_{BN}, \beta_{EN})$

为建模, 提出如下定理, 并给出其证明过程.

定理 1 对于自变量为向量 x , 第1个状态变化速度死区叠加函数

$$sdez(\Delta x, \alpha_{BP1}, \alpha_{EP1}, \alpha_{BN1}, \alpha_{EN1}), \dots,$$

第 s 个状态变化速度死区叠加函数

$$sdez(\Delta x, \alpha_{BP_s}, \alpha_{EP_s}, \alpha_{BN_s}, \alpha_{EN_s}),$$

第1个状态变化加速度死区叠加函数

$$sdez(\Delta^2 x, \beta_{BP1}, \beta_{EP1}, \beta_{BN1}, \beta_{EN1}), \dots,$$

第 v 个状态变化加速度死区叠加函数

$$sdez(\Delta^2 x, \beta_{BP_v}, \beta_{EP_v}, \beta_{BN_v}, \beta_{EN_v})$$

的可展成泰勒级数的任意非线性函数向量 $h(\cdot)$, 有

$$h(\cdot) = g(x) + \text{diag}\{\theta_{\alpha 1}\} \cdot sdez(\Delta x, \alpha_{BP1}, \alpha_{EP1}, \alpha_{BN1}, \alpha_{EN1}) + \dots + \text{diag}\{\theta_{\alpha s}\} sdez(\Delta x, \alpha_{BP_s}, \alpha_{EP_s}, \alpha_{BN_s}, \alpha_{EN_s}) + \text{diag}\{\theta_{\beta 1}\} sdez(\Delta^2 x, \beta_{BP1}, \beta_{EP1}, \beta_{BN1}, \beta_{EN1}) + \dots + \text{diag}\{\theta_{\beta v}\} \cdot sdez(\Delta^2 x, \beta_{BP_v}, \beta_{EP_v}, \beta_{BN_v}, \beta_{EN_v}), \quad (3)$$

其中: $g(x)$ 为向量 x 的函数, $\theta_{\alpha 1}, \dots, \theta_{\alpha s}$ 为第1个至第 s 个分别与状态变化速度死区叠加函数 $sdez(\Delta x, \alpha_{BP1}, \alpha_{EP1}, \alpha_{BN1}, \alpha_{EN1}), \dots, sdez(\Delta x, \alpha_{BP_s}, \alpha_{EP_s}, \alpha_{BN_s}, \alpha_{EN_s})$ 系数相关的向量, $\theta_{\beta 1}, \dots, \theta_{\beta v}$ 为第1个至第 v 个分别与状态变化加速度死区叠加函数

$$sdez(\Delta^2 x, \beta_{BP1}, \beta_{EP1}, \beta_{BN1}, \beta_{EN1}), \dots, sdez(\Delta^2 x, \beta_{BP_v}, \beta_{EP_v}, \beta_{BN_v}, \beta_{EN_v})$$

系数相关的向量, 而 $\text{diag}\{\cdot\}$ 指的是将相应向量转换成对角元素为对应向量元素的相应对角矩阵.

证 设

$$z_{\alpha 1} = sdez(\Delta x, \alpha_{BP1}, \alpha_{EP1}, \alpha_{BN1}, \alpha_{EN1}), \dots, z_{\alpha s} = sdez(\Delta x, \alpha_{BP_s}, \alpha_{EP_s}, \alpha_{BN_s}, \alpha_{EN_s}), z_{\beta 1} = sdez(\Delta^2 x, \beta_{BP1}, \beta_{EP1}, \beta_{BN1}, \beta_{EN1}), \dots, z_{\beta v} = sdez(\Delta^2 x, \beta_{BP_v}, \beta_{EP_v}, \beta_{BN_v}, \beta_{EN_v}).$$

将 $h(\cdot)$ 进行泰勒展开, 可得到

$$h(\cdot) = g_0 + \text{diag}\{z_{\alpha 1}\} \theta_{\alpha 1,1} + \text{diag}^2\{z_{\alpha 1}\} \theta_{\alpha 1,2} + \dots + \text{diag}\{z_{\alpha s}\} \theta_{\alpha s,1} + \text{diag}^2\{z_{\alpha s}\} \theta_{\alpha s,2} + \dots + \text{diag}\{z_{\beta 1}\} r_{\beta 1,1} + \text{diag}^2\{z_{\beta 1}\} r_{\beta 1,2} + \dots + \text{diag}\{z_{\beta v}\} r_{\beta v,1} + \text{diag}^2\{z_{\beta v}\} r_{\beta v,2} + \dots, \quad (4)$$

其中:

$$z_{\alpha 1} = (z_{\alpha 1,1}, z_{\alpha 1,2}, \dots, z_{\alpha 1,n})^T, \dots, z_{\alpha s} = (z_{\alpha s,1}, z_{\alpha s,2}, \dots, z_{\alpha s,n})^T, z_{\beta 1} = (z_{\beta 1,1}, z_{\beta 1,2}, \dots, z_{\beta 1,n})^T, \dots, z_{\beta v} = (z_{\beta v,1}, z_{\beta v,2}, \dots, z_{\beta v,n})^T, g_0 = (g_{0,1}, g_{0,2}, \dots, g_{0,n})^T,$$

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha 1,1} &= (\theta_{\alpha 1,1,1}, \theta_{\alpha 1,1,2}, \dots, \theta_{\alpha 1,1,n})^T, \\ \theta_{\alpha 1,2} &= (\theta_{\alpha 1,2,1}, \theta_{\alpha 1,2,2}, \dots, \theta_{\alpha 1,2,n})^T, \dots, \\ \theta_{\alpha s,1} &= (\theta_{\alpha s,1,1}, \theta_{\alpha s,1,2}, \dots, \theta_{\alpha s,1,n})^T, \dots, \\ r_{\beta 1,1} &= (r_{\beta 1,1,1}, r_{\beta 1,1,2}, \dots, r_{\beta 1,1,n})^T, \\ r_{\beta 1,2} &= (r_{\beta 1,2,1}, r_{\beta 1,2,2}, \dots, r_{\beta 1,2,n})^T, \dots, \\ r_{\beta v,1} &= (r_{\beta v,1,1}, r_{\beta v,1,2}, \dots, r_{\beta v,1,n})^T, \dots \end{aligned}$$

式(4)的标量形式为

$$\left\{ \begin{aligned} h_1 &= g_{0,1} + \theta_{\alpha 1,1,1} z_{\alpha 1,1} + \theta_{\alpha 1,2,1} z_{\alpha 1,1}^2 + \dots + \\ &\theta_{\alpha s,1,1} z_{\alpha s,1} + \theta_{\alpha s,2,1} z_{\alpha s,1}^2 + \dots + r_{\beta 1,1,1} z_{\beta 1,1} + \\ &r_{\beta 1,2,1} z_{\beta 1,1}^2 + \dots + r_{\beta v,1,1} z_{\beta v,1} + r_{\beta v,2,1} z_{\beta v,1}^2 + \\ &\dots, \\ h_2 &= g_{0,2} + \theta_{\alpha 1,1,2} z_{\alpha 1,2} + \theta_{\alpha 1,2,2} z_{\alpha 1,2}^2 + \dots + \\ &\theta_{\alpha s,1,2} z_{\alpha s,2} + \theta_{\alpha s,2,2} z_{\alpha s,2}^2 + \dots + r_{\beta 1,1,2} z_{\beta 1,2} + \\ &r_{\beta 1,2,2} z_{\beta 1,2}^2 + \dots + r_{\beta v,1,2} z_{\beta v,2} + r_{\beta v,2,2} z_{\beta v,2}^2 + \\ &\dots, \\ &\vdots \\ h_n &= g_{0,n} + \theta_{\alpha 1,1,n} z_{\alpha 1,n} + \theta_{\alpha 1,2,n} z_{\alpha 1,n}^2 + \dots + \\ &\theta_{\alpha s,1,n} z_{\alpha s,n} + \theta_{\alpha s,2,n} z_{\alpha s,n}^2 + \dots + r_{\beta 1,1,n} z_{\beta 1,n} + \\ &r_{\beta 1,2,n} z_{\beta 1,n}^2 + \dots + r_{\beta v,1,n} z_{\beta v,n} + r_{\beta v,2,n} z_{\beta v,n}^2 + \\ &\dots \end{aligned} \right. \quad (5)$$

根据死区叠加函数的定义, $z_{\alpha\sigma,\mu} (\sigma = 1, 2, \dots, s; \mu = 1, 2, \dots, n)$ 和 $z_{\beta w,\mu} (w = 1, 2, \dots, s; \mu = 1, 2, \dots, n)$ 的取值为0, 1或-1, 故有

$$z_{\alpha\sigma,\mu}^p = \begin{cases} +z_{\alpha\sigma,\mu}, & p \text{ 为偶数,} \\ -z_{\alpha\sigma,\mu}, & p \text{ 为奇数,} \end{cases} \quad (6)$$

$$z_{\beta w,\mu}^p = \begin{cases} +z_{\beta w,\mu}, & p \text{ 为偶数,} \\ -z_{\beta w,\mu}, & p \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad (7)$$

将 $z_{\alpha\sigma,\mu}$ 和 $z_{\beta w,\mu}$ 各项分别合并, 其中 $\mu = 1, 2, \dots, n$. 且令 $\theta_{\alpha\sigma,\mu}$ 为 $\theta_{\alpha\sigma,1,\mu}, \theta_{\alpha\sigma,2,\mu}, \dots$ 的合并项, $\theta_{\beta w,\mu}$ 为 $\theta_{\alpha\beta w,1,\mu}, \theta_{\beta w,2,\mu}, \dots$ 的合并项.

令

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\sigma} &= (\theta_{\alpha\sigma,1}, \theta_{\alpha\sigma,2}, \dots, \theta_{\alpha\sigma,n})^T, \\ \theta_{\beta w} &= (\theta_{\beta w,1}, \theta_{\beta w,2}, \dots, \theta_{\beta w,n})^T, \\ g &= g_0, \end{aligned}$$

则有如下形式:

$$\begin{aligned} h(\cdot) &= g(x) + \text{diag}\{\theta_{\alpha 1}\} z_{\alpha 1} + \dots + \\ &\text{diag}\{\theta_{\alpha s}\} z_{\alpha s} + \text{diag}(r_{\beta 1}) z_{\beta 1} + \dots + \\ &\text{diag}\{r_{\beta v}\} z_{\beta v}, \end{aligned} \quad (8)$$

即

$$\begin{aligned} h(\cdot) &= g(x) + \text{diag}\{\theta_{\alpha 1}\} \cdot \\ &\text{sdez}(\Delta x, \alpha_{BP1}, \alpha_{EP1}, \alpha_{BN1}, \alpha_{EN1}) + \dots + \\ &\text{diag}\{\theta_{\alpha s}\} \text{sdez}(\Delta x, \alpha_{BP s}, \alpha_{EP s}, \alpha_{BN s}, \alpha_{EN s}) + \\ &\text{diag}\{\theta_{\beta 1}\} \text{sdez}(\Delta^2 x, \beta_{BP1}, \beta_{EP1}, \beta_{BN1}, \beta_{EN1}) + \\ &\dots + \text{diag}\{\theta_{\beta v}\} \cdot \\ &\text{sdez}(\Delta^2 x, \beta_{BP v}, \beta_{EP v}, \beta_{BN v}, \beta_{EN v}). \end{aligned}$$

证毕.

因此, 根据上述定理, 对于一个 n 维系统, 其状态反馈则可以有以下关系:

$$\begin{aligned} u(x(k), k) &= g(x(k), k) + \text{diag}\{\theta_{\alpha 1}\} \cdot \\ &\text{sdez}(\Delta x, \alpha_{BP1}, \alpha_{EP1}, \alpha_{BN1}, \alpha_{EN1}) + \dots + \\ &\text{diag}\{\theta_{\alpha s}\} \text{sdez}(\Delta x, \alpha_{BP s}, \alpha_{EP s}, \alpha_{BN s}, \alpha_{EN s}) + \\ &\text{diag}\{\theta_{\beta 1}\} \text{sdez}(\Delta^2 x, \beta_{BP1}, \beta_{EP1}, \beta_{BN1}, \beta_{EN1}) + \\ &\dots + \text{diag}\{\theta_{\beta v}\} \cdot \\ &\text{sdez}(\Delta^2 x, \beta_{BP v}, \beta_{EP v}, \beta_{BN v}, \beta_{EN v}), \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $g(x(k), k)$ 为系统自身的状态负反馈,

$$\text{diag}\{\theta_{\alpha 1}\} \text{sdez}(\Delta x, \alpha_{BP1}, \alpha_{EP1}, \alpha_{BN1}, \alpha_{EN1}), \dots, \text{diag}\{\theta_{\alpha s}\} \text{sdez}(\Delta x, \alpha_{BP s}, \alpha_{EP s}, \alpha_{BN s}, \alpha_{EN s})$$

为采用状态变化速度作为第一衡量尺度的 s 个具有死区叠加函数性质的等效正反馈, 而

$$\text{diag}\{\theta_{\beta 1}\} \text{sdez}(\Delta^2 x, \beta_{BP1}, \beta_{EP1}, \beta_{BN1}, \beta_{EN1}), \dots, \text{diag}\{\theta_{\beta v}\} \text{sdez}(\Delta^2 x, \beta_{BP v}, \beta_{EP v}, \beta_{BN v}, \beta_{EN v})$$

为采用状态变化加速度作为第二衡量尺度的 v 个具有死区叠加函数性质的等效正反馈.

若系统动力学方程一般形式如下:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), k) + u(x(k), k), \\ y(k) = C(x(k)), \end{cases} \quad (10)$$

其中: $x(k)$ 为系统的状态向量, $y(k)$ 为系统的输出向量, C 为输出矩阵, $f(x(k), k)$ 为反映系统自身属性函数, $u(x(k), k)$ 为反映状态控制属性函数.

则基于多尺度正负反馈交替论的系统动力学方程有如下一般形式:

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathbf{x}(k+1) = \\ & \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), k) + \text{diag}\{\boldsymbol{\theta}_{\alpha 1}\} \cdot \\ & \text{sdez}(\Delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_{BP1}, \boldsymbol{\alpha}_{EP1}, \boldsymbol{\alpha}_{BN1}, \boldsymbol{\alpha}_{EN1}) + \cdots + \\ & \text{diag}\{\boldsymbol{\theta}_{\alpha s}\} \text{sdez}(\Delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_{BP s}, \boldsymbol{\alpha}_{EP s}, \boldsymbol{\alpha}_{BN s}, \boldsymbol{\alpha}_{EN s}) + \\ & \text{diag}\{\boldsymbol{\theta}_{\beta 1}\} \text{sdez}(\Delta^2 \mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}_{BP1}, \boldsymbol{\beta}_{EP1}, \boldsymbol{\beta}_{BN1}, \boldsymbol{\beta}_{EN1}) + \\ & \cdots + \text{diag}\{\boldsymbol{\theta}_{\beta v}\} \cdot \\ & \text{sdez}(\Delta^2 \mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}_{BP v}, \boldsymbol{\beta}_{EP v}, \boldsymbol{\beta}_{BN v}, \boldsymbol{\beta}_{EN v}), \\ & \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(\mathbf{x}(k)). \end{aligned} \right. \quad (11)$$

由于连续函数可以用多维泰勒网逼近^[5], 故对于一个 n 维系统, 将式(11)第 1 行中前两项合并之后, 其标量形式可写为

$$\left\{ \begin{aligned} & x_1(k+1) = \\ & \zeta_1(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) + \\ & \theta_{\alpha 1,1} \text{sdez}(\Delta x_1(k), \alpha_{1BP1}, \alpha_{1EP1}, \alpha_{1BN1}, \\ & \alpha_{1EN1}) + \cdots + \theta_{\alpha s,1} \text{sdez}(\Delta x_1(k), \alpha_{1BP s}, \\ & \alpha_{1EP s}, \alpha_{1BN s}, \alpha_{1EN s}) + r_{\beta 1,1} \text{sdez}(\Delta^2 x_1(k), \\ & \beta_{1BP1}, \beta_{1EP1}, \beta_{1BN1}, \beta_{1EN1}) + \cdots + \\ & r_{\beta v,1} \text{sdez}(\Delta^2 x_1(k), \beta_{1BP v}, \beta_{1EP v}, \beta_{1BN v}, \beta_{1EN v}), \\ & x_2(k+1) = \\ & \zeta_2(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) + \\ & \theta_{\alpha 1,2} \text{sdez}(\Delta x_2(k), \alpha_{2BP1}, \alpha_{2EP1}, \alpha_{2BN1}, \\ & \alpha_{2EN1}) + \cdots + \theta_{\alpha s,2} \text{sdez}(\Delta x_2(k), \alpha_{2BP s}, \\ & \alpha_{2EP s}, \alpha_{2BN s}, \alpha_{2EN s}) + r_{\beta 1,2} \text{sdez}(\Delta^2 x_2(k), \\ & \beta_{2BP1}, \beta_{2EP1}, \beta_{2BN1}, \beta_{2EN1}) + \cdots + \\ & r_{\beta v,2} \text{sdez}(\Delta^2 x_2(k), \beta_{2BP v}, \beta_{2EP v}, \beta_{2BN v}, \beta_{2EN v}), \\ & \vdots \\ & x_n(k+1) = \\ & \zeta_n(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) + \\ & \theta_{\alpha 1,n} \text{sdez}(\Delta x_n(k), \alpha_{nBP1}, \alpha_{nEP1}, \alpha_{nBN1}, \\ & \alpha_{nEN1}) + \cdots + \theta_{\alpha s,n} \text{sdez}(\Delta x_n(k), \alpha_{nBP s}, \\ & \alpha_{nEP s}, \alpha_{nBN s}, \alpha_{nEN s}) + r_{\beta 1,n} \text{sdez}(\Delta^2 x_n(k), \\ & \beta_{nBP1}, \beta_{nEP1}, \beta_{nBN1}, \beta_{nEN1}) + \cdots + r_{\beta v,n} \cdot \\ & \text{sdez}(\Delta^2 x_n(k), \beta_{nBP v}, \beta_{nEP v}, \beta_{nBN v}, \beta_{nEN v}), \end{aligned} \right. \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} & \zeta_1(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)), \\ & \zeta_2(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)), \dots, \\ & \zeta_n(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) \end{aligned}$$

为多维泰勒网展开式。

多维泰勒网模型如图 3 所示^[5]。

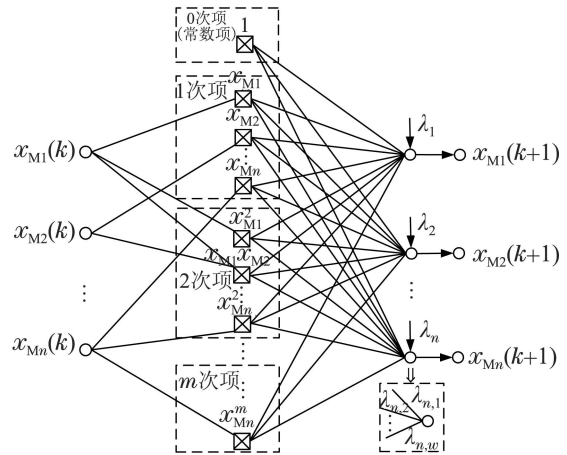


图 3 多维泰勒网模型图

Fig. 3 Multi-dimensional Taylor network

多维泰勒网输入为 $\mathbf{x}_M(k)$; 中间层由各幂次乘积单元和相应连接权值 λ_l 组成, 用于完成各输入变量在各幂次乘积项单元的加权聚合; 输出为 $\mathbf{x}_M(k+1)$ 。其中:

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_M(k) = (x_{M1}(k), x_{M2}(k), \dots, x_{Mn}(k))^T, \\ & \boldsymbol{\lambda}_l = \{\lambda_{l,1}, \lambda_{l,2}, \dots, \lambda_{l,w}\}, \quad l = 1, 2, \dots, n, \\ & \mathbf{x}_M(k+1) = (x_{M1}(k+1), x_{M2}(k+1), \dots, \\ & \quad x_{Mn}(k+1))^T. \end{aligned}$$

多维泰勒网输出为^[5]

$$\mathbf{x}_{Ml}(k+1) = \sum_{q=1}^w \lambda_{l,q} \prod_{i=1}^n x_{Mi}^{\sigma_{q,i}}(k), \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

其中: w 为展开式中乘积项的总项数, $\lambda_{1,q}, \lambda_{2,q}, \dots, \lambda_{n,q}$ 为各展开式中第 q 个乘积项相应的权值, $\sigma_{q,i}$ 为展开式中第 q 个乘积项中变量 $x_{Mi}(k)$ 的幂次。

由于多维泰勒网的输入量就是多尺度正负反馈交替论模型的输入量, 即 $\mathbf{x}_M(k) = \mathbf{x}(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T$, 故如式(13)所示的多维泰勒网的输出即相应为 $\zeta_l(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)), l = 1, 2, \dots, n$ 。

采用状态变化速度作为第一衡量尺度的 s 个具有死区叠加函数性质的等效正反馈

$$\text{diag}\{\boldsymbol{\theta}_{\alpha 1}\} \text{sdez}(\Delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_{BP1}, \boldsymbol{\alpha}_{EP1}, \boldsymbol{\alpha}_{BN1}, \boldsymbol{\alpha}_{EN1}), \dots, \text{diag}\{\boldsymbol{\theta}_{\alpha s}\} \text{sdez}(\Delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_{BP s}, \boldsymbol{\alpha}_{EP s}, \boldsymbol{\alpha}_{BN s}, \boldsymbol{\alpha}_{EN s}),$$

以及采用状态变化加速度作为第二衡量尺度的 v 个具有死区叠加函数性质的等效正反馈

$$\text{diag}\{\boldsymbol{\theta}_{\beta 1}\} \text{sdez}(\Delta^2 \mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}_{BP1}, \boldsymbol{\beta}_{EP1}, \boldsymbol{\beta}_{BN1}, \boldsymbol{\beta}_{EN1}), \dots, \text{diag}\{\boldsymbol{\theta}_{\beta v}\} \text{sdez}(\Delta^2 \mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}_{BP v}, \boldsymbol{\beta}_{EP v}, \boldsymbol{\beta}_{BN v}, \boldsymbol{\beta}_{EN v})$$

的正反馈系数反映了数据在剧变期发生剧烈大幅度变化的正反馈叠加程度。对于训练集数据中处于等效

正反馈状态变化速度起止点之间的序列数据, 由于其处于能量爆发的剧烈变化状态, 可分别计算各剧变区内的平均误差, 以获得对应于各等效正反馈区的参数.

3 基于多尺度正负反馈交替论模型的时间序列预测 (Time series prediction based on the model of multi-scale alternate positive negative feedbacks)

在事物不断呈现出“平稳→剧变→再平稳→再剧变”的变化过程中, 由作为其外部表现的状态数据所构成的时间序列, 同样呈现出这种交替变化. 基于多尺度正负反馈交替论模型的预测则是通过将状态变化速度和状态变化加速度作为两个正反馈界定尺度, 建立其数学模型, 以获得系统状态的预测值, 从而实现对该时间序列的预测.

本文主要针对时间序列的建模及预测问题, 故以一维输出为例论述模型建立以及预测值获取. 设样本集 $\{(\mathbf{x}(k), y(k+1))\}_{k=1}^d$, $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}$, 其中: 输入为多维输入向量 $\mathbf{x}(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T$, 输出为一维输出 $y(k+1) = x_1(k+1)$, 相应地基于多维泰勒网的多尺度正负反馈交替论模型即为

$$\hat{y}(k+1) = \zeta_1(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) + \theta_{\alpha_{1,1}} \cdot \text{sdez}(\Delta x_1(k), \alpha_{1BP1}, \alpha_{1EP1}, \alpha_{1BN1}, \alpha_{1EN1}) + \dots + \theta_{\alpha_{s,1}} \text{sdez}(\Delta x_1(k), \alpha_{1BP_s}, \alpha_{1EP_s}, \alpha_{1BN_s}, \alpha_{1EN_s}) + r_{\beta_{1,1}} \text{sdez}(\Delta^2 x_1(k), \beta_{1BP1}, \beta_{1EP1}, \beta_{1BN1}, \beta_{1EN1}) + \dots + r_{\beta_{v,1}} \text{sdez}(\Delta^2 x_1(k), \beta_{1BP_v}, \beta_{1EP_v}, \beta_{1BN_v}, \beta_{1EN_v}). \tag{14}$$

采用基于多尺度正负反馈交替论模型进行时间序列预测的过程如下:

1) 输入量重构. 将时间序列 $\{x(k)\}$ 的原始数据归一化之后进行输入量差分重构, 获得样本集 $\{(\mathbf{x}(k), y(k+1))\}_{k=1}^d$, $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}$, 输入向量为 $\mathbf{x}(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T$, 其中

$$\begin{cases} x_1(k) = x(k), \\ x_2(k) = x_1(k) - x_1(k-1), \\ x_3(k) = x_2(k) - x_2(k-1), \\ x_4(k) = x_3(k) - x_3(k-1), \end{cases} \tag{15}$$

而输出则为一维输出 $y(k+1) = x_1(k+1)$. 此外, 如前所述, 由于多尺度正负反馈交替论模型的输入量就是多维泰勒网模型的输入量, 即 $\mathbf{x}_M(k) = \mathbf{x}(k)$, 所以可知这里的 $(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T$ 就等于 $(x_{M1}(k), x_{M2}(k), \dots, x_{Mn}(k))^T$.

2) 根据状态变化速度 $\Delta x_1(k)$, 即 $\Delta x_1(k) = x_1(k)$

$-x_1(k-1) = x_2(k)$, 以及状态的变化加速度 $\Delta^2 x_1(k)$, 即 $\Delta^2 x_1(k) = x_2(k) - x_2(k-1) = x_3(k)$ 的大小分布确定模型的等效正反馈区域, 即采用状态变化速度作为第一衡量尺度的 s 个具有死区叠加函数性质的等效正反馈 $\text{sdez}(x_2(k), \alpha_{1BP1}, \alpha_{1EP1}, \alpha_{1BN1}, \alpha_{1EN1}), \dots, \text{sdez}(x_2(k), \alpha_{1BP_s}, \alpha_{1EP_s}, \alpha_{1BN_s}, \alpha_{1EN_s})$ 各变化速度正向(或负向)初值和终值, 以及采用状态变化加速度作为第二衡量尺度的 v 个具有死区叠加函数性质的等效正反馈 $\text{sdez}(x_3(k), \beta_{1BP1}, \beta_{1EP1}, \beta_{1BN1}, \beta_{1EN1}), \dots, \text{sdez}(x_3(k), \beta_{1BP_v}, \beta_{1EP_v}, \beta_{1BN_v}, \beta_{1EN_v})$ 各变化加速度正向(或负向)初值和终值.

3) 进行模型中等效负反馈部分的参数辨识. 采用多维泰勒网来描述系统的该部分, 可通过共轭梯度法进行参数寻优^[5], 得到式(14)中函数 $\zeta_1(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ 的各个具体参数.

4) 进行模型中等效正反馈部分的参数的辨识.

在对以第一尺度界定的 s 个等效正反馈区域, 即

$$\text{sdez}(x_2(k), \alpha_{1BP1}, \alpha_{1EP1}, \alpha_{1BN1}, \alpha_{1EN1}), \dots, \text{sdez}(x_2(k), \alpha_{1BP_s}, \alpha_{1EP_s}, \alpha_{1BN_s}, \alpha_{1EN_s})$$

的正反馈系数 $\theta_{\alpha_{1,1}}, \dots, \theta_{\alpha_{1,s}}$ 辨识时, 将样本集中符合 $\Delta x_1(k)$ (即 $\Delta x_1(k) = x_1(k) - x_1(k-1) = x_2(k)$) 属于 $[\alpha_{1BP\delta}, \alpha_{1EP\delta}]$ 区间(或 $[\alpha_{1EN\delta}, \alpha_{1BN\delta}]$ 区间)所对应的 $x_{M1}(k+1)$ 计入集合 Q_δ , 其中 δ 表示采用状态变化速度作为第一衡量尺度的第 δ 个具有死区叠加函数性质的等效正反馈, $\delta = 1, 2, \dots, s$. 若令

$$Q_\delta = \{x_{M1}(k+1)_{\delta,\rho}\}_{\rho=1}^{\varphi_\delta},$$

且令与该集合中元素 $x_{M1}(k+1)_{\delta,\rho}$ 对应的实际值表示为 $x_1(k+1)_{\delta,\rho}$, 则 s 个死区叠加函数的正反馈系数 $\theta_{\alpha_{1,1}}, \theta_{\alpha_{1,2}}, \dots, \theta_{\alpha_{1,s}}$ 可由式(16)得到:

$$\theta_{\alpha_{1,\delta}} = \frac{1}{\varphi_\delta} \sum_{\rho=1}^{\varphi_\delta} (x_1(k+1)_{\delta,\rho} - x_{M1}(k+1)_{\delta,\rho}) \quad \delta = 1, 2, \dots, s. \tag{16}$$

相应地, 在对以第二尺度界定的 v 个等效正反馈区域

$$\text{sdez}(x_3(k), \beta_{1BP1}, \beta_{1EP1}, \beta_{1BN1}, \beta_{1EN1}), \dots, \text{sdez}(x_3(k), \beta_{1BP_v}, \beta_{1EP_v}, \beta_{1BN_v}, \beta_{1EN_v})$$

的正反馈系数 $r_{\beta_{1,1}}, \dots, r_{\beta_{1,v}}$ 辨识时, 将样本集中符合 $\Delta^2 x_1(k)$ (即 $\Delta^2 x_1(k) = x_2(k) - x_2(k-1) = x_3(k)$) 属于 $[\beta_{1BP\eta}, \beta_{1EP\eta}]$ 区间(或 $[\beta_{1EN\eta}, \beta_{1BN\eta}]$ 区间)所对应的 $x_{M1}(k+1)$ 计入集合 S_η , 其中 η 表示采用状态变化加速度作为第二衡量尺度的第 η 个具有死区叠加函数性质的等效正反馈, $\eta = 1, 2, \dots, v$. 若令

$$S_\eta = \{x_{M1}(k+1)_{\eta,\tau}\}_{\tau=1}^{\pi_\eta},$$

且令与该集合中元素 $x_{M1}(k+1)_{\eta,\tau}$ 对应的实际值表

示为 $x_1(k+1)_{\eta,\tau}$, 则 v 个死区叠加函数的正反馈系数 $r_{\beta 1,1}, r_{\beta 1,2}, \dots, r_{\beta 1,v}$ 可由式(17)得到:

$$r_{\beta 1,\eta} = \frac{1}{\pi_\eta} \sum_{\tau=1}^{\pi_\eta} (x_1(k+1)_{\eta,\tau} - x_{M1}(k+1)_{\eta,\tau})$$

$$\eta = 1, 2, \dots, v. \tag{17}$$

5) 进行预测, 获得预测值. 基于上述模型中等效负反馈部分, 以及等效正反馈部分的参数辨识结果, 进行时间序列的一步预测, 其预测结果为

$$\hat{y}(k+1) = \zeta_1(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) + \theta_{\alpha 1,1} \cdot \text{sdez}(\Delta x_1(k), \alpha_{1BP1}, \alpha_{1EP1}, \alpha_{1BN1}, \alpha_{1EN1}) + \dots + \theta_{\alpha s,1} \text{sdez}(\Delta x_1(k), \alpha_{1BP_s}, \alpha_{1EP_s}, \alpha_{1BN_s}, \alpha_{1EN_s}) + r_{\beta 1,1} \text{sdez}(\Delta^2 x_1(k), \beta_{1BP1}, \beta_{1EP1}, \beta_{1BN1}, \beta_{1EN1}) + \dots + r_{\beta v,1} \text{sdez}(\Delta^2 x_1(k), \beta_{1BP_v}, \beta_{1EP_v}, \beta_{1BN_v}, \beta_{1EN_v}).$$

对该结果进行反归一处理, 进而得到最终的预测值.

4 实验验证(Example verification)

4.1 算例1(Example 1)

近年来, 空气质量越来越受到人们的关注. 空气质量的好坏依据空气中污染物浓度的高低来判断, 空气质量指数AQI指标越高, 空气污染越严重, 该指标反映了空气的污染程度. 根据《环境空气质量指数(AQI)技术规定(试行)》(HJ 633-2012)的规定, 空气污染指

数划分及其级别分类如表1所示^[21], 级别越高, 说明污染越严重, 对人体健康的影响也越明显.

表 1 空气污染指数划分及其级别分类
Table 1 Air pollution index classification and level classification

| AQI指数 | 级别 | 空气状况 |
|---------|----|------|
| 0~50 | 一级 | 优秀 |
| 51~100 | 二级 | 良好 |
| 101~150 | 三级 | 轻度污染 |
| 151~200 | 四级 | 中度污染 |
| 201~300 | 五级 | 重度污染 |
| 大于300 | 六级 | 严重污染 |

空气污染是一个复杂的现象, 在特定时间和地点空气污染物浓度受到许多因素影响, 因而建立基于机理的空气污染模型相当困难. 然而, 虽然空气污染这一类复杂系统机理复杂, 影响因素众多, 却具有典型的“平稳→剧变→再平稳→再剧变”演变规律.

针对这一系统特性, 本文以空气质量指数AQI指标预测为例, 基于监测数据, 而非复杂机理, 建立其基于多尺度正负反馈交替论模型, 从而对空气质量指数AQI做出及时准确的预报. 利用监测到的前300个数据作为训练数据, 后40个数据作为测试数据, 检验预测性能. 采用四元四次多维泰勒网结构, 利用MATLAB7.0编写多尺度正负反馈交替论模型程序. 空气质量预报结果与实际情况对比如表2所示.

表 2 预报结果与实际结果对比

Table 2 Prediction value and the actual value comparison

| 序号 | 预报结果 | 实际情况 | 序号 | 预报结果 | 实际情况 |
|----|----------|----------|----|----------|----------|
| 1 | 二级(良好) | 二级(良好) | 21 | 二级(良好) | 一级(优秀) |
| 2 | 三级(轻度污染) | 二级(良好) | 22 | 五级(重度污染) | 四级(中度污染) |
| 3 | 三级(轻度污染) | 二级(良好) | 23 | 五级(重度污染) | 六级(严重污染) |
| 4 | 三级(轻度污染) | 三级(轻度污染) | 24 | 五级(重度污染) | 六级(严重污染) |
| 5 | 四级(中度污染) | 三级(轻度污染) | 25 | 五级(重度污染) | 六级(严重污染) |
| 6 | 三级(轻度污染) | 三级(轻度污染) | 26 | 四级(中度污染) | 五级(重度污染) |
| 7 | 三级(轻度污染) | 三级(轻度污染) | 27 | 二级(良好) | 一级(优秀) |
| 8 | 二级(良好) | 二级(良好) | 28 | 三级(轻度污染) | 二级(良好) |
| 9 | 二级(良好) | 二级(良好) | 29 | 四级(中度污染) | 三级(轻度污染) |
| 10 | 四级(中度污染) | 三级(轻度污染) | 30 | 三级(轻度污染) | 三级(轻度污染) |
| 11 | 四级(中度污染) | 四级(中度污染) | 31 | 四级(中度污染) | 四级(中度污染) |
| 12 | 二级(良好) | 二级(良好) | 32 | 四级(中度污染) | 四级(中度污染) |
| 13 | 二级(良好) | 二级(良好) | 33 | 五级(重度污染) | 五级(重度污染) |
| 14 | 三级(轻度污染) | 二级(良好) | 34 | 四级(中度污染) | 五级(重度污染) |
| 15 | 二级(良好) | 一级(优秀) | 35 | 四级(中度污染) | 五级(重度污染) |
| 16 | 三级(轻度污染) | 二级(良好) | 36 | 二级(良好) | 二级(良好) |
| 17 | 三级(轻度污染) | 二级(良好) | 37 | 二级(良好) | 二级(良好) |
| 18 | 三级(轻度污染) | 三级(轻度污染) | 38 | 四级(中度污染) | 四级(中度污染) |
| 19 | 三级(轻度污染) | 三级(轻度污染) | 39 | 五级(重度污染) | 五级(重度污染) |
| 20 | 二级(良好) | 一级(优秀) | 40 | 五级(重度污染) | 六级(严重污染) |

为了更好地进行对比,本文还与单纯使用多维泰勒网模型(multi-dimensional taylor network, MTN)、小波神经网络模型(wavelet neural network, WNN)、动态神经网络ELMAN模型(ELMAN neural network, ELMAN)、遗传算法优化BP神经网络模型(back propagation neural network optimized by genetic algorithms, GA-BP)以及径向基神经网络RBF模型(radical basis function neural network, RBF)进行了对比,在相同训练样本集的基础上得到的该40个测试样本AQI预测结果的对比图分别如图4和图5所示。

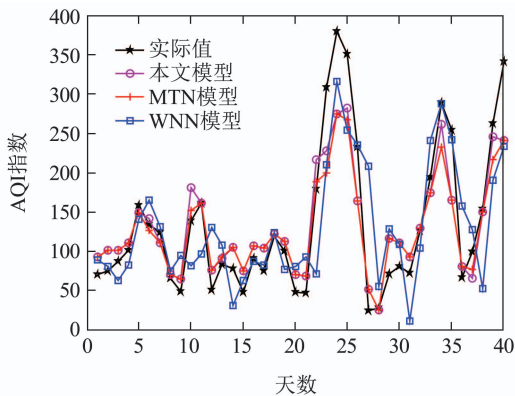


图4 不同模型结果对比图1

Fig. 4 The first chart of the results of different models comparison

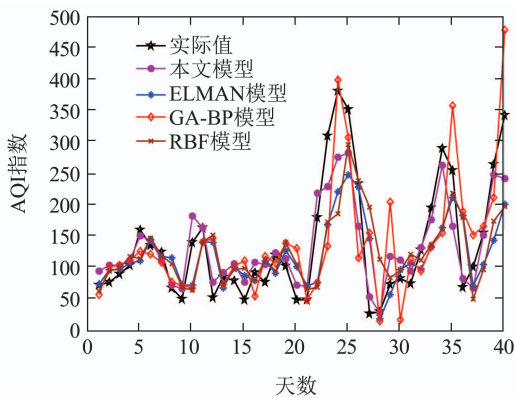


图5 不同模型结果对比图2

Fig. 5 The second chart of the results of different models comparison

上述实验结果可以看出,采用本文提出的多尺度正负反馈交替论模型可以进行AQI指数预报,并且相较于其它几种模型,本文模型具有更好的预报精度。

由图4和图5中本文模型的数据曲线可以看出,在平稳阶段该模型预报的准确性相对更好,主要是因为这一阶段数据波动相对平缓,采用多维泰勒网方法构建的多项式函数可以较为精确地逼近实际数据。在数据剧烈变化的阶段,本文模型的个别数据

变化特别剧烈的区域,预报精度明显降低,主要原因在于此段数据变化恰恰处于稳定性分离阶段,这些点处于分离点附近,所以精度相对较差。另一方面,由于本文模型在进行正反馈区域参数辨识时,目前采用的是相对简单的算法,尚未采用更适当的优化算法对相应正反馈区域的关键参数进行优化,这也对预报精度有一定影响,此不足之处可以在后续研究中进一步优化完善。

采用均方根误差(RMSE)和相对误差(PERR)作为模型性能评价标准,对图4和图5中各模型40个测试样本的预测误差进行统计,统计结果如表3所示。

表3 预测误差对比

Table 3 Comparison of predicting errors

| 模型 | RMSE | PERR |
|-------|-------|-------|
| 本文模型 | 39.23 | 0.056 |
| MTN | 41.90 | 0.064 |
| WNN | 59.41 | 0.129 |
| ELMAN | 67.95 | 0.169 |
| GA-BP | 71.48 | 0.187 |
| RBF | 72.68 | 0.193 |

其中, RMSE和PERR分别定义为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (y(k+1) - \hat{y}(k+1))^2}{N}}, \quad (18)$$

$$\text{PERR} = \frac{\sum_{k=1}^N (y(k+1) - \hat{y}(k+1))^2}{\sum_{k=1}^N y^2(k+1)}, \quad (19)$$

其中: $y(k+1)$ 为实际值, $\hat{y}(k+1)$ 为预报值, N 为测试集样本数。

由表3对比结果可以明显看出,本文方法可以对空气质量AQI指数进行有效预测,并且相较于单纯的多维泰勒网预测模型(MTN)、小波神经网络模型(WNN)、动态神经网络ELMAN模型(ELMAN)以及静态神经网络GA-BP和RBF模型,精度更高。

4.2 算例2(Example 2)

PM_{2.5}指环境中空气动力学当量直径小于等于2.5微米的颗粒物,它是大气主要污染物之一,对大气环境质量以及人体健康有着重要影响,其在空气中含量浓度越高,表明空气污染越严重。然而,由于其成因复杂、成分众多,基于机理对其建模相当困难。由于PM_{2.5}污染指数也具有典型的“平稳→剧变→再平稳→再剧变”变化规律,本文对其展开基于多尺度正负反馈交替论的系统建模及预测研究,依然采用四元四次多维泰勒网结构,利用监测到的

前635个日平均PM2.5污染指数作为训练数据, 后30个日平均PM2.5污染指数作为测试数据, 检验预测性能。

为了更好地反映预测性能, 本文将多尺度正负反馈交替论模型方法与多维泰勒网模型(MTN)、静态前馈BP神经网络模型(BP)、动态神经网络ELMAN模型(ELMAN)以及小波神经网络模型(WNN)的预测结果进行了对比, 各模型预测结果对比图分别如图6和图7所示, 误差统计如表4所示。

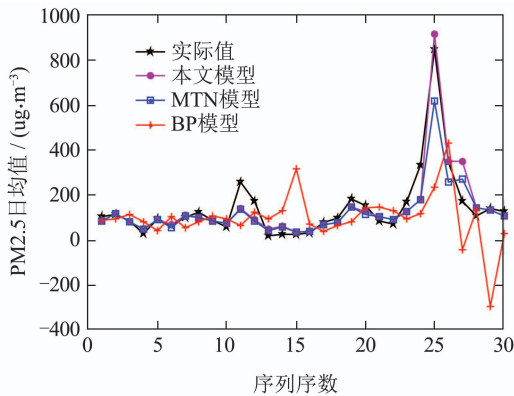


图 6 不同模型PM2.5预测值对比图1

Fig. 6 The first chart of PM2.5 predictive value of different models comparison

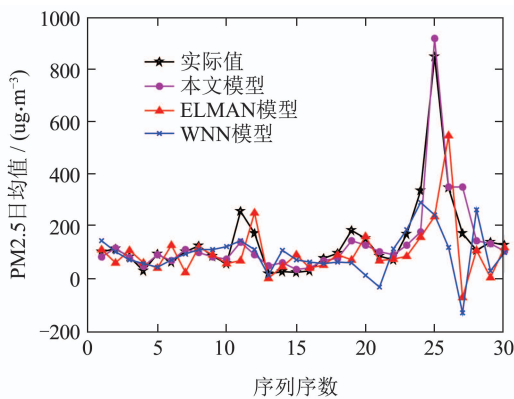


图 7 不同模型PM2.5预测值对比图2

Fig. 7 The second chart of PM2.5 predictive value of different models comparison

表 4 PM2.5预测误差对比

Table 4 The errors of PM2.5 predictive value comparison

| 模型 | RMSE | PERR |
|-------|--------|-------|
| 本文模型 | 55.55 | 0.070 |
| MTN | 65.46 | 0.098 |
| BP | 169.69 | 0.656 |
| ELMAN | 142.32 | 0.461 |
| WNN | 146.58 | 0.483 |

由上述对比可以看出, PM2.5污染指数预报是一

个动态过程, 采用具有适应时变特性能力的ELMAN神经网络模型进行预测时, 其精度优于静态前馈BP神经网络模型, 而采用基于小波进行数据重构的小波神经网络模型也能在精度上取得优于静态前馈BP神经网络模型的预测结果。然而, 从图6、图7及表4可以明显看出, 对于PM2.5污染指数这种易出现数据大幅度剧烈变化的非线性时间序列, 本文所提出的多尺度正负反馈交替论模型相较于其它几种模型, 在预测精度方面更具有优势。

4.3 结果分析(Result analysis)

结合上述两个算例的预测结果, 分析并归纳其原因。

首先, 本文方法的预测结果优于单纯的多维泰勒网方法(MTN), 原因在于将状态的变化速度和变化加速度分别作为等效正、负反馈的第一和第二界定尺度, 根据状态变化剧烈程度以及剧烈变化趋势, 将状态稳定性分离。这正是本文的重要创新点, 前文已详细介绍, 这里不再赘述。

此外, 从表3和表4可以看出, 本文方法相较于神经网络方法, 预测性能有较大幅度的提高, 分析其原因主要在于, 由于神经网络受sigmoid函数或径向基函数的限制, 得到的是一元n阶非线性平稳差分方程, 适宜表示状态变化不大的动力学特性, 当状态变化很大、甚至发散时, 神经网络便无法获得满意的结果。

相较于神经网络等其它时间序列预测方法, 本文方法具有更高的预测精度是其主要优势之一。更重要的一点在于, 本文方法建立的是如式(11)所示的系统一般意义下的动力学模型, 可以表示定义在整个状态空间(即非有界闭子集)上的具有多项式结构的非线性动力学系统, 所求解为模型的解析解。而且, 该动力学模型通过引入等效正、负反馈的概念将系统稳定性分离, 从而能更好地以数学形式呈现系统变化规律, 这是其它建模及预测方法所不具备的。

5 结论(Conclusions)

本文在正负反馈交替论思想的基础上, 引入状态控制向量, 提出以状态变化速度及状态变化加速度作为等效正负反馈划分尺度的多尺度正负反馈交替论数学模型。该模型将系统状态稳定性分离, 是一种将等效反馈思想与物质系统的“平稳→剧变→再平稳→再剧变”变化规律相结合的系统动力学模型。分别采用空气质量指标AQI指数和大气主要污染物PM2.5指数进行应用研究, 并与单纯多维泰勒网方法以及几种神经网络模型预测结果进行对比。

算例实验表明,该预测模型可以将系统量变质变这一普遍规律以动力学模型的形式加以表达,特别是针对数据呈现大幅度剧烈变化的时间序列,预测具有更高的精确预测,为呈现这一变化规律的复杂系统建模及预测提供了一种新颖而有效的手段。

参考文献(References):

- [1] CHEN S, BILLINGS S A. Representation of non-linear systems: the NARMAX model [J]. *International Journal of Control*, 1989, 49(3): 1013 – 1042.
- [2] ZHANG Hua, REN Ruoen. Non-stationary time series prediction based on wavelet decomposition and remained GM(1,1)-AR [J]. *Systems Engineering – Theory & Practice*, 2010, 30(6): 1016 – 1020. (张华, 任若恩. 基于小波分解和残差GM(1,1)-AR的非平稳时间序列预测 [J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(6): 1016 – 1020.)
- [3] HU Yunan, CHENG Chunhua, ZOU Qiang, et al. Indirect adaptive neural networks controller for non-affine pure-feedback systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 467 – 478. (胡云安, 程春华, 邹强, 等. 非放射纯反馈系统的间接自适应神经网络控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(4): 467 – 478.)
- [4] JIANG Zhaohui, LI Xiyue, GUI Weihua, et al. Blast furnace stockline prediction by segmented linear-regression and dynamic weighting neural network [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(6): 801 – 809. (蒋朝辉, 李晔月, 桂卫华, 等. 分段线性回归和动态加权神经网络融合的高炉料位预测 [J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(6): 801 – 809.)
- [5] LIN Yi, YAN Hongsen, ZHOU Bo. Nonlinear time series prediction method based on multi-dimensional Taylor network and its application [J]. *Control and Decision*, 2014, 29(5): 795 – 801. (林屹, 严洪森, 周博. 基于多维泰勒网的非线性时间序列预测方法及其应用 [J]. *控制与决策*, 2014, 29(5): 795 – 801.)
- [6] ZHOU Bo, YAN Hongsen. Financial time series forecasting based on wavelet and multi-dimensional Taylor network dynamics model [J]. *Systems Engineering – Theory & Practice*, 2013, 33(10): 2654 – 2662. (周博, 严洪森. 基于小波和多维泰勒网动力学模型的金融时间序列预测 [J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(10): 2654 – 2662.)
- [7] SAUNDERS P T. *An Introduction to Catastrophe Theory* [M]. LING Fuhua, Translated. Shanghai, China: Shanghai Jiao Tong University Press, 1983. (桑德斯. 突变理论入门 [M]. 凌复华, 译. 上海: 上海交通大学出版社, 1983.)
- [8] ZHANG Siying. Complexity science, rules of the whole systems and the qualitative researches [J]. *Complex Systems and Complexity Science*, 2005, 2(1): 71 – 83. (张嗣瀛. 复杂性科学, 整体规律与定性研究 [J]. *复杂系统与复杂性科学*, 2005, 2(1): 71 – 83.)
- [9] YU Y, HU B, WU J, ZHANG J H. Nonlinear analysis of the cooperation of strategic alliances through stochastic catastrophe theory [J]. *Physica A*, 2014, 400: 100 – 108.
- [10] XUE Xinghua, ZHANG Wohua, LIU Hongjun. Evaluation of slope stability based on genetic algorithm and fuzzy neural network [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2007, 28(12): 2643 – 2648. (薛兴华, 张我华, 刘红军. 基于遗传算法和模糊神经网络的边坡稳定性评价 [J]. *岩土力学*, 2007, 28(12): 2643 – 2648.)
- [11] QIN S Q, JIAO J J, WANG S J, et al. A nonlinear catastrophe model of instability of planar-slip slope and chaotic dynamical mechanisms of its evolutionary process [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(44/45): 8093 – 8109.
- [12] AHANGAR-ASR A, FARAMARZI A, JAVADI A A. A new approach for prediction of the stability of soil and rock slopes [J]. *International Journal of Engineering Computations*, 2010, 27(7): 878 – 893.
- [13] AKIMOWICZ A. Catastrophes and chaos in business cycle theory [J]. *Acta Physica Polonica A*, 2010, 117(4): 640 – 646.
- [14] REN L, XIANG X Y, NI J J. Forecast modeling of monthly runoff with adaptive neural fuzzy inference system and wavelet analysis [J]. *Journal of Hydrologic Engineering*, 2013, 18(9): 1133 – 1139.
- [15] RAMANA V, KRISHNA R, KUMAR B, et al. Monthly rainfall prediction using wavelet neural network analysis [J]. *Water Resources Management*, 2013, 27(10): 3697 – 3611.
- [16] SONG Xinshan, WANG Yuhui, YAN Denghua, et al. Fractal and wavelet analysis on the 59 years time series of drought disaster ratio in China [J]. *Systems Engineering – Theory & Practice*, 2013, 33(11): 2986 – 2992. (宋新山, 王宇晖, 严登华, 等. 基于分形特征的我国干旱灾害小波分析 [J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(11): 2986 – 2992.)
- [17] YUAN Yongbo, DOU Yudan, LIU Yan, et al. Evaluation of droughts and floods based on fuzzy variable model with combined weights [J]. *Systems Engineering – Theory & Practice*, 2013, 33(10): 2583 – 2589. (袁永博, 窦玉丹, 刘妍, 等. 基于组合权重模糊可变模型的旱涝灾害评价 [J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(10): 2583 – 2589.)
- [18] DONG Hua, YANG Weibo. The catastrophe models in the forecast of accident and disaster [J]. *Journal of Geological Hazards and Environment Preservation*, 2003, 14(3): 39 – 44. (董华, 杨卫波. 事故和灾害预测中的突变模型 [J]. *地质灾害与环境保护*, 2003, 14(3): 39 – 44.)
- [19] LU Zhiguang, BAI Liping, LU Li. A study on long-term disaster forecast model by using chaos theory [J]. *Journal of China Agricultural University*, 2002, 7(3): 43 – 46. (卢志光, 白丽萍, 卢丽. 运用混沌理论制作长期灾害预报模型初探 [J]. *中国农业大学学报*, 2002, 7(3): 43 – 46.)
- [20] YAN Hongsen. *Alternate positive negative feedbacks* [R]. Nanjing: Research Institute of Control and Optimization of Manufacturing Systems, School of Automation, Southeast University, 2008. (严洪森. 正负反馈交替论 [R]. 南京: 东南大学自动化学院制造系统控制与优化研究所, 2008.)
- [21] *Technical regulation on ambient air quality index(on trial) (HJ 633-2012)* [S]. Beijing: China Environmental Science Press, 2012. (环境空气质量指数(AQI)技术规定(试行)(HJ 633-2012) [S]. 北京: 中国环境科学出版社, 2012.)

作者简介:

林屹 (1977-), 女, 博士研究生, 目前研究方向为复杂系统建模、智能预测, E-mail: nuistly@163.com;

严洪森 (1957-), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为生产计划于调度、预测、知识化制造、非线性系统建模、控制, E-mail: hsyang@seu.edu.cn.