

连续时间多胞线性变参数系统变增益 H_∞/H_2 输出反馈控制

姜 伟^{1†}, 王宏力¹, 陆敬辉¹, 秦伟伟², 蔡光斌¹

(1. 火箭军工程大学 控制工程系, 陕西 西安 710025; 2. 火箭军工程大学 空间工程系, 陕西 西安 710025)

摘要: 针对一类同时具有参数不确定性和外界干扰的非线性系统, 提出了一种连续时间多胞线性变参数(LPV)系统变增益 H_∞/H_2 输出反馈控制方法. 首先, 对连续时间多胞LPV系统的变增益混合目标(H_∞/H_2 指标和区域极点约束)输出反馈控制器综合方法进行了数学描述; 其次, 引入新的结构化松弛矩阵变量和参数依赖Lyapunov函数, 将满足期望性能的混合目标鲁棒动态输出反馈控制问题转化为线性矩阵不等式框架内的有限维凸优化问题, 进一步降低了所设计LPV控制器的保守性. 最后, 以四分之一车辆模型主动悬架系统为研究对象进行仿真, 仿真结果验证了本文控制器的有效性.

关键词: H_∞ 控制; H_2 控制; 区域极点配置; 线性变参数; 主动悬架

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Gain-scheduled H_∞/H_2 output feedback controller synthesis for continuous-time polytopic linear parameter varying systems

JIANG Wei^{1†}, WANG Hong-li¹, LU Jing-hui¹, QIN Wei-wei², CAI Guang-bin¹

(1. Department of Control Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi 710025, China;

2. Department of Aerospace Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi 710025, China)

Abstract: This paper focuses on the problem of gain-scheduled H_∞/H_2 output feedback controller synthesis for continuous-time linear parameter varying (LPV) systems with parameter uncertainty and external disturbance simultaneously. First, the mathematical formulation and control objectives, including the H_∞/H_2 performance and regional pole placement, of gain-scheduled mixed-objective robust dynamic output feedback controller for continuous-time LPV systems are presented. Second, in order to further reduce the conservatism of this algorithm, several slack variables and parameter-dependent Lyapunov functions are employed to the well-established performance conditions. Then the desired gain-scheduled mixed-objective robust dynamic output feedback controllers are reformulated as efficiently tractable finite-dimensional convex optimization problem in terms of linear matrix inequalities (LMIs). Finally, numerical examples of a quarter car model with an active suspension are given to illustrate the effectiveness of the proposed methods.

Key words: H_∞ control; H_2 control; regional pole placement; linear parameter varying; active suspension

1 引言(Introduction)

近年来, 有关线性变参数(linear parameter varying, LPV)系统的研究得到了国内外控制界的广泛关注, 这是因为LPV系统的系统矩阵可以根据实时可测或在线估计的外部参数动态调整, 为线性控制理论在参数时变的非线性控制问题中的推广提供了可能. 研究表明基于LPV系统的鲁棒变增益控制方法是处理非线性系统控制器设计的最佳方法之一^[1-2]. 鉴于LPV系统的控制器不仅设计简单而且实用性强, 目前已经在航空航天、工业过程控制以及其他领域得到了

广泛应用^[3-8]. 然而, 在实际控制系统的设计中, 由于不可避免地存在系统不确定性和外界随机干扰, 如果不考虑其影响, 控制器可能无法达到期望的性能要求甚至存在失控的风险. 因此, 针对一个控制器如何使其闭环系统保持鲁棒稳定性和具有满意的系统性能是现代鲁棒LPV控制综合理论的一个重要问题.

从已有研究成果中可以发现, 在鲁棒控制的研究领域中, H_∞ 控制器在系统出现不确定性时具有较好的鲁棒稳定性, 但这是以牺牲其他指标为代价的, 最终的控制性性能仍难以满足要求; 而 H_2 性能对于处

收稿日期: 2015-09-19; 录用日期: 2016-06-03.

[†]通信作者. E-mail: yixiantian123456@126.com; Tel.: +86 13474661576.

本文责任编辑: 王聪.

国家自然科学基金项目(61304239, 61503391, 61503392), 陕西省自然科学基金项目(2015JQ6213)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61304239, 61503391, 61503392) and National Natural Science Foundation of Shaanxi Province (2015JQ6213).

理随机噪声、干扰很有效,但控制效果完全依赖于描述被控对象的数学模型的精确性,这一点影响了传统 H_2 最优控制器在实际中的应用^[9-11].此外,系统响应的过渡过程与其极点位置有关,为取得满意的动态和稳态性能,通常要求闭环系统极点配置到期望的区域内^[12-13].目前,分别以 H_∞ 和 H_2 为单一指标或满足区域极点配置要求的鲁棒控制器设计问题都已经得到了较好的解决.为了使闭环系统的鲁棒性更强,能够兼顾稳定性和抗扰动性能的混合 H_∞/H_2 指标鲁棒控制也得到学者的关注^[14-15],而且上述方法在LPV系统上也取得了一些成果^[16].但是上述研究多采用的是算法上易于实现的状态反馈控制方法,在控制器综合过程中需要通过配置传感器或设计状态观测器来获取系统的状态信息,因此存在工程上难以实现及成本不可控的问题.其次,上述控制器往往是在原非线性系统平衡点处的局部线性化得到的线性时不变系统上设计的,虽然在平衡点处及邻域内具有较好的控制效果,但无法从理论上保证在整个参数变化空间内系统全局稳定性及控制性能.

针对以上问题,本文通过综合 H_∞ 和 H_2 两种性能指标及极点配置的优点,提出了一种基于多胞LPV系统的变增益 H_∞/H_2 输出反馈控制器设计方法.首先,研究了一般条件下的连续时间多胞LPV系统的变增益混合目标鲁棒动态输出反馈控制问题;其次,为了降低所设计LPV控制器的保守性,通过引入新的结构化松弛矩阵变量和参数依赖的Lyapunov函数等手段,将满足期望性能的混合目标鲁棒动态输出反馈控制问题转化为线性矩阵不等式框架内的有限维凸优化问题,得到了控制器存在的充分条件.该方法综合考虑了参数不确定性、外界干扰和瞬时动态性能要求对控制系统设计的影响,不仅能够保证系统在参数变化空间内的全局渐近稳定性,而且具有一定的干扰抑制能力和满意的动态性能.最后,以四分之一车辆模型主动悬架设计为例,仿真验证了该方法的有效性.

2 问题描述(Problem statement)

考虑如下—类LPV系统 S :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B_1(\theta(t))w(t) + B_2(\theta(t))u(t), \\ z_\infty(t) = C_1(\theta(t))x(t) + D_{11}(\theta(t))w(t) + D_{12}(\theta(t))u(t), \\ z_2(t) = C_2(\theta(t))x(t) + D_{22}(\theta(t))u(t), \\ y(t) = C_3(\theta(t))x(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $w(t) \in \mathbb{R}^l$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}^{n_3}$ 分别为系统 S 的状态向量、干扰输入、控制输入和系统输出; $z_\infty(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ 和 $z_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ 分别为 H_∞ 和 H_2 性能指标下的控制输出.假设式(1)中各系数矩阵的维数是相容的, $A(\theta(t))$, $B_1(\theta(t))$, $B_2(\theta(t))$, $C_1(\theta(t))$,

$C_2(\theta(t))$, $C_3(\theta(t))$, $D_{11}(\theta(t))$, $D_{12}(\theta(t))$ 和 $D_{22}(\theta(t))$ 都是关于调度参数 $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \cdots \ \theta_r(t)]^T$, $\theta(t) \in \mathbb{R}^r$ 的参数依赖矩阵,且参数 $\theta(t)$ 有界.类似于现有文献[9-10]所研究的LPV系统增益调度控制问题,可以将上述LPV系统 S 转化为如下的多胞LPV系统:

$$\begin{aligned} \Omega(\theta) \triangleq & (A(\theta(t)), B_1(\theta(t)), B_2(\theta(t)), \\ & C_1(\theta(t)), D_{11}(\theta(t)), D_{12}(\theta(t)), \\ & C_2(\theta(t)), D_{22}(\theta(t)), C_3(\theta(t))) \in \mathfrak{R} \triangleq \\ & \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \Omega_i : \alpha_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1 \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中: \mathfrak{R} 为系统 S 所在的有界凸多面体顶点系统的集合, $\Omega_i = (A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, D_{11i}, D_{12i}, C_{2i}, D_{22i}, C_{3i})$ 表示系统 S 的第 i 个顶点系统, $i = 1, 2, \dots, N$.假设针对LPV系统(1)设计混合目标鲁棒LPV动态输出反馈控制器 K_{DOF} 如下:

$$\begin{aligned} K_{\text{DOF}} : \dot{x}_K(t) &= A_K(\theta)x_K(t) + B_K(\theta)y(t), \\ u(t) &= C_K(\theta)x_K(t) + D_K(\theta)y(t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $x_K(t) \in \mathbb{R}^n$ 为控制器状态, $A_K(\theta)$, $B_K(\theta)$, $C_K(\theta)$ 和 $D_K(\theta)$ 为维数相容的待求动态输出反馈控制器系数矩阵, $u(t)$ 为控制输入.将式(3)中的动态输出反馈控制器 K_{DOF} 代入到LPV系统(1),得到闭环LPV系统 C_{DOF} :

$$\begin{aligned} C_{\text{DOF}} : \dot{x}_{\text{cl}}(t) &= A_{\text{cl}}(\theta)x_{\text{cl}}(t) + B_{\text{cl}}(\theta)w(t), \\ z_\infty(t) &= C_{1\text{cl}}(\theta)x_{\text{cl}}(t) + D_{1\text{cl}}(\theta)w(t), \\ z_2(t) &= C_{2\text{cl}}(\theta)x_{\text{cl}}(t), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $x_{\text{cl}}(t) = [x^T(t) \ x_K^T(t)]^T$.系统 C_{DOF} 中的各系数矩阵分别为

$$\begin{cases} A_{\text{cl}}(\theta) = \begin{bmatrix} A_{\text{cl}11}(\theta) & B_2(\theta)C_K(\theta) \\ B_K(\theta)C_3(\theta) & A_K(\theta) \end{bmatrix}, \\ B_{\text{cl}}(\theta) = [B_1^T(\theta) \ 0], \ D_{1\text{cl}}(\theta) = D_{11}(\theta), \\ C_{1\text{cl}}(\theta) = \begin{bmatrix} C_1^T(\theta) + C_3^T(\theta)D_K^T(\theta)D_{12}^T(\theta) \\ C_K^T(\theta)D_{12}^T(\theta) \end{bmatrix}^T, \\ C_{2\text{cl}}(\theta) = \begin{bmatrix} C_2^T(\theta) + C_3^T(\theta)D_K^T(\theta)D_{22}^T(\theta) \\ C_K^T(\theta)D_{22}^T(\theta) \end{bmatrix}^T, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $A_{\text{cl}11}(\theta) = A(\theta) + B_2(\theta)D_K(\theta)C_3(\theta)$.因此,形如式(1)–(2)的多胞LPV系统混合目标鲁棒LPV动态输出反馈控制设计问题可以归纳为:设计如式(3)所示的动态输出反馈控制器 K_{DOF} ,使得式(4)–(5)中的闭环LPV系统 C_{DOF} 对所有允许的不确定调度参数 $\theta(t)$,满足以下的设计指标:

- 1) 极点约束: 闭环系统 C_{DOF} 极点在规定的区域内;
- 2) H_∞ 性能: 对有界能量输入信号 $w(t)$,给定一个

性能指标 $\gamma > 0$, 使得从 $w(t)$ 到 $z_\infty(t)$ 的闭环传递函数 $T_{z_\infty w}(s)$ 的 H_∞ 范数满足 $\|T_{z_\infty w}(s)\|_\infty < \gamma$;

3) H_2 性能: 对于一个具有单位谱密度的白噪声输入信号 $w(t)$, 给定一个性能指标 $\eta > 0$, 使得从 $w(t)$ 到 $z_2(t)$ 的闭环传递函数 $T_{z_2 w}(s)$ 的 H_2 范数满足下式: $\|T_{z_2 w}(s)\|_2 < \eta$.

3 混合目标动态输出反馈控制器设计 (Gain-scheduled mixed-objective dynamic output feedback controller synthesis)

3.1 相关引理及推论 (Relevant lemmas and corollarys)

引理 1 对于闭环LPV系统(4), 给定 $\gamma > 0$, 则以下条件是等价的^[17-18]:

- 1) 系统渐近稳定, 且 $\|T_{z_\infty w}(s)\|_\infty < \gamma$;
- 2) 存在对称正定矩阵 $X_\infty(\theta)$, 满足以下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} M_1(\theta) & B_{cl}(\theta) & X_\infty(\theta)C_{1cl}^T(\theta) \\ * & -\gamma I & D_{1cl}^T(\theta) \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

其中 $M_1(\theta) = A_{cl}(\theta)X_\infty(\theta) + X_\infty(\theta)A_{cl}^T(\theta)$.

引理 2 对于闭环LPV系统(4), 系统渐近稳定且传递函数满足 $\|T_{zw}(s)\|_2 < \eta, \eta > 0$ 的充分条件为: 存在对称正定矩阵 $X_2(\theta)$ 、正定矩阵 $Q(\theta)$ 和矩阵 $G_1(\theta), G_2(\theta)$ 和 $G_3(\theta)$ 满足以下LMI约束^[19]:

$$\begin{bmatrix} M_2(\theta) & M_3(\theta) & B_{cl}(\theta) \\ * & -G_2^T(\theta) - G_2(\theta) & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} Q(\theta) & C_{2cl}(\theta)G_3(\theta) \\ * & G_3(\theta) + G_3^T(\theta) - X_2(\theta) \end{bmatrix} > 0, \quad (8)$$

$$\text{tr}(Q(\theta)) < \eta^2, \quad (9)$$

其中:

$$M_2(\theta) = A_{cl}(\theta)G_1(\theta) + G_1^T(\theta)A_{cl}^T(\theta),$$

$$M_3(\theta) = X_2(\theta) - G_1^T(\theta) + A_{cl}(\theta)G_2(\theta).$$

引理 3 对于闭环LPV系统(4), 如果存在对称正定矩阵 $X_D(\theta)$, 满足式(10)所示的LMI约束, 则称该LPV系统是 $D(q, r)$ 上稳定的^[11, 18, 20].

$$\begin{bmatrix} -rX_D(\theta) & qX_D(\theta) + A_{cl}(\theta)X_D(\theta) \\ * & -rX_D(\theta) \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

其中 $D(q, r)$ 为复平面上半径为 r , 中心在 $(-q, 0)$ 的圆盘LMI区域.

注 1 为了使闭环LPV系统同时具有 H_∞/H_2 指标且满足极点约束, 则引理1-3需要同时满足. 为了求解方便, 通常做法是假设 $X_\infty(\theta) = X_2(\theta) = X_D(\theta) = P$, 即在系统的不确定区域内采用一个公共的Lyapunov函数矩阵 P , 这显

然给控制器的设计带来了保守性. 对此, 可以通过引入松弛变量将系统矩阵与Lyapunov矩阵解耦, 以便在不同的顶点上使用不同的Lyapunov函数矩阵, 从而降低保守性.

引理 4 对于适当维数的任意矩阵 M, N 及单位矩阵 I , 下列条件是等价的^[17, 21]:

$$1) \begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix} < 0,$$

2) 存在适当维数的松弛变量矩阵 G 使得

$$M + \begin{bmatrix} N^T \\ -I \end{bmatrix} G^T + G[N \ -I] < 0$$

成立.

推论 1 对于闭环LPV系统(4), 若存在对称正定矩阵 $X_\infty(\theta)$ 以及对称矩阵 $G_1(\theta)$ 和 $G_2(\theta)$, 满足下列LMI约束:

$$\begin{bmatrix} M_3(\theta) & M_4(\theta) & B_{cl}(\theta) & M_5(\theta) \\ & -\gamma I & D_{1cl}(\theta) & C_{1cl}(\theta)G_2(\theta) \\ & * & -\gamma I & 0 \\ & * & * & -G_2(\theta) - G_2^T(\theta) \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

其中:

$$M_3(\theta) = A_{cl}(\theta)G_1(\theta) + G_1^T(\theta)A_{cl}^T(\theta),$$

$$M_4(\theta) = G_1^T(\theta)C_{1cl}^T(\theta),$$

$$M_5(\theta) = X_\infty(\theta) + A_{cl}(\theta)G_2(\theta) - G_1^T(\theta).$$

证 由引理1可知, 闭环LPV系统(4)稳定且具有 H_∞ 性能指标 γ 的充分条件为满足式(6). 利用具有适当维数的对称分块矩阵 $[I \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ I; 0 \ I \ 0]$ 分别左乘及右乘式(6), 即可得到式(12). 进一步, 式(12)可以等价展开为式(13).

根据引理4, 并引入 $G^T = [G_1(\theta) \ 0 \ 0 \ G_2(\theta)]$, 则式(13)即可化为式(11). 证毕.

注 2 类似于推论1的证明过程, 根据引理4, 可以很容易得到关于引理3的推论如下, 推论2证明过程略.

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\theta)X_\infty(\theta) + X_\infty(\theta)A_{cl}^T(\theta) \\ * \\ * \\ X_\infty(\theta)C_{1cl}^T(\theta) & B_{cl}(\theta) \\ -\gamma I & D_{1cl}(\theta) \\ * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ A_{cl}^T(\theta) & C_{1cl}^T(\theta) & 0 \end{bmatrix}}_{[I; N]^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{cl}(\theta) & X_\infty(\theta) \\ -\gamma I & D_{1cl}(\theta) & 0 & \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}}_M < 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ A_{cl}^T(\theta) & C_{1cl}^T(\theta) & 0 \end{bmatrix}}_{[I;N]} < 0, \quad (13)$$

推论 2 闭环LPV系统(4)在区域 $D(q, r)$ 上是稳定的, 当且仅当存在正定矩阵 $X_D(\theta)$, 以及对称矩阵 $G_1(\theta)$ 和 $G_2(\theta)$, 满足下列LMI约束:

$$\begin{bmatrix} -rX_D(\theta) & M_6(\theta) & X_D(\theta) - G_1^T(\theta) \\ * & -rX_D(\theta) & A_{cl}(\theta)G_2(\theta) \\ * & * & -G_2(\theta) - G_2^T(\theta) \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

其中 $M_6(\theta) = qX_D(\theta) + G_1^T(\theta)A_{cl}^T(\theta)$.

3.2 混合目标鲁棒动态输出反馈控制器(Mixed objective robust dynamic output feedback controller)

为了求解LPV系统的混合目标鲁棒动态输出反馈控制问题, 本文通过引入一种凸优化方法和解耦技术, 并给出了控制器存在的充分条件. 下面以定理的形式给出LPV系统混合目标鲁棒动态输出反馈控制的主要结果.

定理 1 对于闭环LPV系统(4), 若存在对称正定矩阵 $Q(\theta)$ 和

$$\tilde{P}(\theta) \triangleq \begin{bmatrix} P_{11}(\theta) & P_{12}(\theta) \\ * & P_{22}(\theta) \end{bmatrix},$$

以及具有适当维数的矩阵 $X(\theta), Y(\theta), U(\theta), \tilde{A}(\theta), \tilde{B}(\theta), \tilde{C}(\theta)$ 和 $\tilde{D}(\theta)$, 使得下列LMI约束成立:

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Gamma_1 & B_1(\theta) & \Xi_3 & \Xi_4 \\ * & \Xi_5 & \Gamma_2 & Y^T(\theta)B_1(\theta) & \Xi_6 & \Xi_7 \\ * & * & -\gamma I & D_{11}(\theta) & \Gamma_3 & \Gamma_4 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_8 & \Xi_9 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{10} \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

$$\Psi(\theta) = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & \Xi_4 & B_1(\theta) \\ * & \Xi_5 & \Xi_6 & \Xi_7 & Y^T(\theta)B_1(\theta) \\ * & * & \Xi_8 & \Xi_9 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{10} & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

$$\Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} Q(\theta) & \Pi_1 & \Pi_2 \\ * & \Pi_3 & \Pi_4 \\ * & * & \Pi_5 \end{bmatrix} > 0, \quad (17)$$

$$\text{tr}(Q(\theta)) < \eta^2, \quad (18)$$

$$\Theta(\theta) = \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & \Upsilon_2 & \Upsilon_3 & \Upsilon_4 & \Upsilon_5 & \Upsilon_6 \\ * & \Upsilon_7 & \Upsilon_8 & \Upsilon_9 & \Upsilon_{10} & \Upsilon_{11} \\ * & * & \Upsilon_1 & \Upsilon_2 & \Upsilon_{12} & \Upsilon_{13} \\ * & * & * & \Upsilon_7 & \Upsilon_{14} & \Upsilon_{15} \\ * & * & * & * & \Xi_8 & \Xi_9 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{10} \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= C_2(\theta)X(\theta) + D_{22}(\theta)\tilde{C}(\theta), \\ \Pi_2 &= C_2(\theta) + D_{22}(\theta)\tilde{D}(\theta)C_3(\theta), \\ \Pi_3 &= X(\theta) + X^T(\theta) - P_{11}(\theta), \\ \Pi_4 &= I + U(\theta) - P_{12}(\theta), \\ \Pi_5 &= Y(\theta) + Y^T(\theta) - P_{22}(\theta), \\ \Xi_1 &= \{A(\theta)X(\theta) + B_2(\theta)\tilde{C}(\theta)\} + \{*\}^T, \\ \Xi_2 &= A(\theta) + \tilde{A}^T(\theta) + B_2(\theta)\tilde{D}(\theta)C_3(\theta), \\ \Xi_3 &= P_{11}(\theta) + A(\theta)X(\theta) + B_2(\theta)\tilde{C}(\theta) - X^T(\theta), \\ \Xi_4 &= P_{12}(\theta) + A(\theta) + B_2(\theta)\tilde{D}(\theta)C_3(\theta) - U(\theta), \\ \Xi_5 &= \{Y^T(\theta)A(\theta) + \tilde{B}(\theta)C_3(\theta)\} + \{*\}^T, \\ \Xi_6 &= P_{12}^T(\theta) + \tilde{A}(\theta) - I, \\ \Xi_7 &= P_{22}(\theta) - Y(\theta) + Y^T(\theta)A(\theta) + \tilde{B}(\theta)C_3(\theta), \\ \Xi_8 &= -X(\theta) - X^T(\theta), \quad \Xi_9 = -U(\theta) - I, \\ \Xi_{10} &= -Y(\theta) - Y^T(\theta), \\ \Gamma_1 &= X^T(\theta)C_1^T(\theta) + \tilde{C}^T(\theta)D_{12}^T(\theta), \\ \Gamma_2 &= C_1^T(\theta) + C_3^T(\theta)\tilde{D}^T(\theta)D_{12}^T(\theta), \\ \Gamma_3 &= C_1(\theta)X(\theta) + D_{12}(\theta)\tilde{C}(\theta), \\ \Gamma_4 &= C_1(\theta) + D_{12}(\theta)\tilde{D}(\theta)C_3(\theta), \\ \Upsilon_1 &= -rP_{11}(\theta), \quad \Upsilon_2 = -rP_{12}(\theta), \\ \Upsilon_3 &= qP_{11}(\theta) + X^T(\theta)A^T(\theta) + \tilde{C}^T(\theta)B_2^T(\theta), \\ \Upsilon_4 &= qP_{12}(\theta) + \tilde{A}^T(\theta), \\ \Upsilon_5 &= P_{11}(\theta) - X^T(\theta), \\ \Upsilon_6 &= P_{12}(\theta) - U(\theta), \quad \Upsilon_7 = -rP_{22}(\theta), \\ \Upsilon_8 &= qP_{12}^T(\theta) + A^T(\theta) + C_3^T(\theta)\tilde{D}^T(\theta)B_2^T(\theta), \\ \Upsilon_9 &= qP_{22}(\theta) + A^T(\theta)Y(\theta) + C_3^T(\theta)\tilde{B}^T(\theta), \\ \Upsilon_{10} &= P_{12}^T(\theta) - I, \\ \Upsilon_{11} &= P_{22}(\theta) - Y(\theta), \\ \Upsilon_{12} &= A(\theta)X(\theta) + B_2(\theta)\tilde{C}(\theta), \\ \Upsilon_{13} &= A(\theta) + B_2(\theta)\tilde{D}(\theta)C_3(\theta), \\ \Upsilon_{14} &= \tilde{A}(\theta), \quad \Upsilon_{15} = Y^T(\theta)A(\theta) + \tilde{B}(\theta)C_3(\theta), \end{aligned}$$

则满足式(3)的LPV系统混合目标鲁棒动态输出反馈控制器系数矩阵可以由式(20)求得, 其中, 矩阵 $X_4(\theta)$ 和 $Y_4(\theta)$ 可以通过

$$X_4^T(\theta)Y_4(\theta) = U(\theta) - X^T(\theta)Y(\theta)$$

的满秩分解得到.

$$\begin{cases} A_K(\theta) = Y_4^{-T}(\theta)M_7(\theta)X_4^{-1}(\theta), \\ B_K(\theta) = Y_4^{-T}(\theta)M_8(\theta), \\ C_K(\theta) = M_9(\theta)X_4^{-1}(\theta), \\ D_K(\theta) = \tilde{D}(\theta), \end{cases} \quad (20)$$

其中:

$$\begin{aligned}
 M_7(\theta) &= \tilde{A}(\theta) - Y^T(\theta)A(\theta)X(\theta) - Y^T(\theta) \times \\
 &\quad B_2(\theta)\tilde{C}(\theta) - \tilde{B}(\theta)C_3(\theta)X(\theta) + \\
 &\quad Y^T(\theta)B_2(\theta)\tilde{D}(\theta)C_3(\theta)X(\theta), \\
 M_8(\theta) &= \tilde{B}(\theta) - Y^T(\theta)B_2(\theta)\tilde{D}(\theta), \\
 M_9(\theta) &= \tilde{C}(\theta) - \tilde{D}(\theta)C_3(\theta)X(\theta).
 \end{aligned}$$

证 很显然, 定理1中的式(18)满足式(9)的要求, 所以只需证明定理1满足式(15)–(17)和式(19)即可. 由引理2、推论1和推论2可知, 在控制器(3)作用下, 只要闭环LPV系统(4)在整个不确定区域内满足式(7)–(9)(11)和(14)所示的LMI约束, 即可使系统同时满足 H_∞/H_2 性能指标及极点约束要求. 证明见附录1.

注 3 定理1中待检验的线性矩阵不等式可行性条件是关于调度参数 θ 的无穷维条件, 而且这些条件关于参数是非凸的, 故而无法实现. 注意到, 如果给定

$$\begin{aligned}
 Q(\theta) &= Q, \quad \tilde{P}(\theta) = \tilde{P}, \\
 X(\theta) &= X, \quad Y(\theta) = Y, \\
 U(\theta) &= U, \quad \tilde{A}(\theta) = \tilde{A}, \quad \tilde{B}(\theta) = \tilde{B}, \\
 \tilde{C}(\theta) &= \tilde{C}, \quad \tilde{D}(\theta) = \tilde{D},
 \end{aligned}$$

那么很容易得到一个新的增益调度混合目标动态输出反馈控制器. 于是, 可以不加证明地得到如下推论.

推论 3 对于多胞LPV系统(4), 若存在矩阵 $Q(\theta) = Q > 0$, 对称正定矩阵

$$\tilde{P}(\theta) = \tilde{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ & P_{22} \end{bmatrix},$$

矩阵 $X, Y, U, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ 和 \tilde{D} , 满足LMI约束:

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Gamma_1 & B_{1i} & \Xi_3 & \Xi_4 \\ * & \Xi_5 & \Gamma_2 & Y^T B_{1i} & \Xi_6 & \Xi_7 \\ * & * & -\gamma I & D_{11i} & \Gamma_3 & \Gamma_4 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_8 & \Xi_9 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{10} \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & \Xi_4 & B_{1i} \\ * & \Xi_5 & \Xi_6 & \Xi_7 & Y^T B_{1i} \\ * & * & \Xi_8 & \Xi_9 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{10} & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} Q & \Pi_1 & \Pi_2 \\ * & \Pi_3 & \Pi_4 \\ * & * & \Pi_5 \end{bmatrix} > 0, \quad (23)$$

$$\text{tr}(Q) < \eta^2, \quad (24)$$

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & \Upsilon_2 & \Upsilon_3 & \Upsilon_4 & \Upsilon_5 & \Upsilon_6 \\ * & \Upsilon_7 & \Upsilon_8 & \Upsilon_9 & \Upsilon_{10} & \Upsilon_{11} \\ * & * & \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & \Upsilon_{12} & \Upsilon_{13} \\ * & * & * & \Upsilon_7 & \Upsilon_{14} & \Upsilon_{15} \\ * & * & * & * & \Xi_8 & \Xi_9 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{10} \end{bmatrix} < 0, \quad (25)$$

其中:

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= C_{2i}X + D_{22i}\tilde{C}, \quad \Pi_2 = C_{2i} + D_{22i}\tilde{D}C_{3i}, \\
 \Pi_3 &= X + X^T - P_{11}, \quad \Pi_4 = I + U - P_{12}, \\
 \Pi_5 &= Y + Y^T - P_{22}, \quad \Xi_6 = P_{12}^T + \tilde{A} - I, \\
 \Xi_1 &= \{A_iX + B_{2i}\tilde{C}\} + \{*\}^T, \\
 \Xi_2 &= A_i + \tilde{A}^T + B_{2i}\tilde{D}C_{3i}, \\
 \Xi_3 &= P_{11} + A_iX + B_{2i}\tilde{C} - X^T, \\
 \Xi_4 &= P_{12} + A_i + B_{2i}\tilde{D}C_{3i} - U, \\
 \Xi_5 &= \{Y^T A_i + \tilde{B}C_{3i}\} + \{*\}^T, \\
 \Xi_7 &= P_{22} - Y + Y^T A_i + \tilde{B}C_{3i}, \\
 \Xi_8 &= -X - X^T, \quad \Xi_9 = -U - I, \\
 \Xi_{10} &= -Y - Y^T, \\
 \Gamma_1 &= X^T C_{1i}^T + \tilde{C}^T D_{12i}^T, \\
 \Gamma_2 &= C_{1i}^T + C_{3i}^T \tilde{D}^T D_{12i}^T, \\
 \Gamma_3 &= C_{1i}X + D_{12i}\tilde{C}, \quad \Gamma_4 = C_{1i} + D_{12i}\tilde{D}C_{3i}, \\
 \Upsilon_1 &= -rP_{11}, \quad \Upsilon_2 = -rP_{12}, \\
 \Upsilon_3 &= qP_{11} + X^T A_i^T + \tilde{C}^T B_{2i}^T, \quad \Upsilon_4 = qP_{12} + \tilde{A}^T, \\
 \Upsilon_5 &= P_{11} - X^T, \quad \Upsilon_6 = P_{12} - U, \\
 \Upsilon_7 &= -rP_{22}, \quad \Upsilon_8 = qP_{12}^T + A_i^T + C_{3i}^T \tilde{D}^T B_{2i}^T, \\
 \Upsilon_9 &= qP_{22} + A_i^T Y + C_{3i}^T \tilde{B}^T, \quad \Upsilon_{10} = P_{12}^T - I, \\
 \Upsilon_{11} &= P_{22} - Y, \quad \Upsilon_{12} = A_iX + B_{2i}\tilde{C}, \\
 \Upsilon_{13} &= A_i + B_{2i}\tilde{D}C_{3i}, \quad \Upsilon_{14} = \tilde{A}, \\
 \Upsilon_{15} &= Y^T A_i + \tilde{B}C_{3i},
 \end{aligned}$$

则满足式(3)的LPV系统混合目标鲁棒动态输出反馈控制器系数矩阵可以由式(26)求得. 其中, 矩阵 X_4 和 Y_4 可以通过 $X_4^T Y_4 = U - X^T Y$ 的满秩分解得到.

$$\begin{cases} A_K(\theta) = Y_4^{-T} M_{10}(\theta) X_4^{-1}, \\ B_K(\theta) = Y_4^{-T} (\tilde{B} - Y^T B_2(\theta) \tilde{D}), \\ C_K(\theta) = (\tilde{C} - \tilde{D} C_3(\theta) X) X_4^{-1}, \\ D_K(\theta) = \tilde{D}, \end{cases} \quad (26)$$

其中

$$M_{10}(\theta) = \tilde{A} - Y^T A(\theta) X - Y^T B_2(\theta) \tilde{C} - \tilde{B} C_3(\theta) X + Y^T B_2(\theta) \tilde{D} C_3(\theta) X.$$

注 4 推论3虽然给出了求解式(3)中的混合目标鲁棒LPV动态输出反馈控制器 K_{DOF} 的有限维数LMI方法, 但是在所有的凸包顶点上采用一个公共的Lyapunov函数, 这无疑给问题的求解带来了保守性. 为降低保守性并得到可解性的条件, 参考文献 [9]和文献 [22]中的做法, 通过引入一种新

的凸化方法,在给定的有界多胞LPV系统 $\Omega(\theta)$ 的顶点处,将定理1中的无限维数LMI转化为有限维数参数化LMI.

定理 2 对于多胞LPV系统(4),若存在对称矩阵 $Q_i > 0$, 对称正定矩阵

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} P_{11i} & P_{12i} \\ * & P_{22i} \end{bmatrix},$$

矩阵 $X_i, Y_i, U_i, \tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i, \Delta_{ij}, \Upsilon_{ij}, \kappa_{ij}, \nu_{ij}$ 使得LMI(27)–(35)成立:

$$\Phi_{ij} + \Phi_{ji} - \Delta_{ij} - \Delta_{ij}^T < 0, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (27)$$

$$\Psi_{ij} + \Psi_{ji} - \Upsilon_{ij} - \Upsilon_{ij}^T < 0, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (28)$$

$$\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji} - \kappa_{ij} - \kappa_{ij}^T > 0, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (29)$$

$$\Theta_{ij} + \Theta_{ji} - \nu_{ij} - \nu_{ij}^T < 0, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (30)$$

$$\text{tr}(Q_i) < \eta^2, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (31)$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1N} \\ * & \Phi_{22} & \cdots & \Delta_{2N} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \Phi_{NN} \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Upsilon_{12} & \cdots & \Upsilon_{1N} \\ * & \Psi_{22} & \cdots & \Upsilon_{2N} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \Psi_{NN} \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \kappa_{12} & \cdots & \kappa_{1N} \\ * & \Lambda_{22} & \cdots & \kappa_{2N} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \Lambda_{NN} \end{bmatrix} > 0, \quad (34)$$

$$\Sigma_4 = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \nu_{12} & \cdots & \nu_{1N} \\ * & \Theta_{22} & \cdots & \nu_{2N} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \Theta_{NN} \end{bmatrix} < 0, \quad (35)$$

式中:

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Gamma_1 & B_{1j} & \Xi_3 & \Xi_4 \\ * & \Xi_5 & \Gamma_2 & Y_i^T B_{1j} & \Xi_6 & \Xi_7 \\ * & * & -\gamma I & D_{11j} & \Gamma_3 & \Gamma_4 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_8 & \Xi_9 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{10} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & \Xi_4 & B_{1j} \\ * & \Xi_5 & \Xi_6 & \Xi_7 & Y_i^T B_{1j} \\ * & * & \Xi_8 & \Xi_9 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{10} & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{ij} = \begin{bmatrix} Q_i & \Pi_1 & \Pi_2 \\ * & \Pi_3 & \Pi_4 \\ * & * & \Pi_5 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{ij} = \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & \Upsilon_2 & \Upsilon_3 & \Upsilon_4 & \Upsilon_5 & \Upsilon_6 \\ * & \Upsilon_7 & \Upsilon_8 & \Upsilon_9 & \Upsilon_{10} & \Upsilon_{11} \\ * & * & \Upsilon_{12} & \Upsilon_{13} & \Upsilon_{14} & \Upsilon_{15} \\ * & * & * & \Upsilon_7 & \Upsilon_{14} & \Upsilon_{15} \\ * & * & * & * & \Xi_8 & \Xi_9 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{10} \end{bmatrix},$$

以及

$$\Pi_1 = C_{2j}X_i + D_{22j}\tilde{C}_i, \quad \Pi_2 = C_{2j} + D_{22j}\tilde{D}_iC_{3j},$$

$$\Pi_3 = X_i + X_i^T - P_{11i}, \quad \Pi_4 = I + U_i - P_{12i},$$

$$\Pi_5 = Y_i + Y_i^T - P_{22i},$$

$$\Xi_1 = \{A_jX_i + B_{2j}\tilde{C}_i\} + \{*\}^T,$$

$$\Xi_2 = A_j + \tilde{A}_i^T + B_{2j}\tilde{D}_iC_{3j},$$

$$\Xi_3 = P_{11i} + A_jX_i + B_{2j}\tilde{C}_i - X_i^T,$$

$$\Xi_4 = P_{12i} + A_j + B_{2j}\tilde{D}_iC_{3j} - U_i,$$

$$\Xi_5 = \{Y_i^T A_j + \tilde{B}_i C_{3j}\} + \{*\}^T, \quad \Xi_6 = P_{12i}^T + \tilde{A}_i - I,$$

$$\Xi_7 = P_{22i} - Y_i + Y_i^T A_j + \tilde{B}_i C_{3j}, \quad \Xi_8 = -X_i - X_i^T,$$

$$\Xi_9 = -U_i - I, \quad \Xi_{10} = -Y_i - Y_i^T,$$

$$\Gamma_1 = X_i^T C_{1j}^T + \tilde{C}_i^T D_{12j}^T, \quad \Gamma_2 = C_{1j}^T + C_{3j}^T \tilde{D}_i^T D_{12j}^T,$$

$$\Gamma_3 = C_{1j}X_i + D_{12j}\tilde{C}_i, \quad \Gamma_4 = C_{1j} + D_{12j}\tilde{D}_iC_{3j},$$

$$\Upsilon_1 = -rP_{11i}, \quad \Upsilon_2 = -rP_{12i},$$

$$\Upsilon_3 = qP_{11i} + X_i^T A_j^T + \tilde{C}_i^T B_{2j}^T,$$

$$\Upsilon_4 = qP_{12i} + \tilde{A}_i^T, \quad \Upsilon_5 = P_{11i} - X_i^T, \quad \Upsilon_6 = P_{12i} - U_i,$$

$$\Upsilon_7 = -rP_{22i}, \quad \Upsilon_8 = qP_{12i}^T + A_j^T + C_{3j}^T \tilde{D}_i^T B_{2j}^T,$$

$$\Upsilon_9 = qP_{22i} + A_j^T Y_i + C_{3j}^T \tilde{B}_i^T, \quad \Upsilon_{10} = P_{12i}^T - I,$$

$$\Upsilon_{11} = P_{22i} - Y_i, \quad \Upsilon_{12} = A_j X_i + B_{2j} \tilde{C}_i,$$

$$\Upsilon_{13} = A_j + B_{2j} \tilde{D}_i C_{3j}, \quad \Upsilon_{14} = \tilde{A}_i,$$

$$\Upsilon_{15} = Y_i^T A_j + \tilde{B}_i C_{3j},$$

则满足式(3)的LPV系统混合目标鲁棒动态输出反馈控制器系数矩阵可以由式(20)求得. 其中:

$$X(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i, \quad Y(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Y_i,$$

$$U(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i U_i, \quad \tilde{A}(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{A}_i,$$

$$\tilde{B}(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{B}_i, \quad \tilde{C}(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{C}_i, \quad \tilde{D}(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{D}_i,$$

且矩阵 $X_4(\theta)$ 和 $Y_4(\theta)$ 可以通过 $X_4^T(\theta)Y_4(\theta) = U(\theta) - X^T(\theta)Y(\theta)$ 的满秩分解得到. 证明见附录2.

注5 由定理2的证明过程可以看出, Lyapunov函数矩阵 $P(\theta)$ 的形式为 $P(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$, 是参数依赖的. 因此, 与推论3相比较而言, 没有对任一矩阵变量施加其在整个参数不确定区域内为常数的要求, 因此, 定理2得到的结果具有更小的保守性.

注6 由于定理2中的线性矩阵不等式是有限维的, 易于工程应用. 同时定理2中的线性矩阵不等式约束不仅仅对所求矩阵是线性的, 而且对性能指标 γ 和 η 也是线性的. 因此, 可以把性能指标 γ 和 η 看成是被优化的变量. 在实际应用中, 性能指标 γ 和 η 不可能同时达到最优, 必须进行加权处理, 定义 $J = \alpha\gamma + \beta\eta$, 其中 α 和 β 为设定的权值. 于是定理2的求解条件变为

$$\begin{aligned} \min J \text{ s.t. to } & (27) - (35), \\ \text{over } & Q_i > 0, \tilde{P}_i > 0, X_i, Y_i, U_i, \tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \\ & \tilde{D}_i, \Delta_{ij}, \Upsilon_{ij}, \kappa_{ij}, \nu_{ij}, \gamma, \eta. \end{aligned} \quad (36)$$

4 仿真实例和分析(Simulation and analysis)

在理论分析的基础上, 考虑如图1所示的具有主动悬架系统的四分之一车辆模型^[25]. 车辆主动悬架系统的主要思想是根据悬架系统的状况和当前路面激励, 通过施加主动控制力, 或者主动地调节悬架系统的刚度或阻尼系数, 来实现操纵稳定性和行驶平顺性的提高. 图1中 m_s 为车身质量(簧上质量), m_u 为车轮质量(簧下质量); k_s 和 c_s 分别为悬架系统的刚度和阻尼系数, k_u 为轮胎刚度, 用来描述车轮中气体的可压缩性, z_u 和 z_s 分别为车身和车轮的位移; z_r 为路面垂直方向上的位移, 用来刻画路面的不平整度; u 为此悬架系统的主动控制输入. 四分之一车辆模型的理想动态特性微分方程为

$$\begin{aligned} m_s \ddot{z}_s(t) + c_s [\dot{z}_s(t) - \dot{z}_u(t)] + \\ k_s [z_s(t) - z_u(t)] = u(t), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} m_u \ddot{z}_u(t) + c_s [\dot{z}_u(t) - \dot{z}_s(t)] + k_s [z_u(t) - \\ z_s(t)] + k_u [z_u(t) - z_r(t)] = -u(t). \end{aligned} \quad (38)$$

从图1可以看出, 系统的干扰为路面的垂直位移 z_r , 一般可以描述为

$$\dot{z}_r = 2\pi q_0 \sqrt{G_0 V} \omega(t), \quad (39)$$

其中: G_0 为路面不平整度系数, V 为车辆前进速度, q_0 为参考空间频率, $\omega(t)$ 为零均值、单位强度的高斯白噪声. 在上述主动悬架系统中, 车身质量 m_s 通常会随着载客(货)的多少而发生变化. 不失一般性, 假设 $m_1 \leq m_s \leq m_2$. 选取如下状态变量:

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T,$$

并且

$$x_1(t) = z_s(t) - z_u(t), \quad x_2(t) = z_u(t) - z_r(t),$$

$$x_3(t) = \dot{z}_s(t), \quad x_4(t) = \dot{z}_u(t)$$

分别表示悬架动行程, 轮胎动位移, 车身垂直速度和车轮的垂直速度. 设计车辆主动悬架系统首先应考虑车辆乘坐舒适性要求, 而车身垂直加速度 $\ddot{z}_s(t)$ 是评价乘坐舒适性的主要指标; 然后要考虑车辆的操纵稳定性, 即轮胎与路面的附着效果.

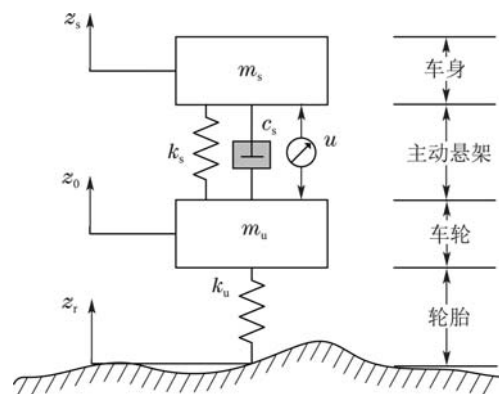


图1 具有主动悬架的四分之一车辆模型

Fig. 1 Quarter-car model with an active suspension

具体要求为: 1) 车身垂直加速度 $\ddot{z}_s(t)$ 越小, 乘坐舒适性越好; 2) 当车辆在不平路面行驶时其轮胎不能离开路面, 即轮胎与路面间的动载小于静载, 即 $k_u(z_u - z_r) \leq (m_s + m_u)g$; 3) 悬架动行程受到机械结构的限制, 可将悬架动行程限制在某一给定范围内以避免撞击限位块而破坏乘坐舒适性, 即 $|z_s - z_u| \leq Z_{\max}$; 4) 还需要考虑发动机功率限制, 控制器只能提供有限的作动力, 即 $|u| \leq u_{\max}$. 可见, 上述4项控制要求中, 后3个可以理解为约束条件, 而真正要求最小化的是第1个指标, 即减小车身垂直加速度. 综上所述, 主动悬架控制系统的加权性能输出和归一化输出分别为

$$z_\infty(t) = \begin{bmatrix} \frac{z_s(t) - z_u(t)}{Z_{\max}} \\ \frac{k_u(z_u(t) - z_r(t))}{(m_s + m_u)g} \\ \frac{u(t)}{u_{\max}} \end{bmatrix},$$

$$z_2(t) = \ddot{z}_s(t). \quad (40)$$

一般情况下, 车身垂直速度 $\dot{z}_s(t)$ 可以通过加速度传感器信号经过积分获得, 而悬架动行程 $z_s(t) - z_u(t)$ 可由位移传感器测量. 因此系统的测量输出可以选择为 $y(t) = [\dot{z}_s(t)^T \ (z_s(t) - z_u(t))^T]^T$. 因此,

主动悬架控制系统微分方程(37)–(38)的状态空间表达式可以归纳为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\varrho)x(t) + B_1(\varrho)\omega(t) + B_2(\varrho)u(t), \\ z_\infty(t) = C_1(\varrho)x(t) + D_{11}(\varrho)\omega(t) + D_{12}(\varrho)u(t), \\ z_2(t) = C_2(\varrho)x(t) + D_{22}(\varrho)u(t), \\ y(t) = C_3(\varrho)x(t), \end{cases} \quad (41)$$

其中: ϱ 表示调度参数 m_s , 相应系数矩阵表示如下:

$$A(m_s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & 0 & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix},$$

$$B_1(m_s) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\pi q_0 \sqrt{G_0 V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2(m_s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix},$$

$$C_1(m_s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{\max}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_u}{(m_s + m_u)g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{11}(m_s) = 0, \quad D_{12}(m_s) = [0 \ 0 \ \frac{1}{u_{\max}}]^T,$$

$$C_2(m_s) = [-\frac{k_s}{m_s} \ 0 \ -\frac{c_s}{m_s} \ \frac{c_s}{m_s}],$$

$$D_{22}(m_s) = \frac{1}{m_s}, \quad C_3(m_s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

通过简单分析, 不难看出主动悬架系统(41)中依赖于车身质量 m_s 的系统矩阵可以表示为

$$(A(m_s), B_2(m_s), C_1(m_s), C_2(m_s), D_{22}(m_s)) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i (A_i, B_{2i}, C_{1i}, C_{2i}, D_{22i}), \quad (42)$$

其中:

$$\alpha_1 = (\frac{1}{m_s} - \frac{1}{m_2}) / (\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}),$$

$$\alpha_2 = (\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_s}) / (\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}),$$

$$(A_i, B_{2i}, C_{1i}, C_{2i}, D_{22i}) =$$

$$(A(m_s), B_2(m_s), C_1(m_s), C_2(m_s), D_{22}(m_s)),$$

$$m_s = m_1 (i = 1) \text{ 或 } m_s = m_2 (i = 2).$$

参考文献[25], 选取图1中四分之一车模型的参数如表1所示.

表1 四分之一车模型的参数

Table 1 Parameters of the quarter-car model

m_s/kg	$k_s/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$c_s/(\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1})$	$k_u/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	m_u/kg
300	17000	1300	20000	50

表1中的数值是名义系统的参数, 实际车身质量 $m_s = (300 + \lambda) \text{ kg}$, 其中 $|\lambda| \leq \bar{\lambda}$. 假设 $\bar{\lambda} = 60 \text{ kg}$ (即车身质量在其名义值基础上波动 $\pm 20\%$), 假定悬架的最大动行程 $Z_{\max} = 0.03 \text{ m}$, 力发生器的最大动力输出为 $u_{\max} = 1000 \text{ N}$, 路面不平度系数为 $G_0 = 64 \times 10^{-8} \text{ m}^3$, 参考空间频率为 $q_0 = 0.1 \text{ m}^{-1}$, 车辆前进速度为 $V = 30 \text{ m/s}$. 在下面的计算过程中, 给定 $q = 5, r = 5, \alpha = \beta = 0.5$, 利用定理2中的结果和MATLAB标准的LMI工具箱, 求解相应的凸优化问题, 并对闭环系统的性能作以分析. 图2–5所示分别为车身垂直加速度、车轮动载荷、悬架动行程及主动悬架控制力时域波形图.

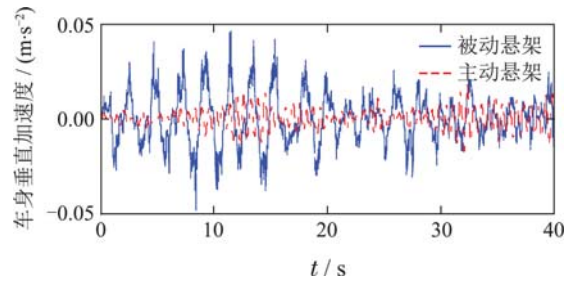


图2 车身垂直加速度

Fig. 2 Vertical body acceleration

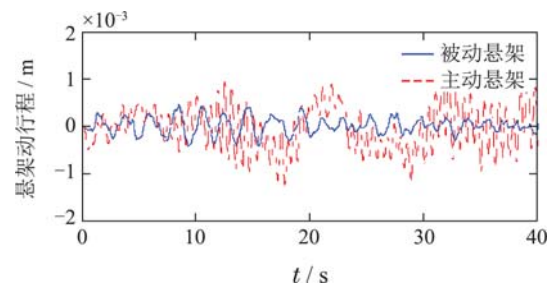


图3 悬架动行程

Fig. 3 Suspension deflection

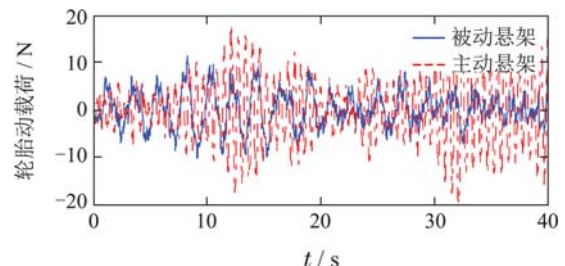


图4 车轮动载荷

Fig. 4 Dynamic tire load

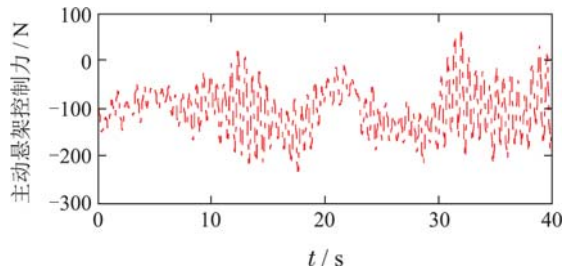


图5 主动悬架控制力

Fig. 5 Active control force

从图中可以看出,在变增益 H_2/H_∞ 控制器作用下,在轮胎载荷和悬架动行程分别满足操纵稳定性和悬架结构要求下,车身垂直加速度幅值大大减小.从时域响应得出被动悬架和主动悬架车身垂直加速度均方根值分别为0.01238和0.00516,降幅达到58.3%,控制效果明显.同时,考虑发动机功率的大小,求解控制器时对控制力做了约束,输出控制力在100 N之内,远小于额定最大控制力.

5 结论(Conclusion)

本文以一类具有参数不确定性和外界随机干扰的非线性系统为研究对象,在 H_∞ 控制、 H_2 控制和区域极点配置等鲁棒控制策略的基础上,首先,研究了连续时间多胞LPV系统的混合目标鲁棒动态输出反馈控制问题;其次,引入新的结构化松弛矩阵变量将Lyapunov函数矩阵与系统矩阵解耦,通过设计参数依赖Lyapunov函数矩阵降低了控制器的保守性;最后,通过严格的数学推导将满足期望性能的混合目标鲁棒动态输出反馈控制问题转化为线性矩阵不等式框架内的凸优化问题.仿真结果表明,该算法具有较好的控制稳定性、鲁棒性、干扰抑制能力,是一种行之有效的非线性系统鲁棒控制策略.

参考文献(References):

- [1] APKARIAN P, ADAMS R J. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1998, 6(1): 21 – 32.
- [2] HANIFZADEGAN M, NAGAMUNE R. Smooth switching LPV controller design for LPV systems [J]. *Automatica*, 2014, 50(5): 1481 – 1488.
- [3] WHITE B A, BRUYERE L, TSOURDOS A. Missile autopilot design using quasi-LPV polynomial eigenstructure assignment [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 43(4): 1470 – 1483.
- [4] CAI G H, SONG J M, CHEN X X. Flight control system design for hypersonic reentry vehicle based on LFT-LPV method [J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2014, 228(7): 1130 – 1140.
- [5] RODRIGUES M, SAHNOUN M, THEILLIOL D, et al. Sensor fault detection and isolation filter for polytopic LPV systems: A winding machine application [J]. *Journal of Process Control*, 2013, 23(5): 805 – 816.
- [6] LI M X, JIA Y M, DU J P. LPV control with decoupling performance of 4WS vehicles under velocity-varying motion [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, 22(5): 1708 – 1724.
- [7] HASHEMI S M, ABBAS H S, WERNER H, et al. Low-complexity linear parameter-varying modeling and control of a robotic manipulator [J]. *Control Engineering Practice*, 2012, 20(3): 248 – 257.
- [8] HOFFMANN C, WERNER H. A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, 23(2): 416 – 433.
- [9] CAI G B, HU C H, YIN B J, et al. Gain-Scheduled H_2 controller synthesis for continuous-time polytopic LPV systems [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, <http://dx.doi.org/10.1155/972624>.
- [10] QIN W W, LIU J Y, LIU G, et al. Robust parameter dependent receding horizon H_∞ control of flexible air-breathing hypersonic vehicles with input constraints [J]. *Asian Journal of Control*, 2015, 17(2): 508 – 522.
- [11] CHILALI M, GAHINET P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 358 – 367.
- [12] BAI J J, LU R Q, LIU X, et al. Fuzzy regional pole placement based on fuzzy Lyapunov functions [J]. *Neurocomputing*, 2015, 167(C): 467 – 473.
- [13] BAI J J, SU H Y, WANG J, et al. On pole placement in LMI region for descriptor linear systems [J]. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2012, 8(4): 2613 – 2624.
- [14] CARSTEN W S. Multiobjective H_∞/H_2 control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(6): 1054 – 1062.
- [15] GUIMARAES F G, PALHARES R M, CAMPELO F, et al. Design of mixed H_2/H_∞ control systems using algorithms inspired by the immune system [J]. *Information Sciences*, 2007, 177(20): 4368 – 4386.
- [16] LI H, GUAN C Q, ZHOU D J, et al. Mixed H_2/H_∞ linear parameter varying state feedback control for bank-to-turn missile autopilot design [C] // *2010 International Conference on Computer, Mechatronics, Control and Electronic Engineering*. Changchun: IEEE, 2010: 240 – 246.
- [17] APKARIAN P, GAHINET P. A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(5): 853 – 864.
- [18] SAÚL M D O, TORNILSIN S, PUIG V, et al. Fault-tolerant control design using linear parameter varying approach [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(14): 1969 – 1988.
- [19] HE Liang. *Multi-objective optimal theory and its application via parameter-dependent Lyapunov function* [D]. Harbin: Harbin Institute of technology, 2007.
(贺亮. 基于参数依赖Lyapunov函数的多目标优化理论及应用 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007.)
- [20] LIU Man, JING Yuanwei, ZHANG Siying. Research approaches on pole assignment in specified region [J]. *Control and Decision*, 2005, 20(3): 241 – 245.
(刘满, 井元伟, 张嗣瀛. 区域极点配置问题的研究方法 [J]. 控制与决策, 2005, 20(3): 241 – 245.)
- [21] WU F. *Control of linear parameter varying systems* [D]. Berkeley, USA: University of California, 1995.
- [22] BLANCHINI F, CASAGRANDE D, MIANI S, et al. Stable LPV realization of parametric transfer functions and its applications to gain scheduling control designs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2271 – 2281.
- [23] GAHINET P, NEMIROVSKI A, LAUB A J, et al. *LMI Control Toolbox User's Guide* [M]. Natick, MA: The Math Work Inc, 1995.

- [24] YU Zhongwei, CHEN Huitang, WANG Yuejuan. Robot manipulator LPV robust H_∞ controller design based on LMI approach [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(2): 146–150.
(虞忠伟, 陈辉堂, 王月娟. 基于LMI方法的机器人LPV鲁棒 H_∞ 控制器设计 [J]. 控制与决策, 2001, 16(2): 146–150.)
- [25] GAO Huijun. *Analysis and synthesis of uncertain dynamic systems based on parameter-dependent Lyapunov function* [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2005.
(高会军. 基于参数依赖Lyapunov函数的不确定动态系统的分析与综合 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2005.)

附录1 定理1证明 (Appendix 1 Proof of Theorem 1)

证 令 $X_\infty(\theta) = X_2(\theta) = X_D(\theta) = P(\theta)$, $G_1(\theta) = G_2(\theta) = G_3(\theta) = G(\theta)$. 由引理2和引理3可知, $X_D(\theta) > 0$ 和 $G_3(\theta) + G_3^T(\theta) - X_2(\theta) > 0$, 所以 $G(\theta) > 0$, 即矩阵 $G(\theta)$ 可逆. 记 $W(\theta) = G^{-1}(\theta)$, 并将矩阵 $G(\theta)$ 和 $W(\theta)$ 分块表示为

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} X(\theta) & X_1(\theta) \\ X_4(\theta) & X_3(\theta) \end{bmatrix}, \quad W(\theta) = \begin{bmatrix} Y(\theta) & Y_1(\theta) \\ Y_4(\theta) & Y_3(\theta) \end{bmatrix}. \quad (\text{A1})$$

在不失一般性情况下, 假设 $X_4(\theta)$ 和 $Y_4(\theta)$ (如果它们为奇异矩阵, 可以对 $X_4(\theta)$ 和 $Y_4(\theta)$ 分别施加充分小范数的矩阵扰动 $\Delta X_4(\theta)$ 和 $\Delta Y_4(\theta)$, 能够使得 $X_4(\theta) + \Delta X_4(\theta)$ 和 $Y_4(\theta) + \Delta Y_4(\theta)$ 均为非奇异^[9]), 并定义

$$\Psi(\theta) = \begin{bmatrix} X(\theta) & I \\ X_4(\theta) & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} I & Y(\theta) \\ 0 & Y_4(\theta) \end{bmatrix}. \quad (\text{A2})$$

则可以得到下列矩阵运算关系:

$$\begin{cases} W(\theta)\Psi(\theta) = \Lambda(\theta), & G(\theta)\Lambda(\theta) = \Psi(\theta), \\ X(\theta)Y(\theta) + X_1(\theta)Y_4(\theta) = I. \end{cases} \quad (\text{A3})$$

将式(5)代入式(7)–(8) (11)–(12)中, 且分别用 $\text{diag}\{A(\theta), I, I, \Lambda(\theta)\}$, $\text{diag}\{A(\theta), \Lambda(\theta), I\}$, $\text{diag}\{I, \Lambda(\theta)\}$, $\text{diag}\{A(\theta), \Lambda(\theta), \Lambda(\theta)\}$ 对式(7)–(8) (11)–(14)进行全等变换, 可分别得到

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Lambda^T(\theta)B_{cl}(\theta) \\ * & \Delta_3 & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{A4})$$

$$\begin{bmatrix} Q(\theta) & C_{2cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) \\ * & \Delta_4 \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{A5})$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_5 & \Delta_6 & \Lambda^T(\theta)B_{cl}(\theta) & \Delta_7 \\ * & -\gamma I & D_{1cl}(\theta) & C_{1cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & \Delta_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{A6})$$

$$\begin{bmatrix} -r\Lambda^T(\theta)P(\theta)\Lambda(\theta) & \Delta_8 & \Delta_9 \\ * & -r\Lambda^T(\theta)P(\theta)\Lambda(\theta) & \Delta_{10} \\ * & * & \Delta_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{A7})$$

其中:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Lambda^T(\theta)A_{cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) + \{*\}^T, \\ \Delta_2 &= \Lambda^T(\theta)P(\theta)\Lambda(\theta) - \Lambda^T(\theta)G^T(\theta)\Lambda(\theta) + \\ &\quad \Lambda^T(\theta)A_{cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta), \\ \Delta_3 &= -\Lambda^T(\theta)G^T(\theta)\Lambda(\theta) - \{*\}^T, \end{aligned}$$

$$\Delta_4 = \Lambda^T(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) + \Lambda^T(\theta)G^T(\theta)\Lambda(\theta) - \Lambda^T(\theta)P(\theta)\Lambda(\theta),$$

$$\Delta_5 = \Lambda^T(\theta)A_{cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) + \{*\}^T,$$

$$\Delta_6 = \Lambda^T(\theta)G^T(\theta)C_{1cl}^T(\theta),$$

$$\Delta_7 = \Lambda^T(\theta)P(\theta)\Lambda(\theta) + \Lambda^T(\theta)A_{cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) - \Lambda^T(\theta)G^T(\theta)\Lambda(\theta),$$

$$\Delta_8 = q\Lambda^T(\theta)P(\theta)\Lambda(\theta) + \Lambda^T(\theta)G^T(\theta)A_{cl}^T(\theta)\Lambda(\theta),$$

$$\Delta_9 = \Lambda^T(\theta)P(\theta)\Lambda(\theta) - \Lambda^T(\theta)G^T(\theta)\Lambda(\theta),$$

$$\Delta_{10} = \Lambda^T(\theta)A_{cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta).$$

进一步, 由式(5)(A1)–(A3)可以推导出以下关系式:

$$\begin{cases} B_{cl}^T(\theta)\Lambda = [B_1^T(\theta) & B_1^T(\theta)Y(\theta)], \\ \Lambda^T(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} X(\theta) & I \\ \Delta_{11} & Y^T(\theta) \end{bmatrix}, \\ C_{1cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) = [\Delta_{12} & \Delta_{13}], \\ C_{2cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) = [\Delta_{14} & \Delta_{15}], \\ \Lambda^T(\theta)A_{cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} \Delta_{16} & \Delta_{17} \\ \Delta_{18} & \Delta_{19} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (\text{A8})$$

其中:

$$\Delta_{11} = Y^T(\theta)X(\theta) + Y_4^T(\theta)X_4(\theta),$$

$$\Delta_{12} = C_1(\theta)X(\theta) + D_{12}(\theta)D_K(\theta)C_3(\theta)X(\theta) + D_{12}(\theta)C_K(\theta)X_4(\theta),$$

$$\Delta_{13} = C_1(\theta) + D_{12}(\theta)D_K(\theta)C_3(\theta),$$

$$\Delta_{14} = C_2(\theta)X(\theta) + D_{22}(\theta)D_K(\theta)C_3(\theta)X(\theta) + D_{22}(\theta)C_K(\theta)X_4(\theta),$$

$$\Delta_{15} = C_2(\theta) + D_{22}(\theta)D_K(\theta)C_3(\theta),$$

$$\Delta_{16} = A(\theta)X(\theta) + B_2(\theta)D_K(\theta)C_3(\theta)X(\theta) + B_2(\theta)C_K(\theta)X_4(\theta),$$

$$\Delta_{17} = A(\theta) + B_2(\theta)D_K(\theta)C_3(\theta),$$

$$\Delta_{18} = Y^T(\theta)(A(\theta)X(\theta) + B_2(\theta)D_K(\theta)C_3(\theta)X(\theta)) +$$

$$Y^T(\theta)B_2(\theta)C_K(\theta)X_4(\theta) +$$

$$Y_4^T(\theta)(B_K(\theta)C_3(\theta)X(\theta) + A_K(\theta)X_4(\theta)),$$

$$\Delta_{19} = Y^T(\theta)A(\theta) + Y^T(\theta)B_2(\theta)D_K(\theta)C_3(\theta) +$$

$$Y_4^T(\theta)B_K(\theta)C_3(\theta).$$

同时, 做如下变量替换:

$$\begin{cases} \Lambda^T(\theta)P(\theta)\Lambda(\theta) = \tilde{P}(\theta) = \begin{bmatrix} P_{11}(\theta) & P_{12}(\theta) \\ * & P_{22}(\theta) \end{bmatrix}, \\ U(\theta) = X^T(\theta)Y(\theta) + X_4^T(\theta)Y_4(\theta), \\ \tilde{A}(\theta) = Y^T(\theta)(A(\theta)X(\theta) + B_2(\theta)D_K(\theta)C_3(\theta)X(\theta)) + \\ Y^T(\theta)B_2(\theta)C_K(\theta)X_4(\theta) + \\ Y_4^T(\theta)(B_K(\theta)C_3(\theta)X(\theta) + A_K(\theta)X_4(\theta)), \\ \tilde{B}(\theta) = Y^T(\theta)B_2(\theta)D_K(\theta) + Y_4^T(\theta)B_K(\theta), \\ \tilde{C}(\theta) = D_K(\theta)C_3(\theta)X(\theta) + C_K(\theta)X_4(\theta), \\ \tilde{D}(\theta) = D_K(\theta). \end{cases}$$

则式(A8)可以替换为

$$\begin{cases} A^T(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} X(\theta) & I \\ U^T(\theta) & Y^T(\theta) \end{bmatrix}, \\ C_{1cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) = [\Delta_{20} \quad \Delta_{21}], \\ C_{2cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) = [\Delta_{22} \quad \Delta_{23}], \\ A^T(\theta)A_{cl}(\theta)G(\theta)\Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} \Delta_{24} & \Delta_{25}, \\ \tilde{A}(\theta) & \Delta_{26} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (A9)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Delta_{20} &= C_1(\theta)X(\theta) + D_{12}(\theta)\tilde{C}(\theta), \\ \Delta_{21} &= C_1(\theta) + D_{12}(\theta)\tilde{D}(\theta)C_3(\theta), \\ \Delta_{22} &= C_2(\theta)X(\theta) + D_{22}(\theta)\tilde{C}(\theta), \\ \Delta_{23} &= C_2(\theta) + D_{22}(\theta)\tilde{D}(\theta)C_3(\theta), \\ \Delta_{24} &= A(\theta)X(\theta) + B_2(\theta)\tilde{C}(\theta), \\ \Delta_{25} &= A(\theta) + B_2(\theta)\tilde{D}(\theta)C_3(\theta), \\ \Delta_{26} &= Y^T(\theta)A(\theta) + \tilde{B}(\theta)C_3(\theta). \end{aligned}$$

利用式(A9), 式(A4)–(A7)可分别转化为定理1中的式(16)–(19). 根据推论1、推论2、引理2及多胞系统的多凸特性可知, 闭环LPV系统(4)在动态输出反馈控制器 K_{DOF} 作用下是渐近稳定的, 不仅满足一定的 H_∞ 和 H_2 性能指标, 而且闭环系统极点配置到预设的LMI区域. 证毕.

附录 2 定理2的证明 (Appendix 2 Proof of Theorem 2)

证 由定理1可知, 存在形如式(3)的混合目标动态输出反馈控制器 K_{DOF} 的充分条件为如果矩阵 $Q(\theta) > 0$, $\tilde{P}(\theta) > 0$, $X(\theta)$, $Y(\theta)$, $U(\theta)$, $\tilde{A}(\theta)$, $\tilde{B}(\theta)$, $\tilde{C}(\theta)$ 和 $\tilde{D}(\theta)$ 满足式(9)–(15). 假设上述满足条件的矩阵具有如下形式:

$$\begin{cases} \tilde{P}(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{P}_i = \sum_{i=1}^N \alpha_i \begin{bmatrix} P_{11i} & P_{12i} \\ * & P_{22i} \end{bmatrix}, \\ Q(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Q_i, \quad X(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i, \\ Y(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Y_i, \quad U(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i U_i, \\ \tilde{A}(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{A}_i, \quad \tilde{B}(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{B}_i, \\ \tilde{C}(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{C}_i, \quad \tilde{D}(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{D}_i, \end{cases} \quad (A10)$$

那么, 利用式(27)–(30)(32)–(35)及式(A10), 可得如下结果:

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \alpha_i \alpha_j \Phi_{ij} = \\ &\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \Phi_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (\Phi_{ij} + \Phi_{ji}) < \\ &\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \Phi_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (\Delta_{ij} + \Delta_{ij}^T) = \\ &\varphi^T \Sigma_1 \varphi, \end{aligned} \quad (A11)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\theta) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \alpha_i \alpha_j \Psi_{ij} = \\ &\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \Psi_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (\Psi_{ij} + \Psi_{ji}) < \\ &\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \Psi_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ij}^T) = \\ &\varphi^T \Sigma_2 \varphi, \end{aligned} \quad (A12)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(\theta) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \alpha_i \alpha_j \Lambda_{ij} = \\ &\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \Lambda_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}) < \\ &\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \Lambda_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (\kappa_{ij} + \kappa_{ij}^T) = \\ &\varphi^T \Sigma_3 \varphi, \end{aligned} \quad (A13)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \alpha_i \alpha_j \Theta_{ij} = \\ &\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \Theta_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (\Theta_{ij} + \Theta_{ji}) < \\ &\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \Theta_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (\nu_{ij} + \nu_{ij}^T) = \\ &\varphi^T \Sigma_4 \varphi, \end{aligned} \quad (A14)$$

其中

$$\varphi \triangleq [\alpha_1 I \quad \alpha_2 I \quad \cdots \quad \alpha_N I]^T.$$

由此得知, 不等式(32)–(35)保证 $\Phi(\theta) < 0$, $\Psi(\theta) < 0$, $\Lambda(\theta) > 0$ 和 $\Theta(\theta) < 0$ 能各自成立. 此外, 由于 $Q(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Q_i$ 和 $\text{tr}(Q(\theta)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{tr}(Q_i)$ 的存在, 因此如果式(31)成立, 则可以等价得到式(18)成立. 将式(A10)代入式(20), 可以得到相应的控制器. 证毕.

作者简介:

姜伟 (1989–), 男, 助教, 博士研究生, 目前研究方向为飞行器建模、鲁棒非线性控制、线性变参数控制, E-mail: yixiantian123456@126.com;

王宏力 (1965–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为导航制导与控制、惯性/星光复合制导、先进控制理论, E-mail: wanghongli.1965@163.com;

陆敬辉 (1983–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为导航制导与控制、星光制导、智能控制, E-mail: lujinghui.1983@163.com;

秦伟伟 (1982–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为先进控制理论、模型预测控制及应用、飞行器控制系统设计, E-mail: qww1982@163.com;

蔡光斌 (1982–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为线性变参数控制、高超声速飞行器控制系统设计, E-mail: cgb0712@163.com.