

一类乘积型区间二型模糊控制器的解析结构

龙祖强^{1,2}, 许岳兵^{1†}, 李 龙¹

(1. 衡阳师范学院 物理与电子工程学院, 湖南 衡阳 421002;

2. 韦恩州立大学 计算机与电子工程系, 美国 密歇根 底特律 48202)

摘要: 区间二型模糊控制器的降型算法需要使用迭代计算, 是导致其解析结构推导困难的主要原因. 针对乘积型区间二型模糊控制器, 本文提出了一种新的解析结构推导方法. 区间二型模糊控制器的配置为: 三角形输入模糊集, 一型输出模糊单值, 集合中心法降型器, 平均法解模糊器和基于乘积型“与”操作的规则前件. 通过对比传统 PID 控制器的解析结构, 证明了区间二型模糊控制器等效于两个 PI(或 PD) 控制器之和. 利用 KM 算法的迭代终止条件, 提出了 6 步骤 IC 划分法, 保证了激活子空间的正确划分. 叠加各个子空间, 即可得出全局 IC 划分图. 为了避免重复求解符号数学方程, 提出了 IC 边界线的直接定义法, 改进了 6 步骤 IC 划分法的便利性. 本文方法避开了降型算法的迭代计算, 可以保证推导出区间二型模糊控制器的闭环解析表达式.

关键词: 模糊系统; 模糊集合; 模糊控制器; 隶属度函数; 区间二型模糊逻辑; 解析结构

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Analytical structure of a class of product & interval-type-2 fuzzy controllers

LONG Zu-qiang^{1,2}, XU Yue-bing^{1†}, LI Long¹

(1. College of Physics and Electronic Engineering, Hengyang Normal University, Hengyang Hunan 421002, China;

2. Department of Computers and Electronic Engineering, Wayne State University, Detroit MI 48202, USA)

Abstract: The difficulties in deriving the analytical structure of IT2 (interval type-2) fuzzy controllers chiefly come from the iterative computation in type-reduction algorithms. In this paper, we propose a novel technique for deriving the analytical structure of the IT2 fuzzy controllers based on product AND operators. The controllers are configured with triangle IT2 input fuzzy sets, T1 output fuzzy singletons, center-of-sets type reducer, centroid defuzzifier, and product AND operators in precedent parts of fuzzy rules. In comparison to the analytical structure of traditional PID controllers, it is proven that such IT2 fuzzy controllers are equivalent to the sum of two nonlinear PI (or PD) controllers. By means of the iteration-stopping conditions of KM algorithm, an IC-partitioning approach with six steps is presented, which guarantees that a fired subspace can be partitioned correctly. Superimposing all subspaces can produce an overall figure of IC partitions. To avoid solving the symbolic mathematical equations repeatedly, a direct method is given to determine IC boundaries, which facilitates the six-step approach of IC partitioning. Our approach sidesteps the iterative computation in type-reducing algorithm, and guarantees that the closed-loop analytical expression of the IT2 fuzzy controllers can be obtained.

Key words: fuzzy systems; fuzzy sets; fuzzy controllers; membership functions; IT2 fuzzy logic; analytical structure

1 引言(Introduction)

研究者通常把模糊控制器视为黑箱控制器, 其原因是很难获得它的解析结构信息, 严格数学意义上的系统分析与设计(例如, 稳定性分析)很难展开. 在大多数情况下, 模糊控制器需要采用试错法反复地进行仿真或实物实验. 相反地, 若能够获知模糊控制器的解析结构, 则可避免试错法的耗时费力的弊端, 有助于

实现模糊控制器的系统化设计与分析. 更重要地, 若能获知模糊控制器的解析结构, 则可以改善模糊控制理论的完整性与严谨性, 对其后续发展具有重要意义. 为此, 一些学者进行了大量的探索与研究, 取得了许多重要成果. 这些成果可分为两类: 一型模糊控制器的解析结构研究^[1-9]和区间二型模糊控制器的解析结构研究^[10-16]. 对于一型模糊控制器, 推导解析结构的

收稿日期: 2015-09-25; 录用日期: 2016-03-21.

†通信作者. E-mail: yuebingxu@126.com; Tel.: +86 734-8484935.

本文责任编辑: 詹宜巨.

国家自然科学基金项目(61074069, 11401185), 湖南省重点建设学科, 衡阳师范学院湖南省应用基础研究基地开放基金项目(GD15K05)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61074069, 11401185), Construct Program of Key Discipline in Hunan Province and Open Fund of Applied Fundamental Research in Hengyang Normal University, Hunan Province (GD15K05).

困难主要来自于模糊规则前件的“与”操作. 对于乘积型“与”操作, 解析结构的推导过程相对容易^[6]; 对于Zadeh“与”操作(即最小推理法), 解析结构的推导过程相对复杂. 这是因为Zadeh“与”需要判断相关隶属度函数以选择最小隶属度作为规则的激活强度, 这个判断与选择过程正是推导控制器解析结构的最大障碍. 为了解决这个问题, Ying等人提出了把输入空间划分为一组IC(input combination), 以保证在每个IC内最小推理法得到相同的隶属度函数, 从而避开了上述判断与选择过程, 为解析结构的推导创造了便利条件^[5,9]. 特别地, 文献[9]把这种方法推广到了基于任意形状模糊集和Zadeh“与”操作的一型模糊控制器, 标志着这一类模糊控制器的解析结构推导方法已经趋于成熟.

相对于一型模糊控制器, 区间二型模糊控制器的解析结构推导过程就要困难得多, 其原因在于需要迭代计算以求取降型算法的切换点. 降型算法包括KM(Karnik-Mendel)算法和类KM算法. 对于这类控制器, 迭代计算是解析结构推导的最大障碍. 已有研究的解决方法大致可分3步^[10-13]: 第1步, 针对上(下)界隶属度函数的形状导出一组Input-IC; 第2步, 针对切换点利用KM算法的迭代终止条件导出一组Case-IC^[13]; 第3步, 叠加前述两步的IC, 使每个IC内有确定的上(下)界隶属度函数和切换点, 从而获得每个IC对应的解析表达式. 但是, 已经有成果仅研究了基于Zadeh“与”操作的区间二型模糊控制器, 没有讨论乘积型“与”操作的情况. 然而, 这两种“与”操作对前件隶属度函数的处理方式完全不同, 从而导致了解析结构的推理方法存在较大差异. 另外, 乘积型“与”操作亦是一类重要的模糊规则前件推理方法, 因其计算方便得到了很多学者与工程师的欢迎. 因此, 研究乘积型区间二型模糊控制器的解析结构具有重要的理论意义与应用价值.

2 乘积型区间二型模糊控制器的配置(Configuration of product & IT2 fuzzy controllers)

考虑如下双输入单输出区间二型模糊控制器, 其规则前件采用乘积型“与”操作, 后件采用一型模糊单值, 降型器采用集合中心法, 解模糊采用平均法. 设 k 为控制器的采样步, 两个输入变量分别记为 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$, 且 $x_2(k) = x_1(k) - x_1(k-1)$, 输出变量采用增量型输出方式且记为 $\Delta u(k)$. 为了简化记号, 使用 x_1, x_2 和 Δu 替代 $x_1(k), x_2(k)$ 和 $\Delta u(k)$. x_1 的论域 $U_1 = [L_1, L_m]$ 划分为 $m-1$ 个子区间 $[L_1, L_2], \dots, [L_i, L_{i+1}], \dots, [L_{m-1}, L_m]$, 且对应于 m 个三角形区间二型模糊集 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m$, 如图1所示. 类似地, x_2 的论域 $U_2 = [S_1, S_m]$ 划分为 $n-1$ 个子区间

$$[S_1, S_2], \dots, [S_j, S_{j+1}], \dots, [S_{n-1}, S_n],$$

且对应于 n 个三角形区间二型模糊集 $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_n$, 如图2所示.

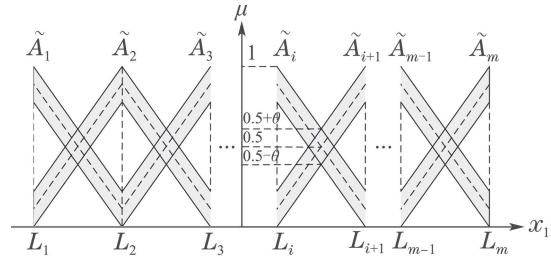


图1 论域 $U_1 = [L_1, L_m]$ 的模糊集合

Fig. 1 Fuzzy sets of the universe $U_1 = [L_1, L_m]$

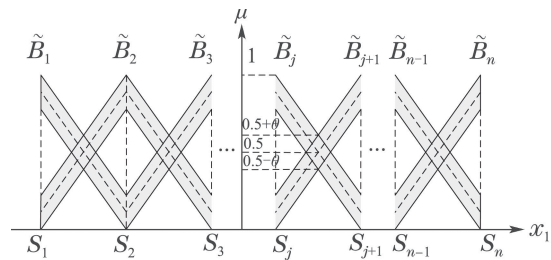


图2 论域 $U_2 = [S_1, S_m]$ 的模糊集合

Fig. 2 Fuzzy sets of the universe $U_2 = [S_1, S_m]$

为简化问题, 本文做如下假设:

假设 1 对于任意的 $x_1 \in [L_i, L_{i+1}]$ ($1 \leq i \leq m-1$), 仅有两个相邻的模糊集(\tilde{A}_i 和 \tilde{A}_{i+1})被激活.

假设 2 对于任意的 $x_2 \in [S_j, S_{j+1}]$ ($1 \leq j \leq n-1$), 仅有两个相邻的模糊集(\tilde{B}_j 和 \tilde{B}_{j+1})被激活.

在图1-2中, 虚线表示不确定域的中心线. 不确定域的边界由参数 θ ($0 < \theta < 0.5$)描述, 即上(下)边界的位置是通过从中心线出发, 垂直地向上(下)移动 θ 数值单位来确定的. 两个相邻模糊集 \tilde{A}_i 和 \tilde{A}_{i+1} 的上(下)界隶属度函数定义如下:

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}_i}(x_1) = \begin{cases} a_i x_1 + \underline{b}_i, & x_1 \in [L_i, L_{i+1}], \\ 0, & x_1 \notin [L_i, L_{i+1}], \end{cases} \quad (1)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}_i}(x_1) = \begin{cases} a_i x_1 + \bar{b}_i, & x_1 \in [L_i, L_{i+1}], \\ 0, & x_1 \notin [L_i, L_{i+1}], \end{cases} \quad (2)$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}_{i+1}}(x_1) = \begin{cases} a_{i+1} x_1 + \underline{b}_{i+1}, & x_1 \in [L_i, L_{i+1}], \\ 0, & x_1 \notin [L_i, L_{i+1}], \end{cases} \quad (3)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}_{i+1}}(x_1) = \begin{cases} a_{i+1} x_1 + \bar{b}_{i+1}, & x_1 \in [L_i, L_{i+1}], \\ 0, & x_1 \notin [L_i, L_{i+1}], \end{cases} \quad (4)$$

其中:

$$a_i = \frac{1-2\theta}{L_i - L_{i+1}}, \quad \underline{b}_i = -\frac{L_{i+1}(1-2\theta)}{L_i - L_{i+1}},$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_i &= -\frac{L_{i+1}(1-2\theta)}{L_i - L_{i+1}} + 2\theta, \quad a_{i+1} = \frac{1-2\theta}{L_{i+1} - L_i}, \\ \underline{b}_{i+1} &= -\frac{L_i(1-2\theta)}{L_{i+1} - L_i}, \quad \bar{b}_{i+1} = -\frac{L_i(1-2\theta)}{L_{i+1} - L_i} + 2\theta. \end{aligned}$$

类似地, 两个相邻模糊集 \tilde{B}_j 和 \tilde{B}_{j+1} 的上(下)界隶属度函数定义如下:

$$\mu_{\tilde{B}_j}(x_2) = \begin{cases} c_j x_2 + \underline{d}_j, & x_2 \in [S_j, S_{j+1}], \\ 0, & x_2 \notin [S_j, S_{j+1}], \end{cases} \quad (5)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{B}_j}(x_2) = \begin{cases} c_j x_2 + \bar{d}_j, & x_2 \in [S_j, S_{j+1}], \\ 0, & x_2 \notin [S_j, S_{j+1}], \end{cases} \quad (6)$$

$$\mu_{\tilde{B}_{j+1}}(x_2) = \begin{cases} c_{j+1} x_2 + \underline{d}_{j+1}, & x_2 \in [S_j, S_{j+1}], \\ 0, & x_2 \notin [S_j, S_{j+1}], \end{cases} \quad (7)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{B}_{j+1}}(x_2) = \begin{cases} c_{j+1} x_2 + \bar{d}_{j+1}, & x_2 \in [S_j, S_{j+1}], \\ 0, & x_2 \notin [S_j, S_{j+1}], \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{1-2\theta}{S_j - S_{j+1}}, \quad \underline{d}_j = -\frac{S_{j+1}(1-2\theta)}{S_j - S_{j+1}}, \\ \bar{d}_j &= -\frac{S_{j+1}(1-2\theta)}{S_j - S_{j+1}} + 2\theta, \quad c_{j+1} = \frac{1-2\theta}{S_{j+1} - S_j}, \\ \underline{d}_{j+1} &= -\frac{S_j(1-2\theta)}{S_{j+1} - S_j}, \quad \bar{d}_{j+1} = -\frac{S_j(1-2\theta)}{S_{j+1} - S_j} + 2\theta. \end{aligned}$$

相邻模糊集 \tilde{A}_i 和 \tilde{A}_{i+1} 与相邻模糊集 \tilde{B}_j 和 \tilde{B}_{j+1} 共有 4 种组合形式, 对应的 4 条模糊规则如下:

R^1 : 如果 x_1 为 \tilde{A}_i 且 x_2 为 \tilde{B}_j , 则 u 为 $h_{(i,j)}$;

R^2 : 如果 x_1 为 \tilde{A}_i 且 x_2 为 \tilde{B}_{j+1} , 则 u 为 $h_{(i,j+1)}$;

R^3 : 如果 x_1 为 \tilde{A}_{i+1} 且 x_2 为 \tilde{B}_j , 则 u 为 $h_{(i+1,j)}$;

R^4 : 如果 x_1 为 \tilde{A}_{i+1} 且 x_2 为 \tilde{B}_{j+1} , 则 u 为 $h_{(i+1,j+1)}$,

其中 $h_{(i,j)}$ 为一型模糊单值. 在本文中, 全体输出模糊集记为 C_1, C_2, \dots, C_ρ , 且 $\rho \geq 2$. $h_{(i,j)}$ 的具体数值由索引函数 $f_h(i, j)$ 从输出模糊集之中查找得到. 设置索引函数的目的, 是建立 $h_{(i,j)}$ 与输出模糊之间的对应关系^[12].

3 区间二型模糊控制器的解析结构推导 (Derivation of analytical structure of IT2 fuzzy controllers)

在推导区间二型模糊控制器的解析结构之前, 有必要简单地回顾一下 Δu 的计算过程. 根据文献 [10, 12, 17], 为了得到 Δu , 首先需要计算出模糊规则 (R^1, R^2, R^3 和 R^4) 的激活区间, 然后将推理结果降为一型模糊集, 最后使用平均法解模糊, 从而得到精确的输出值. 因为本文模糊规则的前件采用乘积型“与”操作, 所以激活区间 $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3$ 和 \tilde{F}_4 可分别表

示为

$$[\underline{f}_1, \bar{f}_1] = [\underline{\mu}_{\tilde{A}_i}(x_1)\underline{\mu}_{\tilde{B}_j}(x_2), \bar{\mu}_{\tilde{A}_i}(x_1)\bar{\mu}_{\tilde{B}_j}(x_2)], \quad (9)$$

$$[\underline{f}_2, \bar{f}_2] = [\underline{\mu}_{\tilde{A}_i}(x_1)\underline{\mu}_{\tilde{B}_{j+1}}(x_2), \bar{\mu}_{\tilde{A}_i}(x_1)\bar{\mu}_{\tilde{B}_{j+1}}(x_2)], \quad (10)$$

$$[\underline{f}_3, \bar{f}_3] = [\underline{\mu}_{\tilde{A}_{i+1}}(x_1)\underline{\mu}_{\tilde{B}_j}(x_2), \bar{\mu}_{\tilde{A}_{i+1}}(x_1)\bar{\mu}_{\tilde{B}_j}(x_2)], \quad (11)$$

$$[\underline{f}_4, \bar{f}_4] = [\underline{\mu}_{\tilde{A}_{i+1}}(x_1)\underline{\mu}_{\tilde{B}_{j+1}}(x_2), \bar{\mu}_{\tilde{A}_{i+1}}(x_1)\bar{\mu}_{\tilde{B}_{j+1}}(x_2)]. \quad (12)$$

为了应用集合中心法, 假设 $h_{(i,j)}, h_{(i,j+1)}, h_{(i+1,j)}$ 和 $h_{(i+1,j+1)}$ 的排列方式已满足从小到大的排列要求^[12, 17]. 在实际工作中, 对于不满足此排列要求的情况, 可以通过调整 R^1, R^2, R^3 和 R^4 的排列顺序来解决. 为简化符号, 记 $h_1 = h_{(i,j)}, h_2 = h_{(i,j+1)}, h_3 = h_{(i+1,j)}$ 和 $h_4 = h_{(i+1,j+1)}$, 且 $h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq h_4$. 使用 KM 算法进行降型操作, 得到的一型模糊集可记为 $U_{IWA}(x_1, x_2) = [\Delta u_L, \Delta u_R]$, 其中

$$\Delta u_L = \frac{\sum_{k=1}^L h_k \bar{f}_k + \sum_{k=L+1}^4 h_k \underline{f}_k}{\sum_{k=1}^L \bar{f}_k + \sum_{k=L+1}^4 \underline{f}_k}, \quad (13)$$

$$\Delta u_R = \frac{\sum_{k=1}^R h_k \underline{f}_k + \sum_{k=R+1}^4 h_k \bar{f}_k}{\sum_{k=1}^R \underline{f}_k + \sum_{k=R+1}^4 \bar{f}_k}. \quad (14)$$

Δu_L 和 Δu_R 分别称之为左边点和右边点. 使用 KM 算法的目的, 就是用来找出切换点 (L, R) ($L \in \{1, 2, 3\}, R \in \{1, 2, 3\}$). 当然, 还有一些其他算法亦可解决上述问题, 例如 EKM (enhanced KM) 算法. 考虑到 KM 算法是一种广泛应用的迭代算法, 本文使用此算法. 最后, 由平均法得出区间二型模糊控制器的输出为

$$\Delta u = \frac{1}{2}(\Delta u_L + \Delta u_R). \quad (15)$$

本文发现, 对于任意切换点 (L, R), Δu_L 和 Δu_R 分别共享形如式 (16)–(17) 所示的表达式结构:

$$\Delta u_L = \frac{\xi_L^1 x_1 x_2 + \xi_L^2 x_1 + \xi_L^3 x_2 + \xi_L^4}{\xi_L^5 x_1 + \xi_L^6 x_2 + \xi_L^7}, \quad (16)$$

$$\Delta u_R = \frac{\eta_R^1 x_1 x_2 + \eta_R^2 x_1 + \eta_R^3 x_2 + \eta_R^4}{\eta_R^5 x_1 + \eta_R^6 x_2 + \eta_R^7}, \quad (17)$$

其中 ξ_L^p ($p = 1, 2, \dots, 7$) 和 η_R^q ($q = 1, 2, \dots, 7$) 为中间参数. 如果有明确的切换点 (L, R), 这些中间参数即可表达为基于原始参数 $\theta, L_i, L_{i+1}, S_j, S_{j+1}, h_1, h_2, h_3$ 和 h_4 的表达式.

定理 1 假设输入变量 x_1 和 x_2 分别为误差和误差变化率, 则基于乘积型“与”操作的区间二型模糊

控制器等效于两个增量型PI控制器之和,其比例增益、积分增益以及补偿项均为非线性可调。

证 位置型PID控制器的解析结构可表达为

$$u(k) = K_P x_1(k) + K_I \sum_{i=1}^k x_1(i) + K_D x_2(k), \quad (18)$$

其中: K_P , K_I 和 K_D 分别为常数形式的比例增益、积分增益和微分增益. 根据第2节的控制器配置, 有 $x_2(k) = x_1(k) - x_1(k-1)$. 令 $\Delta u = u(k) - u(k-1)$, 对应的增量型PID控制器的解析结构可改写为

$$\Delta u = K_P x_2(k) + K_I x_1(k) + K_D (x_2(k) - x_2(k-1)). \quad (19)$$

当 K_D 设置为0时, PID控制器即简化为PI控制器. 根据式(15)–(17), Δu 可改写为

$$\Delta u = [K_I^1(x_1, x_2)x_1 + K_P^1(x_1, x_2)x_2 + \delta^1(x_1, x_2)] + [K_I^2(x_1, x_2)x_1 + K_P^2(x_1, x_2)x_2 + \delta^2(x_1, x_2)], \quad (20)$$

其中:

$$K_I^1(x_1, x_2) = \frac{\xi_L^1 x_2 + \xi_L^2}{2(\xi_L^5 x_1 + \xi_L^6 x_2 + \xi_L^7)}, \quad (21)$$

$$K_P^1(x_1, x_2) = \frac{\xi_L^3}{2(\xi_L^5 x_1 + \xi_L^6 x_2 + \xi_L^7)}, \quad (22)$$

$$\delta^1(x_1, x_2) = \frac{\xi_L^4}{2(\xi_L^5 x_1 + \xi_L^6 x_2 + \xi_L^7)}, \quad (23)$$

$$K_I^2(x_1, x_2) = \frac{\eta_L^1 x_2 + \eta_L^2}{2(\eta_L^5 x_1 + \eta_L^6 x_2 + \eta_L^7)}, \quad (24)$$

$$K_P^2(x_1, x_2) = \frac{\eta_L^3}{2(\eta_L^5 x_1 + \eta_L^6 x_2 + \eta_L^7)}, \quad (25)$$

$$\delta^2(x_1, x_2) = \frac{\eta_L^4}{2(\eta_L^5 x_1 + \eta_L^6 x_2 + \eta_L^7)}. \quad (26)$$

由以上结果可知, $K_I^1(x_1, x_2)$ 和 $K_P^1(x_1, x_2)$ 可视为两个非线性可调的积分增益, $K_I^2(x_1, x_2)$ 和 $K_P^2(x_1, x_2)$ 可视为两个非线性可调的比例增益, $\delta^1(x_1, x_2)$ 和 $\delta^2(x_1, x_2)$ 可视为两个非线性可调的补偿项. 证毕.

推论 1 假设输入变量 x_1 和 x_2 分别为误差和误差变化率, 基于乘积型“与”操作的区间二型模糊控制器等效于两个位置型PD控制器之和, 其比例增益、微分增益以及补偿项均为非线性可调。

证 根据PID控制器的位置型与增量型的对应关系, 推论1可由定理1立即可得。

注 1 定理1和推论1与文献[12]的相同之处在于, 均可表达成非线性增益可调的PI或PD控制器. 不同之处在于: 1) 本文使用乘积型“与”操作, 文献[12]使用Zadeh“与”操作; 2) 两者非线性增益的调整规律完全不同, 即 $K_I^1(x_1, x_2)$, $K_P^1(x_1, x_2)$, $K_I^2(x_1, x_2)$, $K_P^2(x_1, x_2)$, $\delta^1(x_1, x_2)$, $\delta^2(x_1, x_2)$ 与文献[12]完全不同。

注 2 常见的“与”操作有Zadeh型和乘积型两种类型. Zadeh“与”需要利用MIN函数计算规则的激活区间, 该函数一般需要分段处理, 通常会显著增加IC划分的数量, 从而增加理论分析的难度. 相反地, 乘积型“与”采用直接相乘方式, 避免对两个隶属度函数进行分段比较与判断, 有利于减少IC总量, 对理论分析非常有利。

4 区间二型模糊控制器的闭环解析表达式 (Closed-loop analytical expression of IT2 fuzzy controllers)

对于变量形式的 x_1 和 x_2 , 无法通过KM迭代计算求出 L 和 R . 因此, 式(15)不能最终写成基于原始参数 θ , L_i , L_{i+1} , S_j , S_{j+1} , h_1 , h_2 , h_3 和 h_4 的闭环解析表达式. 可喜的是, 文献[10, 12–13]提出的IC概念, 对解决上述问题提供了一条非常有益的思路. 利用IC概念, L 和 R 的数值可以由本文方法(步骤1–6)直接得出, 并不需要使用KM迭代计算. 为此, 根据文献[17], 先整理出KM算法的终止条件如下:

- 1) 对于左边点 Δu_L , 当 $h_1 \leq \Delta u_L \leq h_2$, 停止迭代计算, 得 $L = 1$; 当 $h_2 < \Delta u_L \leq h_3$, 停止迭代计算, 得 $L = 2$; 当 $h_3 < \Delta u_L \leq h_4$, 停止迭代计算, 得 $L = 3$;
- 2) 对于右边点 Δu_R , 当 $h_1 \leq \Delta u_R \leq h_2$, 停止迭代计算, 得 $R = 1$; 当 $h_2 < \Delta u_R \leq h_3$, 停止迭代计算, 得 $R = 2$; 当 $h_3 < \Delta u_R \leq h_4$, 停止迭代计算, 得 $R = 3$.

由假设1和2可知, 对于任意输入 x_1 和 x_2 , 总是可以找到一个被激活的子空间 $[L_i, L_{i+1}] \times [S_j, S_{j+1}]$. 上述终止条件用于这个划分子空间, 使之成为一组IC. 因为每个IC内有固定的切换点 (L, R) , 所以中间参数 ξ_L^p ($p = 1, 2, \dots, 7$)和 η_L^q ($q = 1, 2, \dots, 7$)可以用原始参数表示, 由式(15)–(17)即可得出每个IC对应的闭环解析表达式. 叠加所有的子空间, 可得出全局论域 $[L_1, L_m] \times [S_1, S_n]$ 的IC划分图和所有IC对应的闭环解析表达式. 由此可见, 对于任意输入 x_1 和 x_2 , 如何推导出被激活子空间的各个IC边界线是求解区间二型模糊控制器解析表达式的关键环节. 受文献[13]的启发, 本文提出如下方案:

步骤 1 首先, 针对左边点 Δu_L , 构建 $(L = 1)$ 与 $(L = 2$ 或 $3)$ 的边界线, 并记为 V_L^{12} . 令 $f_L^{12} = \Delta u_L - h_2$, 求解方程 $f_L^{12} = 0$, 即可得出边界线 V_L^{12} 的解析表达式. 在该边界线的左边或右边, 随机选取一个测试点 (x'_1, x'_2) 代入 f_L^{12} , 做如下分析:

- a) 若对于左边的测试点有 $f_L^{12} < 0$, 或者对于右边的测试点有 $f_L^{12} > 0$, 则可推导出在边界线 V_L^{12} 的左边区域有 $L = 1$, 右边区域有 $L = 2$ 或 3 ;
- b) 若对于左边的测试点有 $f_L^{12} > 0$, 或者对于右边的测试点有 $f_L^{12} < 0$, 则可推导出在边界线 V_L^{12} 的左边区域有 $L = 2$ 或 3 , 右边区域有 $L = 1$;
- c) 如果对于边界线上的测试点, 则 $L = 1, 2$ 或 3 均

可.

步骤 2 针对左边点 Δu_L , 构建 ($L = 1$ 或 2) 与 ($L = 3$) 的边界线, 并记为 V_L^{23} . 令 $f_L^{23} = \Delta u_L - h_3$, 求解方程 $f_L^{23} = 0$, 即可得出边界线 V_L^{23} 的解析表达式. 使用与步骤 1 相同的方法, 即可确定 L 的数值.

步骤 3 针对右边点 Δu_R , 构建 ($R = 1$) 与 ($R = 2$ 或 3) 的边界线, 并记为 V_R^{12} . 令 $f_R^{12} = \Delta u_R - h_2$, 求解方程 $f_R^{12} = 0$, 即可得出边界线 V_R^{12} 的解析表达式. 使用与步骤 1 相同的方法, 即可确定 R 的数值.

步骤 4 针对右边点 Δu_R , 构建 ($R = 1$ 或 2) 与 ($R = 3$) 的边界线, 并记为 V_R^{23} . 令 $f_R^{23} = \Delta u_R - h_3$, 求解方程 $f_R^{23} = 0$, 即可得出边界线 V_R^{23} 的解析表达式. 使用与步骤 1 相同的方法, 即可确定 R 的数值.

步骤 5 在子空间 $[L_i, L_{i+1}] \times [S_j, S_{j+1}]$ 叠加上述 4 条边界线 $V_L^{12}, V_L^{23}, V_R^{12}$ 和 V_R^{23} , 该子空间即被划分为一组 IC.

步骤 6 将各个 IC 内的 L 和 R 的数值代入式 (16)–(17) 后, 即可得出各个 IC 对应的闭环解析表达式.

由步骤 1–6 可看出, 使用 KM 算法的终止条件构建 4 个符号数学方程 $f_L^{12} = 0, f_L^{23} = 0, f_R^{12} = 0$ 和 $f_R^{23} = 0$ 是推导区间二型模糊控制器解析表达式的关键步骤. 因此, 本文方法又可称之为基于构造方程的解析结构推导法.

注 3 由假设 1 和 2 可知, 共有 $(m - 1) \times (n - 1)$ 个可能的激活子空间 $[L_i, L_{i+1}] \times [S_j, S_{j+1}]$. 为了在全局论域 $[L_1, L_m] \times [S_1, S_n]$ 得到所有 IC 对应的解析表达式, 有必要对 $(m - 1) \times (n - 1)$ 个可能的激活子空间逐个重复地使用步骤 1–6. 一旦该项工作完成, 对任意输入 x_1 和 x_2 总是可以找到相关的 IC 和解析表达式.

基于构造方程的解析结构推导法可以保证每个 IC 对应一个区间二型模糊控制器的闭环解析表达式. 它的不足之处在于: 需要针对每个 IC 重复地求解步骤 1–4 中的符号数学方程 $f_L^{12} = 0, f_L^{23} = 0, f_R^{12} = 0$ 和 $f_R^{23} = 0$, 以获得边界线 $V_L^{12}, V_L^{23}, V_R^{12}$ 和 V_R^{23} 的解析表达式. 这是一件非常费时耗力的工作. 尽管使用一些辅助计算软件 (例如, MATLAB 符号数学工具箱, Mathematica 或者 Maple) 来实现上述过程, 它仍然不是一件轻松的工作. 为了进一步减轻求解符号数学方程的负担, 本文提出了定理 2. 根据该定理, 边界线的解析表达式可以由控制器的原始参数直接定义.

定理 2 在子空间 $[L_i, L_{i+1}] \times [S_j, S_{j+1}]$, 如果两个相邻模糊集 \tilde{A}_i 和 \tilde{A}_{i+1} ($1 \leq i \leq m - 1$) 由式 (1)–(4) 定义, 另两个相邻模糊集 \tilde{B}_j 和 \tilde{B}_{j+1} ($1 \leq j \leq n - 1$) 由式 (5)–(8) 定义, 那么 IC 边界线 $V_L^{12}, V_L^{23}, V_R^{12}$ 和 V_R^{23} 的解析表达式可依次直接写为

$$px_1x_2 + q_1x_1 + v_1x_2 + w_1 = 0, \quad (27)$$

$$px_1x_2 + q_2x_1 + v_2x_2 + w_2 = 0, \quad (28)$$

$$px_1x_2 + q_3x_1 + v_3x_2 + w_3 = 0, \quad (29)$$

$$px_1x_2 + q_4x_1 + v_4x_2 + w_4 = 0, \quad (30)$$

其中 p, q_ξ, v_ξ 和 w_ξ ($\xi = 1, 2, 3, 4$) 均为中间参数, 它们可以分别表达为基于原始参数 $\theta, L_i, L_{i+1}, S_j, S_{j+1}, h_1, h_2, h_3$ 和 h_4 的表达式.

证 先推导 IC 边界线 V_L^{12} 的解析表达式, 即式 (27). 令 $f_L^{12} = 0$, 则 $\Delta u_L - h_2 = 0$ 可表达为

$$(h_1 - h_2)\bar{f}_1 + (h_3 - h_2)\underline{f}_3 + (h_4 - h_2)\underline{f}_4 = 0. \quad (31)$$

由式 (9)–(12), 可得

$$\bar{f}_1 = a_i c_j x_1 x_2 + a_i \bar{d}_j x_1 + \bar{b}_i c_j x_2 + \bar{b}_i \bar{d}_j, \quad (32)$$

$$\underline{f}_3 = a_{i+1} c_j x_1 x_2 + a_{i+1} \underline{d}_j x_1 + \underline{b}_{i+1} c_j x_2 + \underline{b}_{i+1} \underline{d}_j, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \underline{f}_4 &= a_{i+1} c_{j+1} x_1 x_2 + a_{i+1} \underline{d}_{j+1} x_1 + \\ &\quad \underline{b}_{i+1} c_{j+1} x_2 + \underline{b}_{i+1} \underline{d}_{j+1}. \end{aligned} \quad (34)$$

把上述 $\bar{f}_1, \underline{f}_3$ 和 \underline{f}_4 代入式 (31), 即可得出边界线 V_L^{12} 的解析表达式, 如式 (27) 所示, 其中:

$$p = (h_1 - h_2)a_i c_j + (h_3 - h_2)a_{i+1} c_j + (h_4 - h_2)a_{i+1} c_{j+1}, \quad (35)$$

$$q_1 = (h_1 - h_2)a_i \bar{d}_j + (h_3 - h_2)a_{i+1} \underline{d}_j + (h_4 - h_2)a_{i+1} \underline{d}_{j+1}, \quad (36)$$

$$v_1 = (h_1 - h_2)\bar{b}_i c_j + (h_3 - h_2)\underline{b}_{i+1} c_j + (h_4 - h_2)\underline{b}_{i+1} c_{j+1}, \quad (37)$$

$$w_1 = (h_1 - h_2)\bar{b}_i \bar{d}_j + (h_3 - h_2)\underline{b}_{i+1} \underline{d}_j + (h_4 - h_2)\underline{b}_{i+1} \underline{d}_{j+1}. \quad (38)$$

根据式 (1)–(8) 关于参数 $a_i, \bar{b}_i, \underline{b}_i, a_{i+1}, \underline{b}_{i+1}, \bar{b}_{i+1}, c_j, \bar{d}_j, \underline{d}_j, c_{j+1}, \underline{d}_{j+1}, \bar{d}_{j+1}$ 的定义, p, q_1, v_1 和 w_1 即可立即改写为基于原始参数 $\theta, L_i, L_{i+1}, S_j, S_{j+1}, h_1, h_2, h_3$ 和 h_4 的表达式.

同理, V_L^{23}, V_R^{12} 和 V_R^{23} 的解析表达式可依次写为式 (28)–(30). 证毕.

例 1 假设区间二型模糊控制器有两个输入变量 x_1 和 x_2 , 其论域分别为 $U_1 = [-2, 2]$ 和 $U_2 = [-2, 2]$. U_1 被划分为 2 个子论域 $[L_1, L_2]$ 和 $[L_2, L_3]$, 并根据式 (1)–(4) 定义了 3 个模糊集 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$. U_2 被划分为 3 个子论域 $[S_1, S_2], [S_2, S_3]$ 和 $[S_3, S_4]$, 并根据式 (5)–(8) 定义了 4 个模糊集 $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3, \tilde{B}_4$. 令参数 $\theta = 0.1, L_1 = -2, L_2 = 0, L_3 = 2, S_1 = -2, S_2 = -1, S_3 = 1$ 和 $S_4 = 2$. 输出变量 Δu 对应 11 个模糊一型单值, 分别为 $C_1 = -3, C_2 = -1, C_3 = 0, C_4 = 1, C_5 = -2, C_6 = -0.5, C_7 = 0.5, C_8 = 1.5, C_9 = 1, C_{10} = 3$ 和 $C_{11} = 3$, 且索引函数 $f_h(i, j) = i + 2j$. 当取 $x_1 = -0.7$ 和 $x_2 = 1.6$ 时, 试推导被激活子空间的各个 IC

对应的闭环解析表达式.

由已知条件 $x_1 = -0.7$ 和 $x_2 = 1.6$, 可容易得出被激活的子空间为 $[L_1, L_2] \times [S_3, S_4]$, 对应的模糊集 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{B}_3$ 和 \tilde{B}_4 亦被激活. 由式(1)–(8)得出模糊集的参数: $a_1 = -0.4, b_1 = 0, \bar{b}_1 = 0.2, a_2 = 0.4, b_2 = 0.8, \bar{b}_2 = 1, c_3 = -0.8, \underline{d}_3 = 1.6, \bar{d}_3 = 1.8, c_4 = 0.8, \underline{d}_4 = -0.8, \bar{d}_4 = -0.6$. 使用索引函数 $f_h(i, j) = i + 2j$, 可得 $h_{(1,3)} = C_7, h_{(1,4)} = C_9, h_{(2,3)} = C_8, h_{(2,4)} = C_{10}$. 因此, 可得 $h_{(1,3)} = 0.5, h_{(1,4)} = 1, h_{(2,3)} = 1.5, h_{(2,4)} = 3$, 若采用简化符号, 即可记 $h_1 = 0.5, h_2 = 1, h_3 = 1.5, h_4 = 3$. 根据定理2, 边界线 $V_L^{12}, V_L^{23}, V_R^{12}$ 和 V_R^{23} 可依次表达为

$$0.32x_1x_2 + 0.04x_1 + 1.04x_2 - 0.82 = 0, \quad (39)$$

$$0.32x_1x_2 + 0.12x_1 + 1.04x_2 - 1.26 = 0, \quad (40)$$

$$0.32x_1x_2 + 0.2x_1 + 1.2x_2 - 0.3 = 0, \quad (41)$$

$$0.32x_1x_2 + 0.12x_1 + 1.2x_2 - 0.9 = 0. \quad (42)$$

上述4条边界线 $V_L^{12}, V_L^{23}, V_R^{12}$ 和 V_R^{23} 如图3所示.

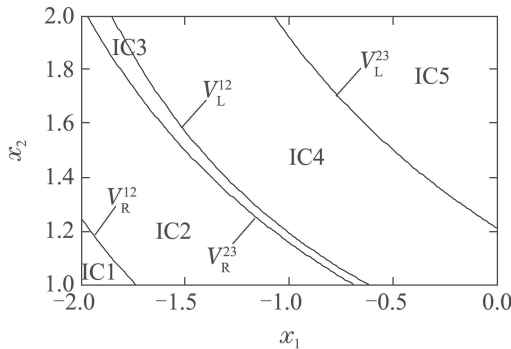


图3 子空间 $[L_1, L_2] \times [S_3, S_4]$ 的IC划分

Fig. 3 IC Partition of the universe $[L_1, L_2] \times [S_3, S_4]$

由第4节的步骤1–4可得: 对于边界线 V_L^{12} 左边测试点, 总有 $f_L^{12} < 0$; 对于边界线 V_L^{23} 左边测试点, 总有 $f_L^{23} < 0$; 对于边界线 V_R^{12} 左边测试点, 总有 $f_R^{12} < 0$; 对于边界线 V_R^{23} 左边测试点, 总有 $f_R^{23} < 0$. 于是, 可推导出:

- 1) 在IC1中, 必有 $L = 1$ 和 $R = 1$;
- 2) 在IC2中, 必有 $L = 1$ 和 $R = 2$;
- 3) 在IC3中, 必有 $L = 1$ 和 $R = 3$;
- 4) 在IC4中, 必有 $L = 2$ 和 $R = 3$;
- 5) 在IC5中, 必有 $L = 3$ 和 $R = 3$.

令IC1, IC2, IC3, IC4 和IC5对应的区间二型模糊控制器的输出量分别记为 $\Delta u_{IC1}, \Delta u_{IC2}, \Delta u_{IC3}, \Delta u_{IC4}$ 和 Δu_{IC5} . 由式(9)–(12)可得 $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3, \underline{f}_4, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ 和 \bar{f}_4 的表达式. 由式(13)–(15), 可得IC1, IC2, IC3, IC4和IC5所对应的解析表达式为

$$\Delta u_{IC1} = \frac{1}{2} \left(\frac{-16x_1x_2 + 2x_1 - 44x_2 - 9}{4x_1 + 8x_2 - 50} + \right.$$

$$\left. \frac{16x_1x_2 + 14x_1 + 68x_2 + 39}{4x_1 + 8x_2 + 54} \right), \quad (43)$$

$$\Delta u_{IC2} = \frac{1}{2} \left(\frac{-16x_1x_2 + 2x_1 - 44x_2 - 9}{4x_1 + 8x_2 - 50} + \frac{16x_1x_2 + 18x_1 + 60x_2 + 45}{8x_1 + 60} \right), \quad (44)$$

$$\Delta u_{IC3} = \frac{1}{2} \left(\frac{-16x_1x_2 + 2x_1 - 44x_2 - 9}{4x_1 + 8x_2 - 50} + \frac{8x_1x_2 + 6x_1 + 36x_2 + 3}{2x_1 + 4x_2 + 17} \right), \quad (45)$$

$$\Delta u_{IC4} = \frac{1}{2} \left(\frac{-16x_1x_2 + 6x_1 - 52x_2 - 3}{8x_1 - 44} + \frac{8x_1x_2 + 6x_1 + 36x_2 + 3}{2x_1 + 4x_2 + 17} \right), \quad (46)$$

$$\Delta u_{IC5} = \frac{1}{2} \left(\frac{-8x_1x_2 - 20x_2 - 21}{2x_1 + 4x_2 - 35} + \frac{8x_1x_2 + 6x_1 + 36x_2 + 3}{2x_1 + 4x_2 + 17} \right). \quad (47)$$

5 结论(Conclusions)

推导区间二型模糊控制器解析结构的主要障碍在于使用KM迭代计算以寻找切换点. 针对一种双输入单输出的模糊控制器结构, 本文取得了如下研究结论:

1) 若两个输入变量分别为偏差和偏差变化率, 则乘积型区间二型模糊控制器等效于两个增量型PI(或位置型PD)控制器之和, 且具有非线性可调的比例增益、积分增益和控制补偿项;

2) 提出了基于构造方程的解析结构推导法, 使用步骤1–6可推导出各个IC对应的区间二型模糊控制器的解析结构. 其中, KM算法的迭代终止条件用于推导IC边界线的解析表达式. 通过叠加各个子空间的IC边界线, 即可得到一个完整的IC划分图. 每个IC对应一个具体的切换点, 避免了使用迭代算法;

3) 为了减轻求解符号数学方程的负担, 提出了定理2, 利用它可以直接定义IC边界线的解析表达式, 为推导区间二型模糊控制器的解析结构创造了便利条件.

本文的研究工作是针对乘积型“与”操作的情况, 而已有的相关文献[10, 12–13]是针对Zadeh型“与”操作的情况. 也就是说, 二者的控制器配置类型不同. 对于这两种不同类型的控制器, 其解析结构的推导方法既有相同点又有不同之处. 相同点在于, 二者都是把输入空间划分为一组IC, 使每个IC对应一个具体的切换点. 不同之处在于, 二者划分IC的具体方法不相同. 基于KM算法迭代终止条件的6步骤IC划分法和定理2是本文与已有相关文献的主要相异之处, 也是本文的主要创新点. 由本文提出的新方法, 一定可以推导出乘积型区间二型模糊控制器的闭环解析表达式. 这非常有利于系统的分析与设计, 对于减少试错法的次数和改善模糊控制理论的完整性与严谨性有一定

积极意义.

不足之处在于,本文只研究了三角形区间二型模糊集,没有考虑任意形状的区间二型模糊集.尽管三角形区间二型模糊集是最常用的,但是从理论的通用性角度看,研究如何把本文方法推广到任意形状的区间二型模糊集是非常必要的.这是未来研究工作需要进一步解决的问题.

参考文献(References):

- [1] HAJJAJI A E, RACHID A. Explicit formulas for fuzzy controller [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 62(2): 135 – 141.
- [2] CHEN C L, WANG S N, HSIEH C T, et al. Theoretical analysis of crisp-type fuzzy logic controllers using various t -norm sum-gravity inference methods [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1998, 6(1): 122 – 136.
- [3] LEWIS F L, LIU K. Towards a paradigm for fuzzy logic control [J]. *Automatica*, 1994, 32(2): 167 – 181.
- [4] MANN G K I, HU, B G, GOSINE R G. Analysis of direct action fuzzy PID controller structures [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics (Part B)*, 1999, 29(3): 371 – 388.
- [5] YING H. A general technique for deriving analytical structure of fuzzy controllers using arbitrary trapezoidal input fuzzy sets and Zadeh AND operator [J]. *Automatica*, 2003, 39(7): 1171 – 1184.
- [6] AMIN H A, YING H. Structural analysis of fuzzy controllers with nonlinear input fuzzy sets in relation to nonlinear PID control with variable gains [J]. *Automatica*, 2004, 40(9): 1551 – 1559.
- [7] MOHAN B M, PATEL A V. Analytical structures and analysis of the simplest fuzzy PD controllers [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics (Part B)*, 2002, 32(2): 239 – 248.
- [8] PATEL A V, MOHAN B M. Analytical structures and analysis of the simplest fuzzy PI controllers [J]. *Automatica*, 2002, 38(6): 981 – 993.
- [9] YING H. Deriving analytical input-output relationship for fuzzy controllers using arbitrary input fuzzy sets and zadeh fuzzy AND operator [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, 14(5): 654 – 662.
- [10] DU X Y, YING H. Derivation and analysis of the analytical structures of the interval type-2 fuzzy-PI and PD controllers [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 18(4): 802 – 814.
- [11] DU X Y, ZHANG N Y, YING H. Structure analysis and system design for a class of Mamdani fuzzy controllers [J]. *International Journal of General Systems*, 2007, 37(1): 1 – 19.
- [12] ZHOU H B, YING H. A method for deriving the analytical structure of a broad class of typical interval type-2 mamdani fuzzy controllers [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2013, 21(3): 447 – 458.
- [13] ZHOU H B, YING H. A method for deriving the analytical structure of the TS fuzzy controllers with two linear interval type-2 fuzzy sets for each input variable [C] // *Proceedings of International Conference on Fuzzy Systems*. Beijing: IEEE, 2014: 612 – 618.
- [14] NIE M W, TAN W W. Analytical structure and characteristics of symmetric karnik-mendel type-reduced interval type-2 fuzzy PI and PD controllers [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(3): 416 – 430.
- [15] AHMAD M E, MOHAMMAD E B. Derivation and stability analysis of the analytical structures of the interval type-2 fuzzy PID controller [J]. *Applied Soft Computing*, 2014, 24: 704 – 716.
- [16] NIE M W, TAN W W. The derivation of the analytical structure of a class of interval type-2 fuzzy PD and PI controllers [C] // *Proceedings of International Conference on Fuzzy Systems*. Taipei: IEEE, 2011: 635 – 642.
- [17] MENDEL J M, HAGRAS H, TAN W W, et al. *Introduction to Type-2 Fuzzy Logic Control* [M]. Piscataway, USA: IEEE, 2014.

作者简介:

龙祖强 (1974–), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为模糊系统与模糊控制, E-mail: zuqianglong@126.com;

许岳兵 (1980–), 男, 博士研究生, 讲师, 主要研究方向为系统优化与控制, E-mail: yuebingxu@126.com;

李 龙 (1982–), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为模糊神经网络, E-mail: long_li1982@163.com.