

# 自主泊车的全联立动态优化方法

陈荣华, 王可心, 邵之江<sup>†</sup>

(浙江大学控制科学与工程学院, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 本文提出联立框架下的自主泊车动态优化方法. 不同于通常采用的几何方法, 该联立方法对障碍环境和车辆模型进行统一的描述和处理. 提出基于互补约束的数学规划方法(MPCC)与R函数方法描述泊车过程的避障条件约束, 并联立车辆的运动学、动力学、相关物理约束建立行车系统模型; 在此基础上以运动学相关的最短时间为优化目标, 构造泊车轨迹动态优化命题; 基于有限元正交配置离散化方法实现该动态问题的精确求解, 得到具有时间信息的、可直接用于指导车辆操作的泊车轨迹. 多种泊车位情形下的数值试验验证了本文方法的有效性.

**关键词:** 自主泊车; 轨迹规划; 联立法; 动态优化; 互补约束数学规划(MPCC); R函数

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Simultaneous dynamic optimization for autonomous parking

CHEN Rong-hua, WANG Ke-xin, SHAO Zhi-jiang<sup>†</sup>

(College of Control Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

**Abstract:** A simultaneous framework is put forward for dynamic optimization for autonomous parking. In contrast to geometric methods, models of the vehicle as well as environment with obstacles are handled all together in this approach. Mathematical programs with complementarity constraints (MPCC) and R-functions methods are proposed to describe the conditional constraints relating to obstacle avoidance. Combined with the vehicles' kinematic and physical constraints, a driving system model is established. Based on this model, a dynamic trajectory optimization problem is formulated with a kinematics related objective, the minimum operating time. Discretization based on orthogonal collocation over finite elements is applied to obtain accurate numerical solution of the dynamic problem. The resulting trajectory with time information can be employed directly to vehicle operation. Performance of the proposed method is demonstrated by numerical experiments of various parking cases.

**Key words:** autonomous parking; trajectory optimization; simultaneous method; dynamic optimization; MPCC; R-functions

### 1 引言(Introduction)

自主泊车(auto-parking system, APS)技术是无人驾驶系统的重要组成部分, 其目的是辅助或替代驾驶员完成车辆的安全泊位. 随着车辆的增多, 泊车位空间越来越小, 驾驶员泊车更加困难, 因此自主泊车技术快速发展起来.

国内外学者结合飞行器轨迹优化理论、智能算法和自主泊车问题的特殊性就控制和优化两方面进行了大量研究. 如基于模糊控制的方法<sup>[1]</sup>将技术成熟的驾驶员的泊车经验整理为模糊规则, 通过控制汽车转向角和相对停车位的位置实现实时在线泊车. 然而控制过程缺乏连贯的规划性, 需要反复调整车速和转向角, 前后挪动需要较大停车空间, 难以量化<sup>[2]</sup>. 可量化

的方法有基于最小转向半径圆、单方向从任意起始位置运动到任意目标位置的最短路径几何规划方法<sup>[3]</sup>, 以及可以前进、后退变换行驶方向的车辆最短路径规划方法<sup>[4]</sup>. 由此发展而来的几何法成为目前实现障碍环境下泊车的主要方法, 即通过分析泊车环境约束, 结合最小转向半径圆和直线段得到分段连续的无碰路径. 然而, 几何法存在以下几点局限:

1) 几何法受限于车位形状, 不同的泊车模式下路径规划模型差别很大, 无法消除车位差异对规划模型的影响;

2) 几何规划方法没有直接考虑小车的动力学模型、无法得到满足小车动力学性能指标的实时轨迹信息. 需要再次规划, 将无碰路径转换为带有时间信息

收稿日期: 2015-10-13; 录用日期: 2016-01-13.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: zjshao@iipc.zju.edu.cn; Tel.: +86 13003635218.

本文责任编辑: 王伟.

国家重点基础研究发展计划项目(2012CB720503)资助.

Supported by National Basic Research Program of China (2012CB720503).

的、车辆可跟踪的轨迹;

3) 几何法只能得到最短泊车路径, 无法直接求解如泊车时间最短、油耗最少等目标函数下的优化问题;

4) 几何法的泊车策略受限于车位形状和泊车轨形. 例如在垂直泊车时需要设计1/4圆弧和直线段相连接的轨形<sup>[5]</sup>, 而平行泊车中要运用最小转向半径圆设计两段圆弧相接的S形路径<sup>[6]</sup>, 在不同的轨形下需要研究不同的转向策略;

5) 该方法对泊车起始位置要求严格, 不适当的起始位置会导致泊车操作失败<sup>[6]</sup>;

除了几何规划的定量研究方法, 还有学者将泊车轨迹优化问题描述为非线性动态优化命题, 采用序列二次规划(SQP)算法、分段打靶方法、配置法、伪谱法<sup>[7-8]</sup>、联立法等进行求解.

本文按照非线性规划(NLP)的思路在联立框架下研究自主泊车的最短时间轨迹优化问题. 通过建立包含泊车环境信息的行车系统模型, 构造最短时间动态优化命题, 求解得到满足无碰、以及车辆物理约束的可行泊车轨迹.

## 2 泊车系统模型(Parking system model)

### 2.1 车辆运动学模型(Kinematic model)

车辆行为的研究要考虑其运动学和动力学约束, 由于自主泊车过程车辆低速运行、轮胎滑移较小, 研究重点可以简化为纯滚动无滑动的车辆运动学模型, 也称为非完整约束模型<sup>[9]</sup>. 大部分学者将低于10 km/h的速度定义为低速而自主泊车期望速度可控范围更小, 本文将车速限制在5.6 km/h以下.

本文基于前轮驱动车辆(图1), 建立其运动学微分方程模型如式(1)所示.  $(x, y)$ 为车辆后轮轴中心点的坐标;  $v, a$ 为前轴中心点纵向速度及加速度;  $\phi, w$ 为车辆前轴中心点转向角(即前轮方向与车身方向的夹角)及角速度, 这里假设两前轮转向角近似相等, 所以上述模型又称作“自行车”模型;  $\theta$ 为车辆中心轴与水平方向的夹角;  $L$ 为前后轮轴距, 即车辆前后轮轴中心点连线的距离;  $L_p$ 车辆前轴与前端的距离;  $L_r$ 车辆后轴与后端的距离;  $d$ 为车宽;  $C$ 为车辆的瞬时旋转中心, 由垂直于前后轮滚动方向的直线的交点确定;  $R$ 为车辆瞬心 $C$ 与后轮轴心的连线, 将前轮转角最大时的 $R$ 作为最小转弯半径.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v(t) \cos \phi(t) \cos \theta(t), \\ \frac{dy}{dt} = v(t) \cos \phi(t) \sin \theta(t), \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{v(t)}{L} \sin \phi(t), \\ \frac{dv}{dt} = a(t), \\ \frac{d\phi}{dt} = w(t). \end{cases} \quad (1)$$

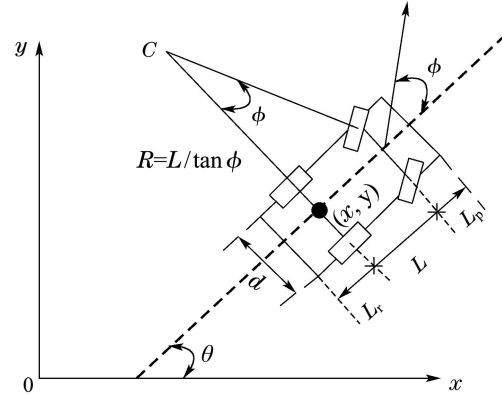


图1 车辆参数示意图

Fig. 1 Car parameters

### 2.2 车辆物理约束(Physical constraints)

自主泊车系统除了考虑车辆的非完整约束之外, 还要考虑车体运动中的物理极限约束, 如最高车速  $v_{\max}$ 、最大前轮转角  $\phi_{\max}$ 、最大加速度  $a_{\max}$ 、最大角速度  $w_{\max}$  等. 其中最大加速度表征实际中油门刹车的快慢, 其值的大小选择要考虑驾驶员舒适性的需求. 由瞬时曲率函数  $\kappa(t) = \frac{\sin \phi(t)}{L}$  的一阶导数  $\frac{d\kappa(t)}{dt} = \frac{w(t) \cos \phi(t)}{L}$  可知, 角速度  $w(t)$  有界用以保障曲率的瞬时变化有界. 本文借鉴实际行车情况对操作变量采用如下约束:

$$\begin{cases} |v(t)| \leq v_{\max}, \\ |a(t)| \leq a_{\max}, \\ |\phi(t)| \leq \phi_{\max}, \\ |w(t)| \leq w_{\max}. \end{cases} \quad (2)$$

### 2.3 避障模型(Obstacle avoidance model)

为了实现无碰泊车, 需要建立障碍环境模型, 以及相应的避撞约束. 以图2中描绘的倾斜停车位为例.

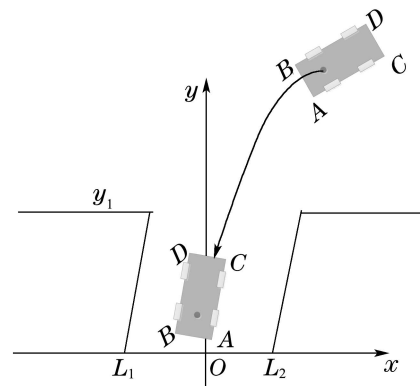


图2 泊车车位示意图

Fig. 2 Parking slot

图2中:  $A, C, D, B$ 代表车身四角, 用  $(x_i, y_i)$ 表示小车四角坐标,  $i \in \{A, C, D, B\}$ , 则其与车辆后轴中心点  $(x, y)$  的关系如下(参照图1):

$$\begin{cases} x_A(t) = x(t) - L_r \cos \theta(t) + \frac{d}{2} \sin \theta(t), \\ y_A(t) = y(t) - L_r \sin \theta(t) - \frac{d}{2} \cos \theta(t), \\ x_B(t) = x(t) - L_r \cos \theta(t) - \frac{d}{2} \sin \theta(t), \\ y_B(t) = y(t) - L_r \sin \theta(t) + \frac{d}{2} \cos \theta(t), \\ x_C(t) = x(t) + (L + L_P) \cos \theta(t) + \frac{d}{2} \sin \theta(t), \\ y_C(t) = y(t) + (L + L_P) \sin \theta(t) - \frac{d}{2} \cos \theta(t), \\ x_D(t) = x(t) + (L + L_P) \cos \theta(t) - \frac{d}{2} \sin \theta(t), \\ y_D(t) = y(t) + (L + L_P) \sin \theta(t) + \frac{d}{2} \cos \theta(t). \end{cases} \quad (3)$$

要使车身避开车位线, 那么四角坐标需要满足下面的约束:

$$\begin{aligned} y_i \geq y_1 \text{ or } L_1 \leq x_i \leq L_2, \\ L_1(x, y) = 0, L_2(x, y) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

水平泊车位、垂直泊车位情况下  $L_1, L_2$  为常量.

以下将式(4)中的避障条件约束分别用基于互补约束的数学规划方法(mathematical programs with complementarity constraints, MPCC)和R函数两种方法转化为非线性代数约束, 构造车位避障模型.

### 2.3.1 MPCC方法(MPCC method)

MPCC是指基于互补约束的数学规划方法, 在化工领域中用于处理条件模型、离散决策等问题. MPCC的一般形式如下<sup>[10]</sup>:

$$\begin{aligned} \min f(x, y, z), \\ \text{s.t. } \begin{cases} h(x, y, z) = 0, \\ g(x, y, z) \leq 0, \\ 0 \leq x \perp y \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\perp$  表示互补约束, 含义为  $x$  和  $y$  至少有一个为 0, 即互补的两个约束至少有一个在边界上. 这样的互补约束需要进一步转化才可以交给NLP算法处理. 这里分别采用Reg和PF两种转化方法.

根据Reg方法, 互补约束转化为

$$\begin{cases} xy \geq 0, \\ xy \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (6)$$

其中较小的正数  $\varepsilon$  用来控制转化的精度<sup>[11]</sup>. PF方法将命题(5)的目标函数及互补约束分别转化为

$$f(x, y, z) + \rho x^T y, \quad (7a)$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases} \quad (7b)$$

目标函数(7a)中的惩罚项与式(7b)共同促使互补约束得到满足. 选择不同的罚因子  $\rho$  对求解效率的影响不

同. 可见通过Reg( $\varepsilon$ )和PF( $\rho$ )方法得到的NLP问题是原MPCC问题的近似, 近似程度取决于参数  $\varepsilon$  和  $\rho$  的值.

回到泊车中的避障条件约束(4), 首先引入非负辅助变量  $s^{pi}, s^{ni}, \mu_i$  将其转化为MPCC的一般形式:

$$\begin{cases} y_i - y_1 = s^{pi} - s^{ni}, \\ s^{pi} \geq 0 \perp \mu_i \geq 0, \\ s^{ni} \geq 0 \perp (1 - \mu_i) \geq 0, \\ \mu_i(L_1 + \varepsilon_0) \leq \mu_i x_i \leq \mu_i(L_2 - \varepsilon_0), \end{cases} \quad (8)$$

$\varepsilon_0$  为车辆四角距离车位线的安全裕量. 将式(8)中的互补约束用Reg( $\varepsilon$ )方法转化如下:

$$\begin{cases} y_i - y_1 = s^{pi} - s^{ni}, \\ s^{pi} \mu_i \geq 0, \\ s^{pi} \mu_i \leq \varepsilon, \\ s^{ni}(1 - \mu_i) \geq 0, \\ s^{ni}(1 - \mu_i) \leq \varepsilon, \\ \mu_i(L_1 + \varepsilon_0) \leq \mu_i x_i \leq \mu_i(L_2 - \varepsilon_0). \end{cases} \quad (9)$$

用PF( $\rho$ )方法转化得到的目标函数和约束分别为

$$f(x, y, z) + \rho_{1i} s^{pi} \mu_i + \rho_{2i} s^{ni}(1 - \mu_i), \quad (10a)$$

$$\begin{cases} y_i - y_1 = s^{pi} - s^{ni}, \\ s^{pi} \geq 0, \\ \mu_i \geq 0, \\ s^{ni} \geq 0, \\ (1 - \mu_i) \geq 0, \\ \mu_i(L_1 + \varepsilon_0) \leq \mu_i x_i \leq \mu_i(L_2 - \varepsilon_0). \end{cases} \quad (10b)$$

### 2.3.2 R函数方法(R-functions)

式(4)中条件约束可采用R函数法转化. R函数最早是由乌克兰学者Rvachev<sup>[12]</sup>引入的连续函数, 在含有几何约束的非线性规划、计算机图形学及机械设计<sup>[13]</sup>等多种领域取得了较好的应用. 一个R函数总与一个逻辑表达式相对应, 任何一个用集合理论表示的形体可以转化为隐函数的不等式形式<sup>[14]</sup>. 如用  $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$  表示两个区域, 采用  $R_0$ <sup>[15]</sup> 函数转换方法, 得到这两区域的集合布尔“或”运算(两区域的并集)用公式11(a)表示, “且”运算(两区域的交集)用式11(b)中的隐函数表达:

$$f_1 \vee f_2 = f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \geq 0, \quad (11a)$$

$$f_1 \wedge f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \geq 0, \quad (11b)$$

由此(4)中描述泊车安全区域的车位避障逻辑表达式可以转换为一个隐函数  $F$ :

$$\begin{cases} f_1 = y_i - y_1 \geq 0, \\ f_2 = x_i - L_1 \geq 0, \\ f_3 = L_2 - x_i \geq 0, \\ F_2 = f_1 \vee (f_2 \wedge f_3) \geq 0. \end{cases} \quad (12)$$

用式11(a)–11(b)中的  $R_0$  函数转换规则得到的  $F \geq 0$

表示车位上方区域和车位凹区域的并集.

### 2.3.3 面积法(Area method)

MPCC和R函数转换下的车位避障模型虽然保证了小车四角不会撞入车位线,但为了防止图3中情况出现,还需要增加一些约束将车位的两个尖角 $P$ 限制在车身以外.

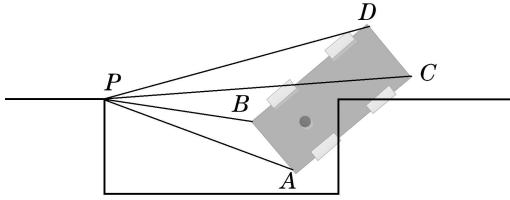


图3 车位拐点碰撞图

Fig. 3 Corner collision

这里采用面积比较法进行判断:若点 $P$ 位于矩形 $ACDB$ 之外,那么该点与矩形四角连成的三角形面积之和大于矩形的面积,否则二者面积相等.所以在避障模型中需要加入下面的约束:

$$S_{PAB} + S_{PBD} + S_{PDC} + S_{PCA} > S_{ACDB}, \quad (13)$$

其中海伦公式可以用任意三点的坐标得到其连结成的三角形面积,例如三角形 $PAB$ 的面积可以表示为

$$S_{PAB} = \frac{1}{4} \sqrt{4PA^2PB^2 - (PA^2 + PB^2 - AB^2)^2}.$$

### 2.4 泊车动态优化命题(Dynamic optimization formulation for parking system)

基于前面建立的车辆模型、避障模型,构造泊车动态优化命题.首先确定动态问题的初值条件,即初始时刻小车相对于车位坐标系的位姿和速度信息.参考车辆的运动学模型可以表示如下:

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \\ \theta(0) = \theta_0, \\ v(0) = v_0, \\ \phi(0) = \phi_0. \end{cases} \quad (14)$$

其次动态问题的终值条件,即泊车完成时的状态信息(如位移、车身方向、速度、前轮转角),以及操作变量信息(如加速度和前轮转角速度)描述如下:

$$\begin{cases} x(tf) = x_{tf}, \\ y(tf) = y_{tf}, \\ \theta(tf) = \theta_{tf}, \\ v(tf) = v_{tf} = 0, \\ \phi(tf) = \phi_{tf} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

由上述分析可以基于MPCC和R函数方法构造自主泊车的最短时间轨迹优化命题.其约束由小车运动学模型(1)、小车物理约束(2)、避障约束(包括条件避障转化约束(9)或者式(10b)或者式(12),以及拐点避障约束(13))、初值条件(14)、终端约束(15)构成;目标函

数为泊车行驶时间 $tf$ 最短,当采用PF方法建模时目标函数按照式10(a)加入相应惩罚项.

### 3 动态优化命题的全联立求解策略(Simultaneous approach)

不失一般性,上一小节中最后得到的轨迹优化问题可以表达为如下形式的微分-代数方程(DAE)动态优化问题<sup>[16]</sup>:

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(z(tf)), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = F(z(t), y(t), u(t)), \\ C(z(t), y(t), u(t)) = 0, \\ G(z(t), y(t), u(t)) \leq 0, \\ z(0) = z^0, \\ z(tf) = z_{tf}, \\ t \in [0, tf], \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

其中: $z$ 为优化问题的状态变量, $y$ 为代数变量, $u$ 为控制变量,它们都是时间的函数.上述动态问题比较复杂,通常得不到解析解,需要运用数值方法求解.此时必须将无限维的动态问题离散化,转化成有限维的问题来处理.离散化方法对动态问题的求解精度具有重要影响.

配置法离散<sup>[16]</sup>的思想是用配置点上的插值函数来逼近原问题,在配置点上无离散化误差.Lagrange插值函数常用于数值逼近,但高阶插值会导致龙格现象,因此分段低阶插值是常用方式.通过选择正交配置点可使Lagrange插值具有高阶代数精度.正交配置点的选择并不唯一,本文选择基于Radau正交配置点的Lagrange插值函数逼近状态变量和控制变量的原函数.状态变量的Lagrange插值函数如下:

$$\begin{aligned} l_j(\tau) &= \prod_{k=0, k \neq j}^K \frac{(\tau - \tau_k)}{(\tau_j - \tau_k)}, \\ z(t) &= \sum_{j=0}^K z_{ij} l_j(\tau), \end{aligned} \quad (17)$$

其中: $K$ 为插值阶次,本文选择 $K = 3$ ,使离散化求解具有5阶精度; $z_{ij}$ 为第 $i$ 个有限元第 $j$ 个配置点上状态变量的值.状态变量的初值和终值条件为

$$\begin{aligned} z_{1,0} &= z^0, \\ z_f &= z_{NE}, K. \end{aligned} \quad (18)$$

由于状态变量可导,所以相邻有限元连接处的节点上状态变量值也应该连续,故有下面的连续性条件:

$$z_{i+1,0} = \sum_{j=0}^K l_j(1) z_{ij}, \quad i \in 1, \dots, NE - 1. \quad (19)$$

控制变量的Lagrange插值多项式如下:

$$\begin{aligned} \tilde{l}_j(\tau) &= \prod_{k=1, k \neq j}^K \frac{(\tau - \tau_k)}{(\tau_j - \tau_k)}, \\ u(t) &= \sum_{j=1}^K u_{ij} \tilde{l}_j(\tau), \end{aligned} \quad (20)$$

对于控制变量不要求在有限元节点处的连续性。

相比于其他插值方法, Lagrange插值多项式的优势在于变量在各个配置点上的值恰好等于其系数, 即

$$\begin{cases} t_{ij} = t_{i-1} + (t_i - t_{i-1})\tau_j, \\ z(t_{ij}) = z_{ij}, \\ u(t_{ij}) = u_{ij}, \end{cases} \quad (21)$$

这样动态优化问题(16)离散化后的NLP命题形式如下:

$$\begin{aligned} \min & \varphi(z(tf)), \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{k=0}^K l_k(\tau_j)z_{ik} - h_i F(z_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) = 0, \\ C(z_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) = 0, \\ G(z_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \leq 0, \\ z(0) = z^0, \\ z(tf) = z_{tf}, \\ t \in [0, tf], i \in 1, \dots, NE; j \in 1, \dots, K. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

离散化后产生的大规模NLP问题求解方法主要有SQP和内点法<sup>[17-18]</sup>。目前应用广泛的SQP算法多是基于有效集方法实现, 并在中小规模的优化求解中具有较好性能。但是随着问题规模的扩大, 不等式约束的增多, 对最优有效集的确定成为SQP算法的瓶颈。而内点法在求解包含不等式约束的NLP问题时, 将边界约束作为障碍项加入到目标函数当中构造障碍问题。通过一系列的障碍问题求解来逼近原优化问题的解。从而在求解过程中避免了确定最优有效约束集的困难。因此, 内点法在求解含有大量不等式约束的优化问题时有明显的优势。目前, 在学术界和工业界应用较多的内点法求解器包括KNITRO, LOQO, IPOPT等。本文采用IPOPT求解离散化后的自主泊车优化问题(22)。

## 4 仿真实例及分析(Simulation analysis)

### 4.1 泊车数据(Parking cases)

根据文献[5], 本文研究的前驱车辆运动学相关参数见表1。

表 1 车辆参数  
Table 1 Car parameters

参数	描述	数值
$L$	轴距	2.47 m
$L_p$	前轴与前端距离	0.825 m
$L_r$	后轴与后端距离	1.07 m
$d$	车宽	1.66 m
$v_{\max}$	最大车速	1.56 m/s
$a_{\max}$	最大加速度	3 m/s <sup>2</sup>
$\phi$	最大前轮转角	0.599 rad
$w$	最大角速度	1.55 rad/s

表2中设计了不同泊车位下的3个案例。每个案例均采用MPCC和R函数建模求解。

表 2 泊车仿真案例

Table 2 Simulation cases

泊车类型	初始位置	初始航向	终端位置	终端航向
水平泊车	(10, 8)	水平向右	(-0.93, 1)	水平向右
垂直泊车	(3.6, 7.5)	水平向右	(0, 1.4)	竖直向上
斜式泊车	(7, 7)	水平向右	(0.82, 1.85)	与x轴正向夹角60°

### 4.2 仿真结果(Simulation results)

对表2中各案例进行求解得到了一组最短时间泊车优化轨迹, 如表3所示。同一泊车轨迹优化命题下3种方法的求解结果差别不大, 但迭代次数有较大差异。

表 3 仿真结果

Table 3 Simulation results

泊车类型	求解结果	R函数	Reg	PF
水平泊车	$tf(s)$	12.3	12.27	12.72
	迭代次数	155	1733	502
垂直泊车	$tf(s)$	6.76	6.63	6.71
	迭代次数	221	842	327
斜式泊车	$tf(s)$	6.23	6.23	6.38
	迭代次数	116	2141	781

仿真时Reg模型下参数 $\epsilon$ 的选取对优化结果会有影响, 平行泊车案例中 $\epsilon = 10^{-4}$ , 在垂直泊车和斜式泊车案例中 $\epsilon = 10^{-8}$ 。参数 $\epsilon$ 越小, 转化后的NLP问题越接近原泊车轨迹优化命题, 但是对初值要求高, 收敛困难; PF模型中惩罚因子 $\rho = 10^6$ 。惩罚因子足够大时, 相应NLP问题就等价于原问题, 否则需要求解一系列 $\rho$ 值较小的NLP问题来近似原问题的解; 而R函数可以直接构造等价于泊车优化原问题的NLP问题, 仿真实验中发现该NLP命题对初值不敏感, 求解鲁棒。

不同案例在3种模型下求解所需迭代次数表明: 一般情形下PF方法转化的NLP命题的优化效率较高, Reg模型可能耗费更多的迭代次数搜索到更优的局部解, 而R函数建模方法在求解时表现出了高效、优质的特点。

图4是R函数模型下3种泊车案例的优化轨迹曲线。矩形框代表小车, 起止位姿点处小车用较粗的矩形框表示, 车位和小车的尺寸是按照1:1绘制的。虽然求解结果是有限元配置点上的离散值, 但由于泊车空间小, 程序中采用15个有限元、45个配置点, 确保了足够的精度让小车连续运行。

R函数模型下全联立求解得到了泊车过程中车辆的前轴中心速度、加速度、前轮转角、前轮角速度信息, 如图5所示。可见3种泊车案例下小车四角及车身均可以无碰地进入车位, 沿着光滑轨迹顺利到达车位中指定位姿点。

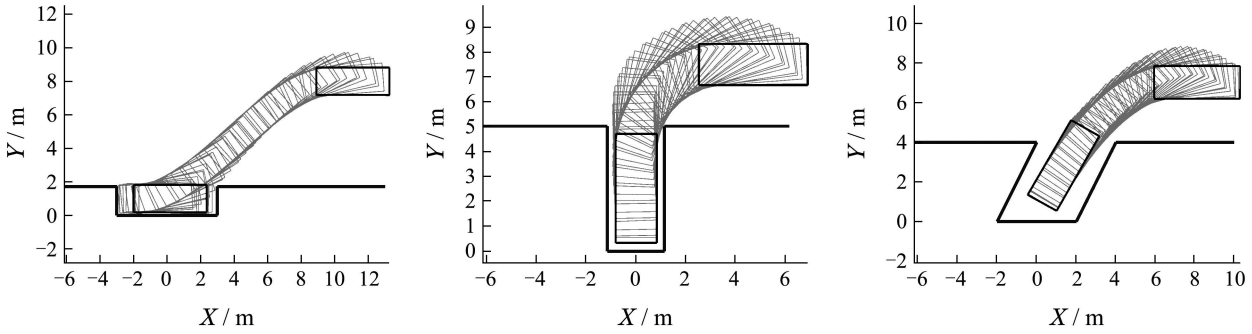
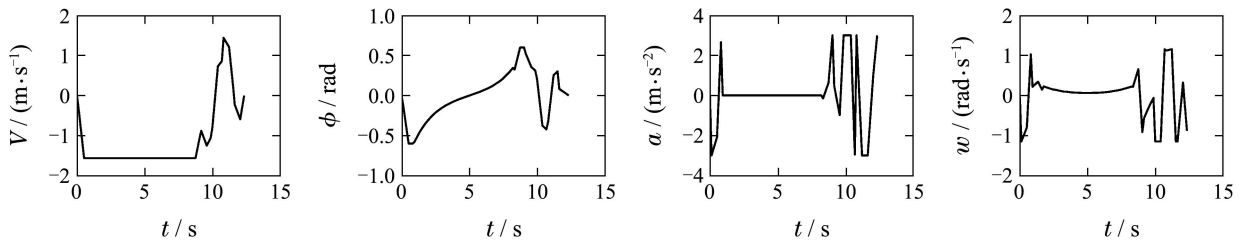
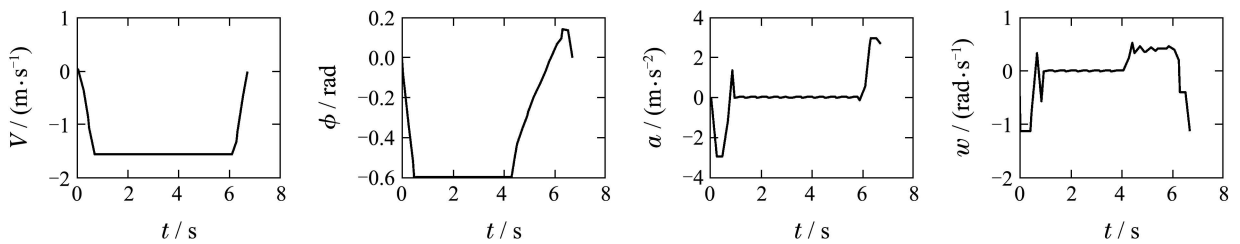


图4 泊车轨形示意图

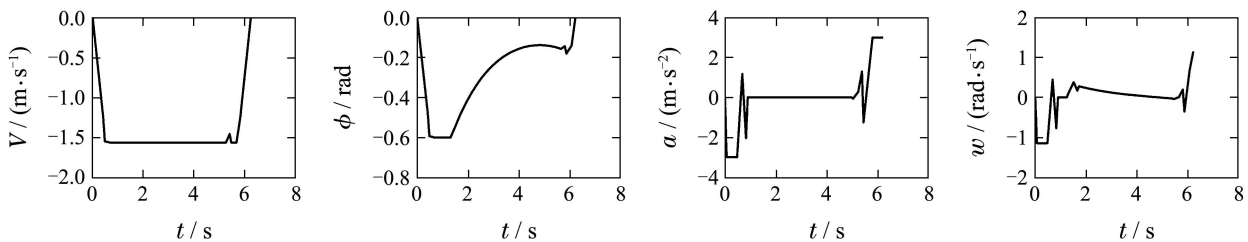
Fig. 4 Parking trajectories



(a) 平行泊车



(b) 垂直泊车



(c) 斜入库泊车

图5 泊车操作变量曲线

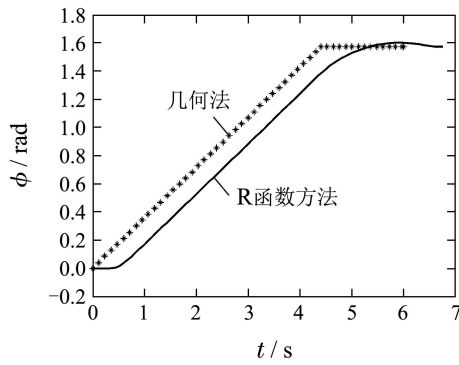
Fig. 5 Profiles of control variables

**4.3 R函数模型与几何法(R-functions method VS the geometric method)**

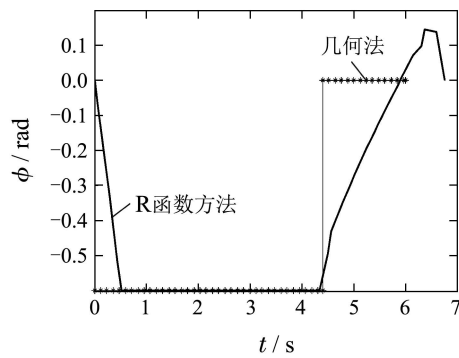
文献[5]采用几何法研究车辆垂直泊车的转向控制问题,针对待泊车辆的不同起始位置提出了3种泊车模式.其中模式1的转向策略最为简单:车辆挂入倒档,方向盘向右打到极限位置即可.同时文中划分了该模式下的停车起始区域.本文垂直泊车案例中选取的泊车起点属于该区域.为了进行比较,在

MATLAB下建立了基于几何法路径规划的垂直泊车Simulink运动学模型.仿真结果显示几何路径的最后一段垂直向下到达终点,1/4圆弧与直线段连接处不光滑,表示车辆在此处停车转向,这样会损耗轮胎.然而几何路径配以的转向策略与R函数优化命题下求解的泊车策略是一致的:前轮先顺时针打到极限位置,让小车沿着圆弧倒车,然后到达某个位置前轮逆时针回正,最后直线倒车至终点.

图6是两种方法下小车的车身方向角和前轮转角的曲线。可以看到星号线描绘的几何法操作轨迹大概在4.4 s处车身方向角有明显拐点同时前轮转角发生跳变。而R函数方法求解的车辆车身方向角和前轮转角连续曲线均有超调,这是因为泊车轨迹优化模型中对这两个变量有连续可导、不能突变的约束。



(a) 车身方向角



(b) 前轮转角

图6 车身方向角和前轮转角比较图

Fig. 6 Comparison of orientation and front wheel angles

假设小车沿最小转向半径按照最大速度匀速运动,考虑到泊车起停时的加减速时间以及前轮转向、回正的时间,几何方法泊车所耗时间大约8.1 s,相比较而言,本文方法可以找到更短时间下的安全泊车轨迹。

## 5 结语(Conclusions)

针对多种车位下的自主泊车问题,本文用MPCC和R函数解决了障碍环境的条件建模困难,建立了带有复杂避障约束的轨迹动态优化命题,采用全联立Lagrange配置法将DAE模型离散化为NLP,选用IPOPT求解器高效求解得到最短时间目标函数下的优化轨迹。本文提出的方法具有以下特点:

1) 对于不同车位下的自主泊车问题建立了统一描述框架,设计了优化目标,便于多样化深入研究泊车问题;

2) 高效的全联立求解算法一次性规划出小车轨迹及操作变量,可用于指导车辆下层直接跟踪控制;

3) 比较MPCC和R函数建立的避障模型的求解效果,发现MPCC作为化工领域转化条件建模的强大技术具有普适性,可以解决泊车轨迹规划。然而R函数模型解决泊车问题更高效、鲁棒性更强;

4) 本文在自主泊车轨迹优化建模中发掘了R函数理论新的应用价值,后续可以将该算法应用于机器人或是小车多边形避障的轨迹优化研究中。

## 参考文献(References):

- [1] GUO Konghui, JIANG Hui, ZHANG Jianwei, et al. Automatic parallel parking steering controller based on fuzzy logic control theory [J]. *Journal of Jilin University (Engineering Science)*, 2009, 39(S2): 236 – 240. (郭孔辉, 姜辉, 张建伟, 等. 基于模糊逻辑的自动平行泊车转向控制器 [J]. 吉林大学学报(工学版), 2009, 39(S2): 236 – 240.)
- [2] LIN Zhenzhen, LI Qing, LIANG Yanjv, et al. Parallel parking algorithm based on autonomous path planning [J]. *Application Research of Computers*, 2012, 5(29): 1713 – 1715. (林臻臻, 李庆, 梁艳菊, 等. 一种基于路径规划的自动平行泊车算法 [J]. 计算机应用研究, 2012, 5(29): 713 – 1715.)
- [3] DUBINS L E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal position and tangents [J]. *American Journal of Mathematics*, 1957, 57(3): 497 – 516.
- [4] REEDS J A, SHEPP L A. Optimal path for a car that goes both forward and backward [J]. *Pacific Journal of Mathematics*, 1990, 145(2): 367 – 393.
- [5] MENG Fanwei. *Search on steering control algorithm for automatic vertical parking* [D]. Changchun: Jilin University, 2011. (孟繁微. 车辆垂直泊车转向控制算法研究 [D]. 长春: 吉林大学, 2011.)
- [6] WANG Fangcheng. *Research of automatic parallel parking system* [D]. Hefei: University of Science & Technology of China, 2010. (王芳成. 自动平行泊车系统的研究 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2010.)
- [7] HAN Peng, SHAN Jiayuan. Re-entry trajectory optimization using Radau pseudospectral method [J]. *Control Theory & Application*, 2013, 30(8): 1027 – 1032. (韩鹏, 单家元. 基于Radau伪谱法的重复使用运载器再入轨迹优化 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(8): 1027 – 1032.)
- [8] SUN Yong. *Trajectory optimization and guidance of hypersonic vehicle based on improved gauss pseudospectral method* [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2012. (孙勇. 基于改进 Gauss 伪谱法的超高速飞行器轨迹优化与控制 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012.)
- [9] TAN Yuegang. *The Principle and Control of Nonholonomic Robots* [M]. Beijing: Science Press, 2011: 1 – 8. (谭跃刚. 非完整机器人的原理与控制 [M]. 北京: 科学出版社, 2011: 1 – 8.)
- [10] BIEGLER L T. *Nonlinear Programming: Concepts, Algorithms, and Applications to Chemical Processes* [M]. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 2010: 325 – 335.
- [11] RAGHUNATHAN A U, BIEGLER L T. An interior point method for mathematical programs with complementarity constraints (MPCCs) [J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Optimization*, 2005, 15(3): 720 – 731.

- [12] RVACHEV V L, SHEIKO T I. R-functions in boundary value problems in mechanics [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1995, 48(4): 151 – 188.
- [13] SHAPIRO V. Real function for representation of rigid solids [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1994, 11(2): 153 – 175.
- [14] LIU Jinyi, ZHANG Hongling. R-function theory introduction and application review [J]. *Journal of Engineering Graphics*, 2001, 22(2): 114 – 123.  
(刘金义, 张红玲. R-函数理论介绍及其应用评述 [J]. *工程图学学报*, 2001, 22(2): 114 – 123.)
- [15] WU Jian, WANG Xiaochun, JIANG Hong, et al. Representation for polygons with function [J]. *Computer Engineering & Application*, 2003, 39(32): 87 – 89.  
(吴坚, 王小椿, 姜虹, 等. 多边形的隐函数表示法 [J]. *计算机工程与应用*, 2003, 39(32): 87 – 89.)
- [16] WANG Zhiqiang. *Fast solving strategies for dynamic optimization with differential-algebraic equations* [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2011.  
(王志强. 微分代数方程动态优化问题的快速求解策略研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2011.)
- [17] KAMESWARAN S, BIEGLER L T. Convergence rates for direct transcription of optimal control problems using collocation at Radau Points [J]. *Computational Optimization and Application*, 2008, 41(1): 81 – 126.
- [18] WANG Kexin. *Study on theory and algorithm for large-scale nonlinear process system optimization* [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2008.  
(王可心. 大规模过程系统非线性优化的简约空间理论与算法研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2008.)

#### 作者简介:

**陈荣华** (1993–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为复杂避障约束下自动驾驶轨迹优化, E-mail: 15198277133@163.com;

**王可心** (1974–), 女, 助理研究员, 研究方向为非线性优化理论与算法, E-mail: kxwang@iipc.zju.edu.cn;

**邵之江** (1970–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向有多阶段、复杂状态约束情况下的轨迹优化、机理模型的实时修正与优化等, E-mail: zjshao@iipc.zju.edu.cn.