

## 连续时间Markov决策过程互模拟等价及逻辑保持

黄镇谨<sup>1,2†</sup>, 陆阳<sup>1</sup>, 杨娟<sup>1</sup>, 王智文<sup>2</sup>

(1. 合肥工业大学 计算机与信息学院, 安徽 合肥 230009; 2. 广西科技大学 计算机与通信工程学院, 广西 柳州 545006)

**摘要:** 模型检测中, Markov决策过程可以建模具有不确定性的系统, 然而状态空间爆炸问题将会影响系统验证的成败与效率, 互模拟等价可以用于系统状态的简约. 在强互模拟关系的基础上, 给出Markov决策过程模型弱互模拟等价关系的概念, 导出了连续时间Markov决策过程及其内嵌离散时间Markov决策过程互模拟等价关系的内在联系; 在强互模拟等价关系逻辑特征保持的基础上, 给出弱互模拟等价关系下的逻辑保持性质, 证明了弱互模拟等价关系的两个状态, 同时满足除下一步算子外的连续随机逻辑公式, 从而可以将原模型中的验证问题转换为简约后模型的验证问题, 提高验证的效率.

**关键词:** 马尔科夫链; 马尔科夫决策过程; 互模拟等价关系; 逻辑保持

**中图分类号:** TP302      **文献标识码:** A

## Bisimulation equivalence relation and logic preservation for continue time Markov decision process

HUANG Zhen-jin<sup>1,2†</sup>, LU Yang<sup>1</sup>, YANG Juan<sup>1</sup>, WANG Zhi-wen<sup>2</sup>

(1. School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei Anhui 230009, China;

2. School of Computer Science and Communication Engineering, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou Guangxi 545006, China)

**Abstract:** Markov decision process can be employed to model complex systems with nondeterministic choice in model checking. However, whether system verification can be performed successfully and effectively is influenced by the emergence of state space explosion. Bisimulation equivalence can be views as a feasible states reduction approach. Based on the concept of strong bisimulation, the definition of weak bisimulation on Markov decision process are proposed, then the inherent link of bisimulation equivalence between continue time markov decision process and its embedded discrete time decision process is derived. Meanwhile, based on Logic characterization preservation of strong bisimulation, the relation between the weak bisimulation equivalence and the continue stochastic logic equivalence for continue time Markov decision process is proved, which shows that weak bisimulation coincides with logical equivalence excepted the next-step operator.

**Key words:** Markov chains; Markov decision process; bisimulation equivalence relation; logic preservation

### 1 引言(Introduction)

大量的复杂系统都具有不确定性特征, 这种固有的属性反映了系统的不同演变行为, 可以用于刻画建模过程中其他方式不能表达的概念, 比如调度自由、实现自由、外部环境未知、不完全信息等. 经典的性能分析模型, 无论是连续时间Markov链(continuous time Markov chain, CTMC), 还是离散时间Markov链(discrete time Markov chain, DTMC), 都不能用于刻画具有不确定性特征的系统, 与DTMC(CTMC)不同, 离散时间(连续时间)Markov决策过程中每个状态到达其

他状态的迁移除了包含一步转移概率(转移率)外, 还包括动作信息, 系统在某个状态的不确定性选择可由该状态的使能动作确定, 因此Markov决策过程可以用于建模具有不确定性特征的系统.

在对系统性能进行分析验证时, 随着系统参数数目的增加, 状态空间呈指数性增长, 因此会产生状态空间爆炸的问题. 很多学者对解决状态空间爆炸的方法和理论进行了研究并取得了一定的成果<sup>[1-5]</sup>. 在这些方法中, 状态简约是一种重要的方法之一. 其中基于等价关系的状态简约方法可以用来对状态空间进

收稿日期: 2015-10-14; 录用日期: 2016-04-28.

†通信作者. E-mail: schzj@163.com; Tel.: +86 772-2685975.

本文责任编辑: 陈杰.

国家自然科学基金项目(61462008, 61070220), 安徽省自然科学基金项目(1608085QF149), 广西省高校科学技术研究项目(LX2014186)资助. Supported by National Natural Science Foundation of China (61462008, 61070220), National Natural Science Foundation of Anhui Province (1608085QF149) and College and University Scientific and Technology Foundation of Guangxi Province (LX2014186).

行聚集,从而达到压缩状态空间的目的.

等价关系建立了不同系统之间行为比较的一个标准,同时也是进程代数理论中各种代数公理建立的基础.对等价关系的研究最初是基于功能模型的,如标记迁移系统、事件结构等. Van Glabeek对等价关系进行了归类,分析了从迹等价到互模拟等价之间的性质与关系<sup>[6-7]</sup>.随着等价关系在功能模型上的发展与完善,一些学者又把这些思想扩展到概率模型上,并建立概率模型上的等价关系,并把其作为对概率模型进行性能分析的重要工具.在这些等价关系中,互模拟等价关系是一类很重要的等价关系,具有良好的性质和比较强的区分能力.

基于 Jou 和 Smolka 的开创性工作<sup>[8]</sup>, Jonsson 和 Larsen 在文献[9-10]中开始对概率模型的等价关系进行研究,随后,很多概率模型和随机模型上的等价关系也先后得到了研究,如基于概率进程代数<sup>[11]</sup>和 Markov 进程代数<sup>[12]</sup>、离散时间 Markov 链<sup>[13]</sup>和连续时间 Markov 链<sup>[14]</sup>、交互式 Markov 链<sup>[15]</sup>(interactive Markov chain, IMC)等.这些文献定义了对应模型上的互模拟关系,给出这些关系在模型上的性质.一些文献则综合给定模型上的各类关系,分析这些关系之间的内在联系,如文献[16]分析了离散和连续时间 Markov 链上的强(弱)互模拟和强(弱)模拟关系之间的联系,而文献[17]则给出了 IMC 下的强(弱)互模拟和强(弱)模拟关系的定义,分析了它们之间的联系.对于具有不确定性特性的连续时间 Markov 决策过程, Neuhauber 首次给出了该模型上强互模拟关系的定义.

在模型检测中,若互模拟等价关系关于某一类时态逻辑具有逻辑保持性,则可以对等价的状态进行压缩,并将对原模型的验证转化到与之等价的商模型中进行,从而提高检测的效率.因此,互模拟等价关系的逻辑保持问题,无论是在经典的功能模型上,还是在传统的性能分析模型上,都受到了关注.文献[18]证明了互模拟等价关系在 CTL(computation tree logic)上的保持性.文献[16]证明了 DTMC 和 CTMC 上强(弱)互模拟等价关系与 PCTL(probability computation tree logic)和 CSL(continuous stochastic logic)等价的一致性.覃广平在文献[17]分析了 IMC 下刻画逻辑 aCSL(action based CSL)的互模拟等价关系及模拟前序特征. Neuhauber 则研究了连续时间 Markov 决策过程(continue time Markov decision process, CTMDP)下强互模拟等价在 CSL 模态逻辑下的逻辑保持<sup>[19]</sup>.

虽然很多性能模型的互模拟等价关系得到了研究,然而,对于 CTMDP 来说,已有的文献中只分析了强互模拟关系,并未给出弱互模拟等价定义并分析弱互模拟等价下的逻辑保持问题.因此,本文在强互模拟关系的基础上,定义弱互模拟等价关系定义,给出了这些关系之间内在的联系,同时对互模拟关系下的逻辑

保持问题,证明了弱互模拟等价与 CSL 逻辑等价性的联系.

## 2 互模拟等价关系(Bisimulation equivalence)

互模拟关系是一个等价关系,它要求具有互模拟等价关系的状态之间具有完全一样的行为特征,即它们具有相同的分支结构而且可以逐步相互模拟.在传统的功能模型中,由于只考虑变迁时的动作,因此只需判断执行动作及执行方式是否相同即可,在 DTMC 或 CTMC 模型中,由于不涉及动作,因此只需定义什么是相互模拟的随机行为即可,在 CTMDP 中,状态的转移包含了动作和时间信息,因此需要将两者都考虑在内.

### 2.1 强互模拟关系(Strong bisimulation equivalence)

**定义 1** 令  $\mathcal{C} = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$  为带标记的 CTMDP,  $\mathcal{R}$  为  $S$  上的一个等价关系,即有  $\mathcal{R} \subseteq S \times S$ .若对于任意的  $(s, s') \in \mathcal{R}$ , 有  $L(s) = L(s')$ ; 且对所有的  $\alpha \in \text{Act}, C \in [S]_{\mathcal{R}}$  有  $R(s, \alpha, C) = R(s', \alpha, C)$ , 则称  $\mathcal{R}$  为  $S$  上的强互模拟关系.如果存在一个  $S$  上的强互模拟关系  $\mathcal{R}$ , 使得  $s_1 \mathcal{R} s_2$ , 则称  $s_1$  和  $s_2$  是强互模拟的, 记为  $s_1 \sim_{\mathcal{C}} s_2$ .

其中  $[S]_{\mathcal{R}} = \{s' \in S | (s, s') \in \mathcal{R}\}$  表示由等价关系  $\mathcal{R}$  所划分的等价类,  $R(s, \alpha, C) = \sum_{s' \in C} R(s, \alpha, s')$  表示从状态  $s$  选择动作  $\alpha$  一步转移到等价类  $C$  上状态的转移率总和.由定义可知,两个状态互模拟等价,首先要求其具有相同的原子命题,其次要求其通过同一个动作到达其他任何一个等价类的转移率相同,将具有等价关系的状态聚集,所得模型就是原模型在等价关系  $\mathcal{R}$  上的商模型.下面给出商模型的定义.

**定义 2** 令  $\mathcal{C} = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$  为带标记的 CTMDP,  $\mathcal{R}$  为  $S$  上的一个互模拟等价关系,则模型  $\mathcal{C}$  在  $\mathcal{R}$  关系上的商模型表示为  $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{S}, \text{Act}, AP, \tilde{\mathbf{R}}, \tilde{L}, \tilde{v})$ , 其中  $\tilde{S} = [S]_{\mathcal{R}}$ , 对于任意的  $s \in S, \alpha \in \text{Act}, C \in \tilde{S}$ , 有  $\tilde{R}([s], \alpha, C) = R(s, \alpha, C)$ ;  $\tilde{L}([s]) = L(s)$ ;  $\tilde{v}([s]) = \sum_{s' \in [s]} v(s')$ .

上述定义中,  $[s]$  表示状态  $s$  所属的等价类,经过聚集得到的商模型其状态上的标记等于相应等价类的标记,状态转移率等于原模型中单个状态到达另一个等价类的转移率,而初始分布等于原模型相应等价类的所有状态初始分布和.

**例 1** 考虑图 1 的 CTMDP, 设  $L(s_0) = L(s_1) = L(s_2) = b, L(s_3) = L(s_4) = c$ , 根据强互模拟等价的概念,可以很容易地得到关系  $\mathcal{R} = \{(s_0, s_0), (s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3), (s_4, s_4), (s_2, s_1), ((s_1, s_2), s_3, s_4), (s_4, s_3)\}$  是一个强互模拟等价关系,等价类  $[s_0] =$

$\{s_0\}, [s_1] = [s_2] = [s_1, s_2], [s_3] = [s_4] = \{s_3, s_4\}$ , 通过将具有等价关系的状态进行聚集, 就可以得到相应的商模型, 如图2所示, 其中商模型上的转移率分别为

$$\begin{aligned} R([s_0], \alpha, [s_1]) &= 2, R([s_1], \beta, [s_0]) = 2, \\ R([s_0], \alpha, [s_3]) &= 1, R([s_1], \alpha, [s_3]) = 2, \\ R([s_3], \alpha, [s_1]) &= 3. \end{aligned}$$

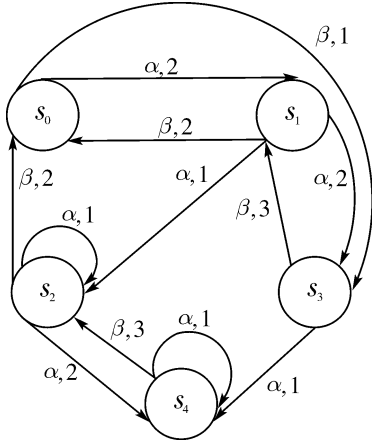


图 1 强互模拟等价CTMDP模型

Fig. 1 CTMDP model of strong bisimulation

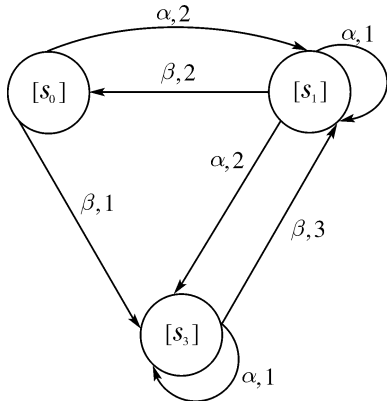


图 2 强互模拟关系商模型

Fig. 2 Quotient model of strong bisimulation

**定义 3** 令  $C = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$  为带标记的CTMDP, 则其内嵌DTMDP  $\text{emb}(C) = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{P}, L, v)$ , 且当  $E(s, \alpha) = \sum_{s' \in S} R(s, \alpha, s') > 0$  时,

$$P(s, \alpha, s') = R(s, \alpha, s') / E(s, \alpha),$$

否则  $P(s, \alpha, s') = 0$ .

**定义 4** 令  $D = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{P}, L, v)$  为带标记的DTMDP,  $\mathcal{R}$  为  $D$  上的一个等价关系, 即有  $\mathcal{R} \subseteq S \times S$ . 若对于任意的  $(s, s') \in \mathcal{R}$  有  $L(s) = L(s')$ , 且对所有的  $\alpha \in \text{Act}, C \in [S]_{\mathcal{R}}$ , 有  $P(s, \alpha, C) = P(s', \alpha, C)$ , 则称  $\mathcal{R}$  为  $S$  上的强互模拟关系. 如果存在一个  $S$  上的强互模拟关系  $\mathcal{R}$ , 使得  $s_1 \mathcal{R} s_2$ , 则称  $s_1$  和  $s_2$  是强互模拟的, 记为  $s_1 \sim_{\mathcal{D}} s_2$ .

**命题 1**  $C = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$  中, 对于任意的  $s_1, s_2 \in S$ , 若有  $s_1 \sim_C s_2$ , 则在

$$\mathcal{D} = \text{emb}(C) = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{P}, L, v)$$

中, 有  $s_1 \sim_{\mathcal{D}} s_2$ .

**证** 因为  $s_1 \sim_C s_2$ , 根据定义1, 有  $L(s_1) = L(s_2)$ ,  $R(s_1, \alpha, C) = R(s_2, \alpha, C)$ . 由  $\text{emb}(C)$  的定义

$$P(s_1, \alpha, C) = R(s_1, \alpha, C) / E(s_1, \alpha),$$

$$P(s_2, \alpha, C) = R(s_2, \alpha, C) / E(s_2, \alpha),$$

所以  $P(s_1, \alpha, C) = P(s_2, \alpha, C)$ . 根据定义4, 有  $s_1 \sim_{\mathcal{D}} s_2$ . 证毕.

### 2.2 弱互模拟关系 (Weak bisimulation equivalence)

在强互模拟等价关系中, 要求等价的两个状态到所有的等价类具有相同的转移率, 当忽略等价状态到自身等价类的累加转移时, 则可以定义相应模型上的弱互模拟等价关系.

令  $\mathcal{D} = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{P}, L, v)$  为带标记的DTMDP,  $\mathcal{R} \subseteq S \times S$  是  $D$  上的等价关系, 若  $s_1 \mathcal{R} s_2$ , 则称变迁  $s_1 \rightarrow s_2$  为  $\mathcal{R}$ -silent 变迁. 令

$$\text{Silent}_{\mathcal{R}} = \{s \mid \forall \alpha \in \text{Act}, s \in S, P(s, \alpha, [s]_{\mathcal{R}}) = 1\},$$

当  $s \notin \text{Silent}_{\mathcal{R}}, s' \in S$  且  $s' \notin [s]_{\mathcal{R}}$  时, 有

$$P(s, \alpha, s' \mid \neg \mathcal{R}\text{-silent\_tran}) =$$

$$P(s, \alpha, s') / (1 - P(s, \alpha, [s]_{\mathcal{R}})),$$

$P(s, \alpha, s' \mid \neg \mathcal{R}\text{-silent\_tran})$  表示在无等价类状态内部变迁的情况下, 从状态  $s$  出发通过动作  $\alpha$  从  $s$  变迁到  $s'$  的条件概率.

**定义 5**  $D = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{P}, L, v)$  为带标记的DTMDP,  $\mathcal{R}$  为  $S$  上的等价关系, 即有  $\mathcal{R} \subseteq S \times S$ . 称  $\mathcal{R}$  为  $S$  上的弱互模拟关系, 若对所有的  $s \mathcal{R} s'$ , 有

i) 对于任意的  $(s, s') \in \mathcal{R}$ , 有  $L(s) = L(s')$ ;

ii)  $s, s' \notin \text{Silent}_{\mathcal{R}}, \forall \alpha \in \text{Act}$ , 有

$$P(s, \alpha, C \mid \neg \mathcal{R}\text{-silent\_tran}) =$$

$$P(s', \alpha, C \mid \neg \mathcal{R}\text{-silent\_tran}),$$

且  $C \in [S]_{\mathcal{R}} C \neq [s]_{\mathcal{R}}$ .

iii) 若  $s \in \text{Silent}_{\mathcal{R}}, s' \notin \text{Silent}_{\mathcal{R}}$ ,  $s$  可以确定的概率到达点  $s'' \in [s]_{\mathcal{R}} \setminus \text{Silent}_{\mathcal{R}}$ .

如果存在一个  $S$  上的弱互模拟关系  $\mathcal{R}$ , 使得  $s \mathcal{R} s'$ , 则称  $s$  和  $s'$  是弱互模拟的, 记为  $s \approx_{\mathcal{D}} s'$ .

**定义 6** 令  $C = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$  为带标记的CTMDP,  $\mathcal{R}$  为  $C$  上的一个等价关系, 即有  $\mathcal{R} \subseteq S \times S$ . 若对于任意的  $(s, s') \in \mathcal{R}$ , 有  $L(s) = L(s')$ ; 且对所有的  $\alpha \in \text{Act}, C \in [S]_{\mathcal{R}}$ , 有  $R(s, \alpha, C) = R(s', \alpha, C)$  且  $C \neq [s]_{\mathcal{R}}$ , 则称  $\mathcal{R}$  为  $S$  上的弱互模拟关系. 如果存在一个  $S$  上的弱互模拟关系  $\mathcal{R}$ , 使得  $s \mathcal{R} s'$ , 则称  $s$  和

$s'$ 是弱互模拟的, 记为 $s \approx_C s'$ .

**例2** 考虑一个CTMDP上弱互模拟等价关系的例子. CTMDP模型如图3所示, 设 $L(s_0) = L(s_1) = b$ ,  $L(s_2) = L(s_3) = c$ , 关系 $\mathcal{R} = \{(s_0, s_0), (s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3), (s_0, s_1), (s_1, s_0)\}$ 是一个弱互模拟等价关系, 等价类 $[s_0] = \{s_0, s_1\}$ ,  $[s_2] = \{s_2\}$ ,  $[s_3] = \{s_3\}$ , 通过将具有等价关系的状态进行聚集, 就可以得到相应的商模型, 如图4所示, 其中商模型上的转移率分别为

$$\begin{aligned} R([s_0], \gamma, [s_2]) &= 1, R([s_2], \beta, [s_0]) = 2, \\ R([s_0], \alpha, [s_3]) &= 2, R([s_3], \beta, [s_0]) = 1, \\ R([s_3], \alpha, [s_2]) &= 1, R([s_2], \gamma, [s_3]) = 3. \end{aligned}$$

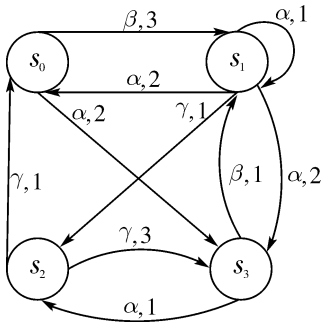


图3 弱互模拟关系CTMDP模型

Fig. 3 CTMDP model of weak bisimulation

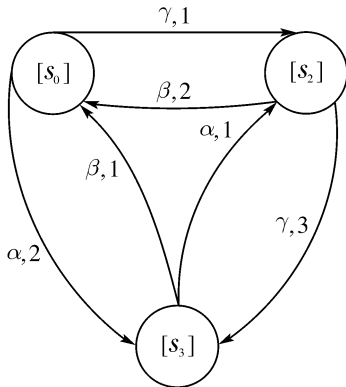


图4 弱互模拟关系商模型

Fig. 4 Quotient model of weak bisimulation

**命题2**  $\mathcal{C} = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$ 中, 对于任意的 $s_1, s_2 \in S$ , 若有 $s_1 \approx_C s_2$ , 则在 $\mathcal{D} = \text{emb}(\mathcal{C}) = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{P}, L, v)$ 中, 有 $s_1 \approx_{\mathcal{D}} s_2$ .

**证** 令 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{C}$ 上的弱互模拟等价关系, 根据 $\text{emb}(\mathcal{C})$ 的定义, 对于任意的 $s_1 \mathcal{R} s_2$ 在 $\mathcal{D}$ 显然有 $L(s_1) = L(s_2)$ : 在 $\mathcal{C}$ 中 $s_1 \mathcal{R} s_2$ , 设 $B = [s_1]_{\mathcal{R}} = [s_2]_{\mathcal{R}}$ , 分两种情况讨论:

i) 若 $s_1 \in \text{Silent}_{\mathcal{R}}$ , 则 $\forall \alpha \in \text{Act}$ , 有 $P(s_1, \alpha, B) = 1$ , 进而 $R(s_1, \alpha, B) = E(s_1, \alpha)$ , 所以对于 $\forall \alpha \in \text{Act}$ ,  $C \in [S]_{\mathcal{R}}$ , 且 $C \neq B$ , 有 $R(s_2, \alpha, C) = R(s_1, \alpha, C) = 0$ , 因此有 $P(s_2, \alpha, B) = 1$ .

ii) 若 $s_1 \notin \text{Silent}_{\mathcal{R}}$ 且 $s_2 \notin \text{Silent}_{\mathcal{R}}$ , 当 $i = 1, 2$ 时, 则对于 $\forall \alpha \in \text{Act}$ 且 $P(s_i, \alpha, B) < 1$ , 有

$$E(s_i, \alpha) = \sum_{C \in [S]_{\mathcal{R}}, C \neq B} R(s_i, \alpha, C) + R(s_i, \alpha, B),$$

因为 $s_1 \approx_C s_2$ ,  $\forall \alpha \in \text{Act}$ ,  $C \in [S]_{\mathcal{R}}$ 且 $C \neq B$ , 有

$$R(s_2, \alpha, C) = R(s_1, \alpha, C),$$

因此

$$\sum_{C \in [S]_{\mathcal{R}}, C \neq B} R(s_1, \alpha, C) = \sum_{C \in [S]_{\mathcal{R}}, C \neq B} R(s_2, \alpha, C),$$

所以有

$$E(s_1, \alpha) - R(s_1, \alpha, B) = E(s_2, \alpha) - R(s_2, \alpha, B),$$

则

$$\begin{aligned} P(s_1, \alpha, C | \neg \mathcal{R}\text{-silent\_tran}) &= \\ \frac{P(s_1, \alpha, C)}{1 - P(s_1, \alpha, B)} &= \\ \frac{E(s_1, \alpha) \cdot P(s_1, \alpha, C)}{E(s_1, \alpha) \cdot (1 - P(s_1, \alpha, B))} &= \\ \frac{R(s_1, \alpha, C)}{E(s_1, \alpha) - R(s_1, \alpha, B)} &= \\ \frac{R(s_2, \alpha, C)}{E(s_2, \alpha) - R(s_2, \alpha, B)} &= \\ \frac{P(s_2, \alpha, C)}{1 - P(s_2, \alpha, B)} &= \\ P(s_2, \alpha, C | \neg \mathcal{R}\text{-silent\_tran}). & \end{aligned}$$

若 $s_1 \notin \text{Silent}_{\mathcal{R}}$ 且 $s_2 \notin \text{Silent}_{\mathcal{R}}$ , 当 $i = 1, 2$ 时, 则对于 $\exists \alpha \in \text{Act}$ 且 $P(s_i, \alpha, B) = 1$ 时, 则参照i). 综上, 有 $s_1 \approx_{\mathcal{D}} s_2$ .

**命题3** 对任意CTMDP中的两个状态 $s_1, s_2 \in S$ , 有

$$s_1 \sim_C s_2 \Rightarrow s_1 \approx_C s_2.$$

**证** 根据定义1和定义6直接可证.

### 3 互模拟等价关系的逻辑保持(Logic preservation of bisimulation equivalence)

在给出了CTMDP强(弱)互模拟等价定义和性质之后, 下面将对强(弱)互模拟等价关系下的逻辑保持问题进行分析. 所谓逻辑保持问题, 是指针对某一类时态逻辑的逻辑公式, 具有关联关系的两个状态的可满足性是否保持一致. 针对前面的论述, 本节将分析CTMDP中强(弱)互模拟关系在时态逻辑上的逻辑保持性问题.

#### 3.1 强互模拟等价逻辑保持性(Logic preservation of strong bisimulation equivalence)

在现有的针对性能模型的时态逻辑中, asCSL (action and state base CSL)具有比较强的逻辑表达能力, 既能够表达系统的状态特征而且能够表达系统的

动作特征, 基于正则表达式的路径范式能够表示更为丰富的路径特征. 从已有的文献可以看出, 强互模拟等价关系具有很强的逻辑保持性, 因此, 在分析 CTMDP 模型中强互模拟等价关系的逻辑保持性问题时, 以 asCSL 时态逻辑作为研究的对象.

考虑到 CTMDP 的诱导 CTMC 稳态概率与初始分布无关且空间可达概率属性可借助时空对偶性质求解, 设状态公式为  $\Phi ::= \text{true} \mid \alpha \mid \neg\Phi \mid \Phi \wedge \Phi \mid \mathcal{P}_{\leq p}(\varphi^t)$ , 路径公式  $\varphi$  为  $\varphi ::= \varepsilon \mid (\phi, b) \mid \varphi \circ \varphi \mid \varphi \cup \varphi \mid \varphi^*$ . 在状态公式中如果  $\Phi = \alpha$ , 根据强互模拟等价定义, 若  $s \sim s'$ , 有  $L(s) = L(s')$ , 所以有  $s \models \Phi, s' \models \Phi$ . 对于否定和合取算子显然也成立. 因此, 在分析逻辑保持性时, 主要分析等价的状态基于路径的概率可满足是否一致. 对于互模拟等价的状态及商模型, 有以下命题.

**命题 4**<sup>[19]</sup> 在 CTMDP 中, 设有状态  $s, s'$  及强互模拟等价关系  $\mathcal{R}$ , 若  $s \mathcal{R} s'$ , 则对于从  $s$  出发的一条路径  $\pi = s \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_n$ , 必存在从  $s'$  出发的一条路径  $\pi' = s' \rightarrow s'_1 \rightarrow s'_2 \rightarrow \dots \rightarrow s'_n$  且有  $s_i \mathcal{R} s'_i$ . 称这样的两条路径为强互模拟等价路径.

命题 4 说明了从等价状态出发的路径具有相同性, 从状态  $s$  出发的一条路径存在一条从  $s'$  出发的路径与其相对应, 而且路径上的对应状态都强互模拟等价. 因此, 可将原模型中强互模拟等价的路径集合  $\Pi = s_0 \xrightarrow{t_0, \alpha_0} s_1 \xrightarrow{t_1, \alpha_1} \dots \xrightarrow{t_{n-1}, \alpha_{n-1}} s_n$  进行聚集, 变成商模型中的一条路径. 由 CTMDP 中的定义可知, 任何一条路径都可以表示为初始状态及一系列的组合变迁  $m = (\alpha_n, t_n, s_{n+1})$  串结组成, 而初始分布为一个概率测度, 而且每一个组合变迁可测, 因此路径集合也是可测的. 由于强互模拟等价商模型是原模型经过聚集后形成, 商模型中的每个聚集状态具有与原模型中等价类状态一样的转移. 在分析原模型时, 需要考虑每一个不确定性选择点的选择策略, 类似地, 在分析商模型时也要考虑不确定性选择策略问题. 由于商模型中的路径对应原模型中的强互模拟等价路径, 因此该路径上的不确定性选择策略与原互模拟等价路径的选择策略有关. 下面给出商模型策略的定义:

**定义 7** 商策略. 令  $\mathcal{C} = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$  为带标记的 CTMDP,  $D \in GM$ , 设长度为  $n$  的有限路径的历史权重(history weight)为

$$\begin{cases} hw_0(v, D, s_0) = v(s_0), \\ hw_{n+1}(v, D, \pi \xrightarrow{\alpha_n, t_n} s_{n+1}) = \\ hw_n(v, D, \pi) D(\pi, \{\alpha_n\}) \cdot P(\pi \downarrow, \alpha_n, s_{n+1}). \end{cases}$$

令  $\Pi = [s_0] \times \{\alpha_0\} \times \{t_0\} \times \dots \times \{\alpha_{n-1}\} \times \{t_{n-1}\} \times [s_n]$  为  $\mathcal{C}$  中强互模拟等价路径集,  $\tilde{\pi} = [s_0] \xrightarrow{\alpha_0, t_0} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}, t_{n-1}} [s_n]$  为对应商模型  $\mathcal{C}$  中的路径, 则商模型  $\mathcal{C}$  的商策略  $D$  定义如下:

$$\tilde{D}^v(\tilde{\pi}, \alpha_n) = \frac{\sum_{\pi \in \Pi} hw_n(v, D, \pi) \cdot D(\pi, \{\alpha_n\})}{\sum_{\pi \in \Pi} hw_n(v, D, \pi)}.$$

在高策略的定义中, 历史权重为从初始状态沿着路径到当前状态的选择概率, 而商策略为商模型路径对应原模型路径集合中所有选择该动作可能性的期望.

**定义 8** 令  $\mathcal{C} = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$  为带标记的 CTMDP, 对于  $i = 0, \dots, n, S_i \in (\tilde{S} \cup \{\emptyset\})$ , 称可测矩形  $\Pi = S_0 \times A_0 \times T_0 \times \dots \times A_{n-1} \times T_{n-1} \times S_n$  为简单强互模拟封闭区域, 其商模型  $\tilde{\mathcal{C}}$  上对应的可测矩形为  $\tilde{\Pi} = \{S_0\} \times A_0 \times T_0 \times \dots \times A_{n-1} \times T_{n-1} \times \{S_n\}$ .

**命题 5**<sup>[19]</sup> 令  $\mathcal{C} = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$  为带标记的 CTMDP,  $D \in GM$ , 原模型强互模拟等价路径构成的可测矩形的概率等于对应上模型上聚集路径可测矩形的概率:

$$\Pr_{v, D}^\omega(\Pi) = \Pr_{\tilde{v}, \tilde{D}^v}^\omega(\tilde{\Pi}).$$

设  $s_1 \equiv_L s_2$  表示状态  $s_1$  和状态  $s_2$  关于时态逻辑  $L$  等价,  $s_1 \equiv_L s_2$  当且仅当  $\forall \Phi \in L, s_1 \models \Phi \Leftrightarrow s_2 \models \Phi$ .

**定理 1**<sup>[20]</sup> 令  $\mathcal{C} = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$  为带标记的 CTMDP,  $s_1, s_2 \in S$ , 则有  $s_1 \sim s_2 \Rightarrow s_1 \equiv_{\text{asCSL}} s_2$ , 即

i)  $\forall \Phi (\mathcal{C}, s_1 \models \Phi \iff \mathcal{C}, s_2 \models \Phi)$ .

ii)  $\forall \varphi^t. \forall D. \exists D'. \Pr_{s_1, D}^\omega(\Pi) = \Pr_{s_2, D'}^\omega(\Pi)$

其中  $\Pi = \{\pi \in \text{Paths}^\omega \mid \mathcal{C}, \pi \models_p \varphi^t\}$ .

iii)  $\forall \varphi_r. \forall D. \exists D'. \Pr_{s_1, D}^\omega(\Pi) = \Pr_{s_2, D'}^\omega(\Pi)$

其中  $\Pi = \{\pi \in \text{Paths}^\omega \mid \mathcal{C}, \pi \models_p \varphi_r\}$ .

定理 1 说明在 CTMDP 上定义的强互模拟等价具有良好的逻辑保持性, 两个强互模拟等价的状态满足相同的逻辑公式. 直观上来说, 由于强互模拟等价的两个状态到其它等价类具有等价的路径, 而且转移率相等, 因此, 从这两个等价状态出发到达目标节点具有相同的时间可达概率值, 从而满足  $s_1 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\varphi^t) \Rightarrow s_2 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\varphi^t)$ . 这样对原模型的验证问题就可以转化为对商模型的验证问题, 从而降低问题的规模与解决问题的难度.

### 3.2 弱互模拟等价逻辑保持性(Logic preservation of weak bisimulation equivalence)

弱互模拟等价不考虑等价类内部的转移, 将其作为内部转移处理, 对外是不可见的. 因此, 其逻辑保持性比强互模拟等价关系要弱, 相比 CSL 的  $\mathcal{X}$  算子和  $\mathcal{U}$  算子, asCSL 中基于正则表达式的路径公式具有更强的表达能力, 即 CSL 的路径公式可表示为正则表达式的形式. 为简便起见, 本文分析弱互模拟等价关系下基于 CSL 时态逻辑的逻辑保持问题.

在 CSL 中的状态公式与 asCSL 一样, 路径公式

$\varphi ::= \mathcal{X}^I \Phi | \Phi_1 \mathcal{U}^I \Phi_2$ , 其语义如下:

$$\pi \models \mathcal{X}^I \Phi \Leftrightarrow \pi[1] = \Phi \wedge \delta(\pi, 0) \in I,$$

$$\pi \models \Phi_1 \mathcal{U}^I \Phi_2 \Leftrightarrow \exists t \in I,$$

$$\pi @ t \models \Phi_2 \wedge (\forall t' \in [0, t], \pi @ t' \models \Phi_1),$$

$\mathcal{X}^I \Phi$  表示在时间  $I$  内下一步到达  $\Phi$  状态,  $\Phi_1 \mathcal{U}^I \Phi_2$  表示在时间  $I$  内到达  $\Phi_2$  状态, 而到达  $\Phi_2$  之前处于  $\Phi_1$  状态. 与强互模拟等价类似, 关键是验证若  $s_1 \approx s_2$ , 是否有  $s_1 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\varphi) \Rightarrow s_2 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\varphi)$ . 对于  $\mathcal{X}^I \Phi$  来说, 需要验证从  $s_1$  或  $s_2$  出发, 下一步到达  $\Phi$  状态的概率是否相等, 而对于  $\Phi_1 \mathcal{U}^I \Phi_2$  来说, 则需验证从  $s_1$  或  $s_2$  出发, 到达满足状态公式  $\Phi_1 \mathcal{U}^I \Phi_2$  的目标状态的时间可达概率是否相等.

**定义 9** 令  $\mathcal{C} = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$  为带标记的 CTMDP,  $G \subseteq S, s \in S$  且  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , 则称  $p_{\max}^{C,G} s \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1] : (s, t) \mapsto \sup_{D \in GM} Pr_{v,s,D}^\omega(\diamond^{[0,t]} G)$  为从状态  $s$  出发、在时间  $t$  内到达目标状态集  $G$  的最大时间可达概率.

**定理 2**<sup>[21]</sup> 令  $\mathcal{C} = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$  为带标记的 CTMDP,  $G \subseteq S$  为目标状态集, 则  $p_{\max}^{C,G}$  为高阶算子  $\Omega : (S \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1]) \rightarrow (S \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1])$  的最小不动点, 其中  $s \in S, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  对于可测函数  $F : S \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1]$ , 当  $s \in G$  有  $\Omega(F)(s, t) = 1$ , 否则

$$\Omega(F)(s, t) = \int_0^t e^{-E(s)x} \cdot \max_{\alpha \in \text{Act}} \sum_{s' \in S'} R(s, \alpha, s') \cdot F(s', t-x) dx.$$

在 CTMDP 中, 对于状态公式  $\mathcal{P}_{\leq p}(\varphi^t)$ , 若状态  $s \models \mathcal{P}_{\leq p}(\varphi^t)$ , 当  $\leq \in \{\leq, <\}$ , 需要计算在所有策略下满足  $\varphi$  的所有路径集合概率的上界, 即有  $\text{Sat}(\mathcal{P}_{\leq p}(\varphi)) = \{s \in S \mid \sup_{D \in GM} Pr_{v,s,D}^\omega(\varphi) \leq p\}$ . 当路径公式  $\varphi = \Phi_1 \mathcal{U}^I \Phi_2$  时, 有  $\pi \models \Phi_1 \mathcal{U}^I \Phi_2 \Leftrightarrow \pi \models \diamond^I \text{Sat}(\Phi_2)$ , 因此, 状态的可满足问题就转变成了求解到达目标状态的时间可达概率问题. 即将判断  $s \models \mathcal{P}_{\leq p}(\varphi^t)$  转变成了求解  $p_{\max}^{C,\Phi_2}$  的问题. 有了以上的论述, 下面给出 CTMDP 中定义的弱互模拟等价关系与 CSL 逻辑等价性之间的关系及证明.

**定理 3** 令  $\mathcal{C} = (S, \text{Act}, AP, \mathbf{R}, L, v)$  为带标记的 CTMDP,  $s_1, s_2 \in S$  则

$$s_1 \approx s_2 \Rightarrow s_1 \equiv_{\text{CSL}_{\setminus \mathcal{X}}} s_2,$$

其中  $\text{CSL}_{\setminus \mathcal{X}}$  表示不包含  $\mathcal{X}$  算子的 CSL 公式.

**证** 根据题意, 需要证明如果  $s_1 \approx s_2$ , 则除了  $\Phi = \mathcal{P}_{\leq p}(\mathcal{X}^I \Phi)$  外, 对其他 CSL 公式  $\Phi$ , 都有  $s_1 \models \Phi$  和  $s_2 \models \Phi$  成立. 采用归纳法进行证明:

i) 当  $\Phi = a$  时, 根据弱互模拟等价关系的定义, 由于  $L(s_1) = L(s_2)$ , 因此, 对于任意的  $\Phi$ , 显然有  $s_1 \models \Phi$

$\wedge s_2 \models \Phi$ .

ii) 假设对于 CSL 状态公式  $\Phi$ , 结论成立, 即有  $s_1 \approx s_2 \Rightarrow s_1 \models \Phi \wedge s_2 \models \Phi$ , 则对于公式  $\neg \Phi$  和  $\Phi \wedge \Phi$ , 显然结论也成立. 因此唯一需要证明的是  $\Phi = \mathcal{P}_{\leq p}(\varphi)$ , 即当  $s_1 \approx s_2$  时是否有  $s_1 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\varphi) \wedge s_2 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\varphi)$ . 在 CSL 的路径公式中, 包括  $\mathcal{X}$  算子和  $\mathcal{U}$  算子. 下面分别讨论:

对于路径公式  $\varphi ::= \mathcal{X}^I \Phi$ , 若  $s_1 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\mathcal{X}^I \Phi)$ , 需要计算所有策略下一步转移到  $\Phi$  状态的路径集合概率上界, 即

$$\text{Sat}(\mathcal{P}_{\leq p}(\mathcal{X}^I \Phi)) = \{s \in S \mid \sup_{D \in GM} Pr_{v,s,D}^\omega(\mathcal{X}^I \Phi) \leq p\}.$$

令  $\sup_{D \in GM} Pr_{v,s,D}^\omega(\mathcal{X}^I \Phi) = p_{\max}^C(s, \mathcal{X}^I \Phi)$ , 根据 CSL 语义及 Markov 链相关知识, 有

$$\begin{aligned} p_{\max}^C(s, \mathcal{X}^I \Phi) &= \int_a^b E(s) \cdot e^{-E(s)t} \cdot \max_{\alpha \in \text{Act}} \sum_{s' \in \text{Sat}(\Phi)} P(s, \alpha, s') dt = \\ &= \int_a^b e^{-E(s)t} \cdot \max_{\alpha \in \text{Act}} \sum_{s' \in \text{Sat}(\Phi)} R(s, \alpha, s') dt = \\ &= \max_{\alpha \in \text{Act}} P(s, \alpha, \text{Sat}(\Phi)) \cdot (e^{-E(s)a} - e^{-E(s)b}), \end{aligned}$$

其中:  $a = \inf I, b = \sup I$ .

因此, 在 CTMDP 中, 对于两个弱互模拟等价的状态  $s_1, s_2$  其一步转移到  $\Phi$  状态的路径集合概率上界分别为

$$\begin{aligned} p_{\max}^C(s_1, \mathcal{X}^I \Phi) &= \max_{\alpha \in \text{Act}} P(s_1, \alpha, \text{Sat}(\Phi)) \cdot (e^{-E(s_1)a} - e^{-E(s_1)b}), \\ p_{\max}^C(s_2, \mathcal{X}^I \Phi) &= \max_{\alpha \in \text{Act}} P(s_2, \alpha, \text{Sat}(\Phi)) \cdot (e^{-E(s_2)a} - e^{-E(s_2)b}). \end{aligned}$$

由于弱互模拟等价关系中不考虑内部的转移, 因此并不能保证等式的右边相等, 所以有

$$s_1 \approx s_2 \not\Rightarrow s_1 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\mathcal{X}^I \Phi) \wedge s_2 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\mathcal{X}^I \Phi).$$

对于路径公式  $\varphi ::= \Phi_1 \mathcal{U}^I \Phi_2$ , 根据前面的论述, 若要证明

$$s_1 \approx s_2 \Rightarrow s_1 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\Phi_1 \mathcal{U}^I \Phi_2) \wedge s_2 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\Phi_1 \mathcal{U}^I \Phi_2).$$

只需证明  $p_{\max}^{C,G}(s_1, t) = p_{\max}^{C,G}(s_2, t)$ . 定义路径集合

$$\begin{aligned} \Pi(t, n) &= \{\pi = s_0 \xrightarrow{t_0, \alpha_0} s_1 \xrightarrow{t_1, \alpha_1} \dots \mid s_n \in G \wedge \\ &(\forall 0 \leq i \leq n-1, s_i \notin G) \wedge \sum_{i=0}^{n-1} \delta(\pi, i) < t\}, \end{aligned}$$

$\Pi(t, n)$  表示从  $s_0$  出发, 在时间  $t$  内经过  $n$  步转移到目标状态且前  $n-1$  步到达的状态不属于目标状态的路径集合. 当  $i \neq j$  时,  $\Pi(t, i), \Pi(t, j)$  为两两不相交的

集合, 且有

$$\{\pi | \pi = \Phi_1 \mathcal{U}^t \Phi_2\} = \bigcup_{i=0}^n \Pi(t, i).$$

令  $p_{\max}^n(s, t) = \sup_{D \in GM} Pr_{v_s, D}^\omega(\bigcup_{i=0}^n \Pi(t, i))$  表示从状态  $s$  出发在时间  $t$  内和  $n$  步转移内到达目标状态集  $G$  的可达概率上界, 因此只需证明

$$p_{\max}^n(s_1, t) = p_{\max}^n(s_2, t).$$

上式可以通过归纳法来证明.

归纳基: 当  $n=1$  时, 表示  $s$  经过一步转移到达  $\Phi_2$  状态.  $s$  的一步转移可到达  $[s]_{\mathcal{R}}$  状态, 也可到达等价类  $C \neq [s]_{\mathcal{R}}$ . 对于一步转移到达  $[s]_{\mathcal{R}}$  状态, 则有  $G = \Phi = a$ , 由于  $L(s_1) = L(s_2)$ , 因此有  $s_1 \in G, s_2 \in G$ , 根据定理 2 有  $p_{\max}^n(s_1, t) = p_{\max}^n(s_2, t) = 1$ , 所以

$$s_1 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\Phi_1 \mathcal{U}^t \Phi_2) \wedge s_2 \models \mathcal{P}_{\leq p}(\Phi_1 \mathcal{U}^t \Phi_2).$$

当到达  $C \neq [s]_{\mathcal{R}}$  时, 则  $s_1, s_2 \notin G$ , 因此可以把其视为  $n > 1$  的情况.

归纳假设: 设对任意的  $n > 1, t > 0$  而且  $s_1 \approx s_2$ , 有  $p_{\max}^n(s_1, t) = p_{\max}^n(s_2, t)$ , 下面证明  $n+1$  时, 有  $p_{\max}^{n+1}(s_1, t) = p_{\max}^{n+1}(s_2, t)$ . 根据定理 2 的不动点方程, 有

$$\begin{aligned} p_{\max}^{n+1}(s_1, t) &= \\ & \int_0^t e^{-E(s_1)x} \cdot \max_{\alpha \in \text{Act}} \sum_{s' \models \Phi_1} R(s_1, \alpha, s') \cdot \\ & p_{\max}^n(s', t-x) dx, \end{aligned}$$

因此, 对于  $n+1$ , 有

$$\begin{aligned} p_{\max}^{n+1}(s_1, t) &= \\ & \int_0^t e^{-E(s_1)x} \cdot \max_{\alpha \in \text{Act}} \sum_{s' \models \Phi_1} R(s_1, \alpha, s') \cdot \\ & p_{\max}^n(s', t-x) dx = \\ & \int_0^t e^{-E(s_1)x} \cdot \sum_{C \in [s_1]_{\approx}, C \models \Phi_1} \sum_{s' \in C} R(s_1, \alpha, s') \cdot \\ & p_{\max}^n(s', t-x) dx = \\ & \int_0^t e^{-E(s_2)x} \cdot \sum_{C \in [s_2]_{\approx}, C \models \Phi_1} \sum_{s' \in C} R(s_2, \alpha, s') \cdot \\ & p_{\max}^n(s', t-x) dx = \\ & \int_0^t e^{-E(s_2)x} \cdot \max_{\alpha \in \text{Act}} \sum_{s' \models \Phi_1} R(s_2, \alpha, s') \cdot \\ & p_{\max}^n(s', t-x) dx = \\ & p_{\max}^{n+1}(s_2, t). \end{aligned}$$

因此, 有  $p_{\max}^{n+1}(s_1, t) = p_{\max}^{n+1}(s_2, t)$ , 即对于弱互模拟等价的状态  $s_1$  和  $s_2$ , 从状态  $s_1$  和从状态  $s_2$  出发在时间  $t$  内和  $n$  步转移内到达目标状态集  $G$  的可达概率上界相等. 综合上面论述, 有  $s_1 \approx s_2 \Rightarrow s_1 \equiv_{\text{CSL} \setminus \lambda} s_2$ .

## 4 结论(Conclusions)

大量复杂系统具有不确定性、连续时间、概率选择等特征, CTMDP 可以用于在对此类系统进行建模, 在对 CTMDP 模型检测时, 与其他性能模型一样, 随着系统规模的扩大, CTMDP 系统的状态数量将呈指数增加而产生状态空间爆炸的问题. 互模拟等价可以用于系统状态的简约, 进而减小系统的规模, 提高模型检测的效率. 本文针对 CTMDP 下的互模拟等价关系进行了研究. 在 CTMDP 强互模拟关系的基础上, 给出弱互模拟等价关系的定义: 给出了 CTMDP 强弱互模拟等价之间的关系及与嵌入式 DTMDP 模型强(弱)互模拟等价之间的关系: 同时在强互模拟等价与 asCSL 逻辑等价性的关系基础上, 证明了弱互模拟等价与 CSL 逻辑等价性的联系. 进一步的工作是寻找一个合适而且有效的算法来快速地获得给定 CTMDP 模型上的等价类, 讨论 CTMDP 模型上的模拟前序关系, 分析互模拟等价与模拟前序关系之间内在的联系, 分析模拟前序的逻辑特征问题, 为 CTMDP 分支时间关系在模型检测中的实际应用提供技术支撑.

## 参考文献(References):

- [1] GAO Y, XU M, ZHAN N. Model checking conditional CSL for continuous-time Markov chains [J]. *Information Processing Letters*, 2013, 113(1): 44 – 50.
- [2] KATOEN J P. Perspectives in probabilistic verification [C] // *Proceedings of IFIP/IEEE International Symposium on Theoretical Aspects of Software Engineering*. Nanjing: IEEE, 2008, 6: 3 – 10.
- [3] CLARKE E M, ENDERS R, FILKORN T. Exploiting symmetry in temporal logic model checking [J]. *Formal Methods in System Design*, 1996, 9(1/2): 129 – 134.
- [4] CASTEL-TALEB H, MOKDAD L, PEKERGIN N. Model checking of performance measures using bounding aggregations [C] // *Proceedings of IEEE International Symposium on Performance Evaluation of Computer and Telecommunication Systems*. Edinburgh: IEEE, 2008, 6: 98 – 104.
- [5] BAIER C, GROBER M, CIESINSKI F. Partial order reduction for probabilistic systems [C] // *Proceeding of Quantitative Evaluation of Systems*. Washington: IEEE, 2004, 4: 230 – 239.
- [6] VAN GLABBEEK R J. The linear time-branching time spectrum i-the semantics of concrete, sequential processes [C] // *BERGSTRA, PONSE, SMOLKA A. Handbook of Process Algebra*. Dordrecht: Elsevier, 2001: 3 – 100.
- [7] VAN GLABBEEK R J. The linear time-branching time spectrum II [C] // *Proceedings of the 4th International Conference on Concurrency Theory*. Hildeshenm: Springer, 1993, 8: 66 – 81.
- [8] JOU C C, SMOLKA S A. Equivalences, congruences, and complete axiomatizations for probabilistic processes [M] // *Theories of Concurrency: Unification and Extension*. Heidelberg: Springer, 1990: 367 – 383.
- [9] JONSSON B, LARSEN K G. Specification and refinement of probabilistic processes [C] // *Proceedings of the 6th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. Amsterdam: IEEE, 1991, 7: 266 – 277.
- [10] LARSEN K G, SKOU A. Bisimulation through probabilistic testing (preliminary report) [C] // *Proceedings of the 16th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of programming languages*. Heidelberg: ACM, 1989: 344 – 352.

- [11] ANDOVA S, BAETEN J C M. Abstraction in probabilistic process algebra [M] // *Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems*. Heidelberg: Springer, 2001: 204 – 219.
- [12] MERNARDO M, GORRIERI R. Extended Markovian process algebra [M] // *Concurrency Theory*. Berlin Heidelberg: Springer, 1996. 315 – 330.
- [13] BAIER C, HERMANNNS H. Weak bisimulation for fully probabilistic processes [C] // *Proceedings of the 9th International Conference on Computer Aided Verification*. Haifa: Springer, 1997, 6: 119 – 130.
- [14] BAIER C, KATOEN J P, HERMANNNS H. Simulation for continuous-time Markov chains [M] // *Concurrency Theory*. Heidelberg: Springer, 2002: 338 – 354.
- [15] HILLSTON J. *A compositional Approach to Performance Modelling* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [16] BAIER C, KATOEN J P, HERMANNNS H. Comparative branching-time semantics for Markov chains [J]. *Information and Computation*, 2005, 200(2): 149 – 214.
- [17] QIN Guangping. *Interactive Markov chain: theory and application* [D]. Chengdou: Chengdu Institute of Computer Applications, Chinese Academy of Sciences, 2006.  
(覃广平. 交互式马尔可夫链: 理论与应用 [D]. 成都: 中国科学院成都计算机应用研究所, 2006.)
- [18] BROWNE M C, CLARKE E M, GRÜMBERG O. Characterizing finite Kripke structures in propositional temporal logic [J]. *Theoretical Computer Science*, 1988, 59(1): 115 – 131.
- [19] NEUHAUSSER M R. *Model checking nondeterministic and randomly timed systems* [D]. Enschede: University of Twente, 2010.
- [20] NIU Jun, ZENG Guosun, WANG Wei. Bisimulation equivalence and logical preservation for green evaluation model [J]. *Chinese Journal of Computer*, 2013, 36(5): 967 – 975.  
(钮俊, 曾国荪, 王伟. 绿色评价模型的互模拟等价及逻辑保持 [J]. 计算机学报, 2013, 36(5): 967 – 975.)
- [21] NEUHAUBER M R, ZHANG L. Time-bounded reachability probabilities in continuous-time Markov decision processes [C] // *Proceedings of the 7th International Conference on Quantitative Evaluation of Systems*. Williamsburg: IEEE, 2010, 9: 209 – 218.

#### 作者简介:

**黄镇谨** (1975–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为形式化方法、性能分析等, E-mail: schzj@163.com;

**陆阳** (1967–), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能控制、神经网络, E-mail: Luyang@126.com;

**杨娟** (1983–), 女, 在合肥工业大学作博士后研究工作, 主要研究方向为神经网络, E-mail: yangjuan6985@163.com;

**王智文** (1969–), 男, 教授, 主要研究方向为人工智能, E-mail: wsw69@126.com.