

位移反馈分数阶PID控制对单自由度线性振子的影响

牛江川¹, 申永军^{1†}, 杨绍普¹, 李素娟²

(1. 石家庄铁道大学 机械工程学院, 河北 石家庄 050043; 2. 石家庄铁道大学 信息科学与技术学院, 河北 石家庄 050043)

摘要: 研究了基于位移反馈分数阶PID控制的单自由度线性振子的自由振动, 通过平均法得到了系统的一阶近似解析解. 发现分数阶PID控制器的比例环节以等效线性刚度的形式影响系统的动力学特性, 积分环节以等效线性负阻尼和等效线性刚度的形式影响系统的动力学特性, 微分环节以等效线性阻尼和等效线性刚度的形式影响系统的动力学特性. 对近似解析解和数值解进行了比较, 二者吻合良好, 验证了近似解析解的正确性. 从近似解析解和分数阶系统的特征方程两个角度对系统的稳定性进行了分析. 最后利用系统的时间响应性能指标分析了位移反馈分数阶PID控制器的系数和分数阶阶次变化时, 对单自由度线性振子控制性能的影响.

关键词: 分数阶PID控制; 控制系统的稳定性; 位移反馈; 平均法

中图分类号: O322; TP273 文献标识码: A

Effect of fractional-order PID controller on the dynamical response of linear single degree-of-freedom oscillator with displacement feedback

NIU Jiang-chuan¹, SHEN Yong-jun^{1†}, YANG Shao-pu¹, LI Su-juan²

(1. School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang Hebei 050043, China;

2. School of Information Science and Technology, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang Hebei 050043, China)

Abstract: The free vibration of a linear single degree-of-freedom (SDOF) oscillator with fractional-order proportional-integral-derivative (PID) controller based on displacement feedback is investigated by the averaging method, and the approximate analytical solution is obtained. The effects of the parameters in fractional-order PID controller on the dynamical properties are characterized, where the proportional component is characterized in the form of equivalent linear stiffness, the integral component is characterized in the form of equivalent linear negative damping and equivalent linear stiffness, and the differential component is characterized in the form of equivalent linear damping and equivalent linear stiffness. Those equivalent parameters could distinctly illustrate the effects of the parameters in fractional-order PID controller on the dynamical response. A comparison of the approximate analytical solution with the numerical results is made, and their satisfactory agreement verifies the correctness of the approximate results. The system stability is analyzed based on the approximate analytical solution and the characteristic equation of the fractional-order system. Finally, the effects on system control performance of fractional-order PID controller for linear SDOF oscillator with displacement feedback are analyzed by the time response performance metrics parameters, when the coefficients and orders of fractional-order PID controller are changed.

Key words: fractional-order PID control; control system stability; displacement feedback; averaging method

1 引言(Introduction)

分数阶微积分理论在近年来取得了较大的研究进展, 因此促进了分数阶微积分在工程中的应用研究^[1-9]. Podlubny在研究分数阶控制系统的基础上提

出了分数阶PID控制器, 与传统整数阶PID相比, 分数阶PID控制在稳定性和抗干扰等方面具有很大优势^[10]. 目前对分数阶PID控制的研究, 主要集中在控制器的设计方法和稳定性分析等方面^[11-21].

收稿日期: 2015-11-17; 录用日期: 2016-06-15.

[†]通信作者. E-mail: shenyongjun@126.com; Tel.: +86 311-87936710.

本文责任编辑: 陈增强.

国家自然科学基金项目(11372198), 河北省高等学校创新团队领军人才计划项目(LJRC018), 河北省高等学校高层次人才科学研究项目(GCC2014 053)和河北省高层次人才项目(A201401001)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (11372198), Cultivation Plan for Innovation Team and Leading Talent in Colleges and Universities of Hebei Province (LJRC018), Higher Level Talents Scientific Research of Hebei Province (GCC2014053) and High Level Talent of Hebei Province (A201401001).

由于基于位移反馈进行控制的应用比较广泛^[22-23], 本文以一个位移反馈分数阶PID控制的单自由度线性振子为例, 研究分数阶PID控制对系统自由振动动力学性能的影响. 目前, 对分数阶系统的研究分析主要是在复频率域对分数阶微积分算子进行有理化近似, 而时域分析方法主要有滤波法^[24]和Z变换法^[25]等数值计算方法. 由于时域响应分析能对控制系统进行更直观的描述, 本文利用弱非线性系统动力学定量分析的平均法得到了系统的近似解析解. 该近似解析解形式简单, 能够实现对含有分数阶PID控制的二阶振荡系统的有效近似.

2 系统的近似解析解(Approximate analytical solution of system)

单自由度线性振子由质量块、弹簧以及阻尼器组成. 研究基于位移反馈分数阶PID控制的单自由度线性振子的自由振动, 其系统结构如图1所示.



图1 控制系统结构图

Fig. 1 Structure of control system

以自由振动的平衡位置为原点, 建立运动方程

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) + U(t) = F, \quad (1)$$

其中: $U(t)$ 为分数阶PID控制器的输出量, m 为系统的质量, k 为线性刚度系数, c 为线性阻尼系数, 且 $x(0) = a_0, \dot{x}(0) = 0$. 设系统受到的外力 $F = 0$. 分数阶PID中的微积分采用Caputo定义, 其形式为

$$\begin{cases} U(t) = K_p x(t) + K_i D_t^{-\lambda}[x(t)] + K_d D_t^\delta[x(t)], \\ D_t^\delta[x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^t \frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^\delta} d\tau, \\ D_t^{-\lambda}[x(t)] = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\lambda}} d\tau, \end{cases} \quad (2)$$

其中: K_p, K_i, K_d 分别为比例、积分、微分环节的可调常数, λ 和 δ 分别为积分和微分环节的分数阶阶次, 并满足 $0 \leq \lambda \leq 1$ 和 $0 \leq \delta \leq 1$, $\Gamma(z)$ 为Gamma函数, 并且满足 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

令 $\omega_0 = \sqrt{(k + K_p)/m}, 2\varepsilon\mu = cm, \varepsilon k_i = K_i/m, \varepsilon k_d = K_d/m, \varepsilon$ 为小参数, 则式(1)可化简为

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \\ \varepsilon \{-2\mu\dot{x}(t) - k_i D_t^{-\lambda}[x(t)] - k_d D_t^\delta[x(t)]\}. \end{aligned} \quad (3)$$

利用平均法^[26-27]求其一次近似解. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 式(1)的派生系统的自由振动解为

$$\begin{cases} x(t) = a \cos \varphi, \\ \dot{x}(t) = -\omega_0 a \sin \varphi, \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\varphi = \omega_0 t + \theta$, 常数 a 和 θ 取决于初始条件. 当 $\varepsilon \neq 0$ 但 ε 充分小时, 系统的运动与周期运动十分接近, 只是振幅 a 和初相角 θ 随时间缓慢变化. 所以可将式(3)的解形式上仍写作式(4), 但是振幅 a 和初相角 θ 视为时间的慢变函数^[27]. 则根据平均法可以得到

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \left\{ \sum_{j=1}^3 P_j(a, \theta) \right\} \sin \varphi, \\ a\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \left\{ \sum_{j=1}^3 P_j(a, \theta) \right\} \cos \varphi, \end{cases} \quad (5)$$

其中: $P_1(a, \theta) = 2\mu\omega_0 a \sin \varphi, P_2(a, \theta) = -k_i D_t^{-\lambda}[a \cos \varphi], P_3(a, \theta) = -k_d D_t^\delta[a \cos \varphi]$.

利用平均法将式(5)在一个周期中的平均值作为振幅 a 和初相角 θ 的近似值. 可以将式(5)改写为

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{\varepsilon}{T\omega_0} \int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^3 P_j(a, \theta) \right\} \sin \varphi dt, \\ a\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{T\omega_0} \int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^3 P_j(a, \theta) \right\} \cos \varphi dt, \end{cases} \quad (6)$$

其中: $P_1(a, \theta)$ 为周期函数, 其周期 T 可以取为 $2\pi/\omega_0$; $P_2(a, \theta)$ 和 $P_3(a, \theta)$ 则可以看作周期为无穷大的周期函数, 周期可以取为 $T = \infty$. 于是可以得到式(6)中的第1部分积分为

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 = -\frac{\varepsilon}{T\omega_0} \int_0^T P_1(a, \theta) \sin \varphi dt = \\ -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} P_1(a, \theta) \sin \varphi d\varphi = -\varepsilon\mu a, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$a\dot{\theta}_1 = -\frac{\varepsilon}{T\omega_0} \int_0^T P_1(a, \theta) \cos \varphi dt = 0. \quad (7b)$$

为计算式(6)中的其他部分, 引入两个基本公式:

$$\begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin(\omega t)}{t^p} dt = \omega^{p-1} \Gamma(1-p) \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right), \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\cos(\omega t)}{t^p} dt = \omega^{p-1} \Gamma(1-p) \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right). \end{cases} \quad (8)$$

这两个公式的求解过程可参见文献[28].

计算式(6)的第2部分, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{T\omega_0} \int_0^T P_2(a, \theta) \sin \varphi dt = \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon a k_i}{\Gamma(\lambda) T \omega_0} \int_0^T \left\{ \left[\int_0^t \frac{\cos(\omega_0 \tau + \theta)}{(t-\tau)^{1-\lambda}} d\tau \right] \times \right. \\ \left. \sin(\omega_0 t + \theta) \right\} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

引入 $u = t - \tau$ 和 $du = -d\tau$, 则由式(9)得到

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon a k_i}{\Gamma(\lambda) T \omega_0} \int_0^T \left\{ \left[\int_0^t \frac{\cos(\omega_0 t + \theta - \omega_0 u)}{u^{1-\lambda}} du \right] \times \right. \\ \left. \sin(\omega_0 t + \theta) \right\} dt = \\ A_1 + A_2, \end{aligned} \quad (10)$$

其中:

$$A_1 = \frac{\varepsilon a k_i}{\Gamma(\lambda)\omega_0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \left[\int_0^t \frac{\sin(\omega_0 u)}{u^{1-\lambda}} du \right] \sin(\omega_0 t + \theta) \sin(\omega_0 t + \theta) \right\} dt,$$

$$A_2 = \frac{\varepsilon a k_i}{\Gamma(\lambda)\omega_0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \left[\int_0^t \frac{\cos(\omega_0 u)}{u^{1-\lambda}} du \right] \cos(\omega_0 t + \theta) \sin(\omega_0 t + \theta) \right\} dt.$$

对 A_1 进行分部积分, 可以得到

$$A_1 = \frac{\varepsilon a k_i}{4\Gamma(\lambda)\omega_0^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2\omega_0 t + 2\theta - \sin(2\omega_0 t + 2\theta)}{T} \times \left[\int_0^t \frac{\sin(\omega_0 u)}{u^{1-\lambda}} du \right] \right\}_0^T - \frac{\varepsilon a k_i}{4\Gamma(\lambda)\omega_0^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \times \left\{ \int_0^T \left[\frac{2\omega_0 t + 2\theta - \sin(2\omega_0 t + 2\theta)}{t^{1-\lambda}} \sin(\omega_0 t) \right] dt \right\}. \quad (11)$$

根据式(8), 可以发现当 $T \rightarrow \infty$ 时式(11)的第2部分趋近于零, 因此得到

$$A_1 = \frac{1}{2} \varepsilon k_i a \omega_0^{-1-\lambda} \cos\left(\frac{1-\lambda}{2}\pi\right). \quad (12)$$

同理, 式(10)的第2部分 A_2 也趋近于零, 因此

$$\dot{a}_2 = \frac{1}{2} \varepsilon k_i a \omega_0^{-1-\lambda} \cos\left(\frac{1-\lambda}{2}\pi\right). \quad (13a)$$

利用同样的方法, 可以得到

$$a\dot{\theta}_2 = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{T\omega_0} \int_0^T P_2(a, \theta) \cos \varphi dt = \frac{1}{2} \varepsilon k_i a \omega_0^{-1-\lambda} \sin\left(\frac{1-\lambda}{2}\pi\right). \quad (13b)$$

对于式(6)的第3部分, 也可以得到

$$\dot{a}_3 = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{T\omega_0} \int_0^T P_3(a, \theta) \sin \varphi dt = - \frac{1}{2} \varepsilon k_d a \omega_0^{\delta-1} \sin\left(\frac{\delta}{2}\pi\right). \quad (14a)$$

$$a\dot{\theta}_3 = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{T\omega_0} \int_0^T P_3(a, \theta) \cos \varphi dt = \frac{1}{2} \varepsilon k_d a \omega_0^{\delta-1} \cos\left(\frac{\delta}{2}\pi\right). \quad (14b)$$

将式(7)(13)–(14)联合求解, 则有

$$\begin{cases} \dot{a} = -\varepsilon\mu a + \frac{1}{2}\varepsilon k_i a \omega_0^{-1-\lambda} \cos\left(\frac{1-\lambda}{2}\pi\right) - \frac{1}{2}\varepsilon k_d a \omega_0^{\delta-1} \sin\left(\frac{\delta}{2}\pi\right), \\ \dot{\theta} = \frac{1}{2}\varepsilon k_i \omega_0^{-1-\lambda} \sin\left(\frac{1-\lambda}{2}\pi\right) + \frac{1}{2}\varepsilon k_d \omega_0^{\delta-1} \cos\left(\frac{\delta}{2}\pi\right). \end{cases} \quad (15)$$

解出振幅和初相角, 则有

$$\begin{cases} a = a_0 \exp\left\{-\varepsilon\mu + \frac{1}{2}\varepsilon k_i \omega_0^{-1-\lambda} \sin\left(\frac{\lambda}{2}\pi\right) - \frac{1}{2}\varepsilon k_d \omega_0^{\delta-1} \sin\left(\frac{\delta}{2}\pi\right)\right\} t, \\ \theta = \left[\frac{1}{2}\varepsilon k_i \omega_0^{-1-\lambda} \cos\left(\frac{\lambda}{2}\pi\right) + \frac{1}{2}\varepsilon k_d \omega_0^{\delta-1} \cos\left(\frac{\delta}{2}\pi\right)\right] t. \end{cases} \quad (16)$$

将原系统参数代入式(16), 则得到

$$\begin{cases} a = a_0 \exp\left\{-\frac{1}{2m}[c + C(I) + C(D)]t\right\}, \\ \theta = \frac{1}{2m\omega_0}[K(I) + K(D)]t. \end{cases} \quad (17)$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{[k + K(P)]/m}$, 5个新的参数为

$$C(I) = -K_i \omega_0^{-1-\lambda} \sin(\lambda\pi/2), \quad (18a)$$

$$C(D) = K_d \omega_0^{\delta-1} \sin(\delta\pi/2), \quad (18b)$$

$$K(I) = K_i \omega_0^{-\lambda} \cos(\lambda\pi/2), \quad (18c)$$

$$K(D) = K_d \omega_0^{\delta} \cos(\delta\pi/2), \quad (18d)$$

$$K(P) = K_p. \quad (18e)$$

令 $C = c + C(I) + C(D)$, 则系统的近似解析解可以表示为

$$x(t) = a_0 \exp\left(-\frac{C}{2m}t\right) \cos\left[\omega_0 t + \frac{K(I) + K(D)}{2m\omega_0}t\right]. \quad (19)$$

在系统(1)中, 通过参数 $C(I)$ 减小了系统的阻尼系数, 可以将其定义为分数阶PID积分环节的等效线性负阻尼参数; 通过参数 $C(D)$ 增大了系统的阻尼系数, 可以将其定义为分数阶PID微分环节的等效线性阻尼参数; 将参数 C 定义为系统的等效线性阻尼参数; 通过参数 $K(P)$, $K(I)$ 和 $K(D)$ 增大了系统的线性刚度系数, 可以将它们分别定义为分数阶PID比例环节、积分环节、微分环节的等效线性刚度参数。

为了分析等效刚度参数对系统刚度的影响, 设 $f(\alpha) = \sqrt{[k + K(P) + \alpha]/m}$, α 为变量. 利用泰勒公式在 $f(0)$ 处展开, 并取一阶近似, 则可以得到

$$f[K(I) + K(D)] = \sqrt{\frac{k + K(P) + K(I) + K(D)}{m}} \approx \omega_0 + \frac{K(I) + K(D)}{2m\omega_0}. \quad (20)$$

令 $K = k + K(P) + K(I) + K(D)$, 并将参数 K 定义为系统的等效线性刚度. 根据式(19)–(20), 位移反馈分数阶PID对二阶系统的控制作用可以总结如下:

1) 比例环节通过 K_p 可以增大系统的线性刚度, 从而调节系统的固有频率.

2) 积分环节的控制作用通过 K_i 和 λ 进行调节, 当阶次 $\lambda = 0$ 时, 分数阶积分环节退化为线性刚度, 仅通

过 $K_i/(2m\omega_0)$ 增大系统的固有频率;当 λ 从0逐渐增大到1的过程,分数阶积分环节的作用逐渐过渡为线性负阻尼;当阶次 $\lambda = 1$ 时,分数阶积分环节仅通过 $-K_i\omega_0^{-2}$ 减小系统的线性阻尼.

3) 微分环节的控制作用通过 K_d 和 δ 进行调节,当阶次 $\delta = 0$ 时,分数阶微分环节退化为线性刚度,仅通过 $K_d/(2m\omega_0)$ 增大系统的固有频率,当 δ 从0逐渐增大到1的过程,分数阶微分环节的作用逐渐过渡为线性阻尼;当阶次 $\delta = 1$ 时,分数阶积分环节仅通过 K_d 调节系统的线性阻尼.

3 近似解析解和数值解的比较(Comparisons between the approximately analytical solution and numerical solution)

研究系统(1),选取一组基本参数: $a_0 = -1, m = 5, k = 10, c = 0.3, K_p = 0.2, K_i = 0.2, K_d = 0.2, \lambda = 0.6, \delta = 0.4$,根据式(19)可以绘制出系统振动位移的时间历程,如图2中的实线所示,图中横轴为时间,纵轴为位移.为了进行比较,利用文献[1]中介绍的数值计算方法求解系统(1),其计算公式为

$$D_{t_n}^p[y(t_n)] \approx h^{-p} \sum_{j=0}^n C_j^p y(t_{n-j}), \quad (21)$$

式中: $t_n = nh$ 为时间采样点, h 为时间步长, C_j^p 为分数阶二项式系数,并且具有如下递推关系:

$$C_0^p = 1, C_j^p = (1 - \frac{1+p}{j})C_{j-1}^p. \quad (22)$$

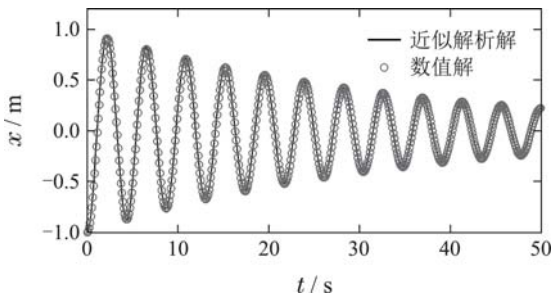


图2 位移时间历程

Fig. 2 Displacement time history

根据式(21)–(22),系统的数值迭代格式表示为

$$x(t_n) = hy(t_{n-1}) - \sum_{j=1}^n C_j^1 x(t_{n-j}), \quad (23a)$$

$$y(t_n) = \frac{h}{m}[-(k + K_p)x(t_n) - cy(t_{n-1}) - K_i z_1(t_{n-1}) - K_d z_2(t_{n-1})] - \sum_{j=1}^n C_j^1 y(t_{n-j}), \quad (23b)$$

$$z_1(t_n) = h^\lambda x(t_n) - \sum_{j=1}^n C_j^\lambda z_1(t_{n-j}), \quad (23c)$$

$$z_2(t_n) = h^{1-\delta} y(t_n) - \sum_{j=1}^n C_j^{1-\delta} z_2(t_{n-j}). \quad (23d)$$

根据式(23)也可以绘制出系统振动位移的时间历程,计算过程中时间步长取 $h = 0.001$.由于系统的解在无限接近初值时可以近似表示为

$$x(t) = a_0 \cos \omega_0 t,$$

因此分数阶项的初值可以设置为^[28]:

$$\begin{cases} D_t^{-\lambda}[x(0)] = a_0 \omega_0^{-\lambda} \cos(-\frac{\lambda}{2}\pi), \\ D_t^\delta[x(0)] = a_0 \omega_0^\delta \cos(\frac{\delta}{2}\pi). \end{cases} \quad (24)$$

数值计算结果以圆圈表示在图2中.由图2可知,近似解析解与数值解的计算结果具有很高的吻合精度.

4 系统稳定性分析(System stability analysis)

系统能在实际工程中应用的必要条件是系统要稳定.在线性系统自由振动时,如果是衰减振动就称系统是稳定的.下面首先从时域利用近似解析解对上述实例的稳定性进行分析,然后利用分数阶线性时不变系统的特征方程进行分析,从而对近似解析解判断的结果进行验证.

4.1 近似解析解方法(Method of approximately analytical solution)

从时域进行分析,根据式(19)可知,系统稳定的条件为

$$\frac{C}{2m} > 0. \quad (25)$$

代入系统原参数,并化简得到

$$\begin{aligned} c - K_i \left(\frac{k + K_p}{m}\right)^{-\frac{1-\lambda}{2}} \sin\left(\frac{\lambda}{2}\pi\right) + \\ K_d \left(\frac{k + K_p}{m}\right)^{\frac{\delta-1}{2}} \sin\left(\frac{\delta}{2}\pi\right) > 0. \end{aligned} \quad (26)$$

将上面选取的基本参数代入式(26)的左式,可以得到

$$\begin{aligned} 0.3 - 0.2 \left(\frac{10 + 0.2}{5}\right)^{0.8} \sin(0.3\pi) + \\ 0.2 \left(\frac{10 + 0.2}{5}\right)^{-0.3} \sin(0.2\pi) = 0.3034. \end{aligned} \quad (27)$$

即式(26)是成立的,说明此时系统是稳定的.这与图2中的结果也是一致的.

4.2 特征方程方法(Method of characteristic equation)

下面利用分数阶线性时不变系统的特征方程对稳定性进行分析.由于系统(1)的输入量 $F = 0$,根据式(1)经过Laplace变换后,则可以得到其特征方程为

$$\begin{aligned} ms^{2+\lambda} + cs^{1+\lambda} + K_d s^{\delta+\lambda} + \\ (k + K_p)s^\lambda + K_i = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

将选取的基本参数代入式(28),得到

$$5s^{2.6} + 0.3s^{1.6} + 0.2s^1 + 10.2s^{0.6} + 0.2 = 0. \quad (29)$$

为了将式(29)的阶次转换为整数, 令 $w = s^{\frac{1}{5}}$, 代入式(29)可以得到

$$5w^{13} + 0.3w^8 + 0.2w^5 + 10.2w^3 + 0.2 = 0. \quad (30)$$

求解方程(30)的特征根, 并计算特征根的幅角, 可以得到当 $w = 1.0227 \pm 0.3371i$ 时, 其幅角满足 $\pi/10 < |\arg(w)| < \pi/5$, 即系统是稳定的. 其他特征根的幅角都在 $|\arg(w)| > \pi/5$ 的区域中, 该区域没有物理意义^[1]. 可见, 该方法判断的系统稳定性与通过近似解析解判断的结论是一致的.

5 控制性能分析(Analysis of control performance)

下面分析分数阶PID控制器的系数以及阶次变化时对系统控制性能的影响. 系统在初值为 $x(0) = -1$ 和 $\dot{x}(0) = 0$ 的条件下进行自由振动, 参照二阶振荡系统的性能指标, 分析分数阶PID控制参数对系统的上升时间和峰值的影响.

5.1 上升时间(Rise time)

系统响应从原工作状态出发, 第1次达到输出稳态值所需的时间为上升时间, 记作 t_r . 则当 $t = t_r$ 时, 根据式(19)可得

$$a_0 \exp\left(-\frac{C}{2m}t_r\right) \cos\left[\omega_0 t_r + \frac{K(I) + K(D)}{2m\omega_0}t_r\right] = 0. \quad (31)$$

解式(31), 并利用式(20)进行化简, 则有

$$t_r = \frac{\pi}{2\left[\omega_0 + \frac{K(I) + K(D)}{2m\omega_0}\right]} \approx \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{K}{m}}}. \quad (32)$$

由式(18)可知, 增大分数阶PID的比例环节系数 K_p , 将增大 $K(P)$, 同时使 $K(I)$ 略有减小, 使 $K(D)$ 略有增大. 为了在后续分析中能更直观地体现分数阶阶次的作用, 选取参数 $K_i = 1$ 和 $K_d = 1$, 除了变化的参数以外, 其他参数都选用上述基本参数. 当比例环节系数 K_p 由0到10变化时, 绘制出系统的等效线性刚度曲线, 如图3所示. 由图3可知, 随着比例环节系数 K_p 的增大, 将使 K 增大. 同样由式(18)可知, 增大积分环节系数 K_i , 其阶次 λ 保持不变时, 将增大 $K(I)$; 增大微分环节系数 K_d , 其阶次 δ 保持不变时, 将增大 $K(D)$. 可见, 增大分数阶PID控制器的系数, 都将增大系统的等效线性刚度, 使上升时间减小, 加快系统的响应速度.

当积分环节阶次 λ 从0到1变化时, 绘制出系统的等效线性刚度曲线, 如图4所示. 由图4可见, 随着 λ 的增大, 将使 K 变小, 使上升时间变长.

当微分环节阶次 δ 从0到1变化时, 绘制出系统的等效线性刚度曲线, 如图5所示. 由图5可见, 随着 δ 的增大, 将使 K 先略有增大再逐渐变小; 上升时间也将先

略有减小, 再逐渐变长.

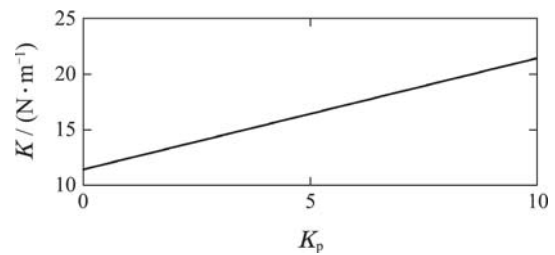


图3 K_p 变化时的等效刚度曲线

Fig. 3 Equivalent linear stiffness with K_p

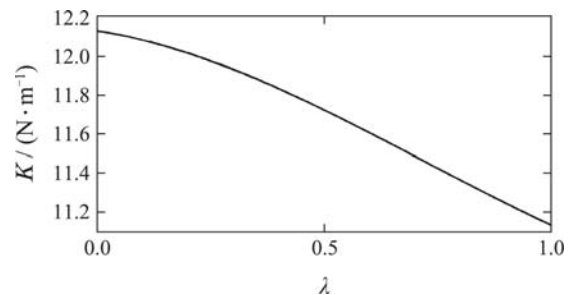


图4 λ 变化时的等效刚度曲线

Fig. 4 Equivalent linear stiffness with λ

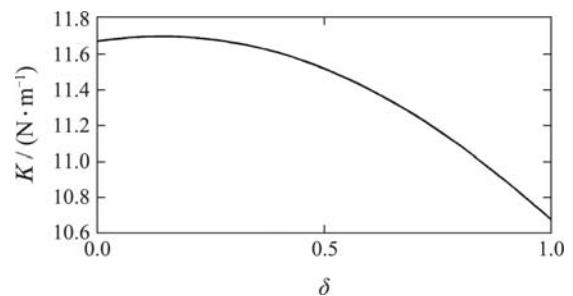


图5 δ 变化时的等效刚度曲线

Fig. 5 Equivalent linear stiffness with δ

5.2 峰值时间及峰值(Peak time and peak value)

系统响应达到第1个峰值所需的时间为峰值时间, 记作 t_p . 对式(19)进行求导, 并令其为零, 则可求得峰值时间, 并利用式(20)进行化简, 则有

$$t_p = \frac{\pi}{\left[\omega_0 + \frac{K(I) + K(D)}{2m\omega_0}\right]} \approx \frac{\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}. \quad (33)$$

当 $t = t_p$ 时, 根据式(19)计算出第1个峰值 M_p ,

$$M_p = -a_0 \exp\left(-\frac{C\pi}{2\sqrt{mK}}\right). \quad (34)$$

令 $\xi = C/(2\sqrt{mK})$, 参数 ξ 定义为系统的等效阻尼比.

当比例环节系数 K_p 从0到20变化时, 绘制出系统的等效阻尼比曲线, 如图6所示. 由图6可知, 随着比例环节系数 K_p 的增大, ξ 先略有增大后减小, 则第1个峰值将先略有减小然后逐渐增大. 由式(18)和等效阻尼比 ξ 的定义可知, 当积分环节系数 K_i 逐渐增大, 其阶次 λ 保持不变时, ξ 逐渐减小, 则第1个峰值将逐渐增

大, 当 $\xi \leq 0$ 时, 系统将不稳定; 当微分环节系数 K_d 逐渐增大, 其阶次 δ 保持不变时, ξ 逐渐增大, 则第1个峰值将逐渐减小。

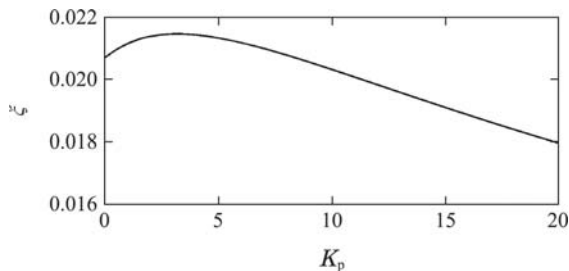


图 6 K_p 变化时的等效阻尼比曲线

Fig. 6 Equivalent damping ratio with K_p

当积分环节阶次 λ 和微分环节阶次 δ 分别变化时, 绘制出系统的等效阻尼比曲线, 如图7-8所示. 由图7可知, 随着积分环节阶次 λ 的增大, ξ 先逐渐减小后略有增大, 则第1个峰值将先逐渐增大后略有减小. 由图8可知, 随着微分环节阶次 δ 的增大, ξ 逐渐增大, 则第1个峰值将逐渐减小。

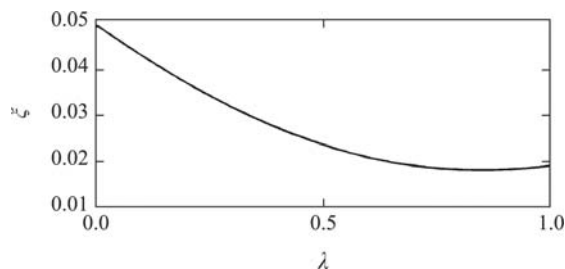


图 7 λ 变化时的等效阻尼比曲线

Fig. 7 Equivalent damping ratio with λ

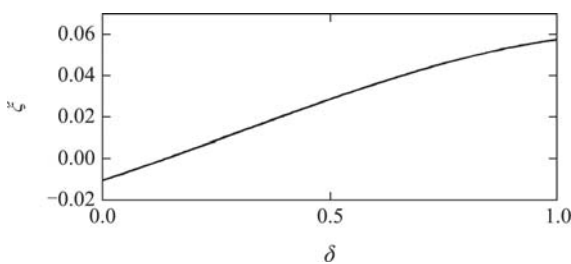


图 8 δ 变化时的等效阻尼比曲线

Fig. 8 Equivalent damping ratio with δ

6 结论(Conclusions)

本文研究了基于位移反馈分数阶PID控制的单自由度线性振子的自由振动, 利用平均法求得了系统的一阶近似解析解, 并利用数值解验证了求解方法和结果的正确性. 根据近似解析解得到了系统的稳定性条件以及时间响应的性能指标, 以简单的形式说明了系统时间响应特性与分数阶PID控制参数之间的对应关系. 由于利用平均法可以分别求解得到系统的线性项和分数阶微积分项以及非线性项的一阶近似解析解

形式, 因此本文得到的部分结果, 可以直接应用到其他基于位移反馈分数阶PID控制的线性或非线性的自由振动分析中。

参考文献(References):

- [1] PETRAS I. *Fractional-Order Nonlinear Systems* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2011.
- [2] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations* [M]. New York: Academic Press, 1999.
- [3] SHEN Y J, YANG S P, XING H J, et al. Primary resonance of Duffing oscillator with fractional-order derivative [J]. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(7): 3092 – 3100.
- [4] ROSSIKHIN Y A, SHITIKOVA M V. Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass systems [J]. *Acta Mechanica*, 1997, 120(1/2/3/4): 109 – 125.
- [5] YANG S P, SHEN Y J. Recent advances in dynamics and control of hysteretic nonlinear systems [J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2009, 40(4): 1808 – 1822.
- [6] CHEN J H, CHEN W C. Chaotic dynamics of the fractionally damped van der Pol equation [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 35(1): 188 – 198.
- [7] LI G G, ZHU Z Z, CHENG C J. Dynamical stability of viscoelastic column with fractional derivative constitutive relation [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, 22(3): 294 – 303.
- [8] WU Guangqiang, HUANG Huanjun, YE Guanghu. Semi-active control of automotive air suspension based on fractional calculus [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2014, 45(7): 19 – 24.
(吴光强, 黄焕军, 叶光湖. 基于分数阶微积分的汽车空气悬架半主动控制 [J]. 农业机械学报, 2014, 45(7): 19 – 24.)
- [9] SUN Huilai, JIN Chun, ZHANG Wenming, et al. Modeling and tests for a hydro-pneumatic suspension based on fractional calculus [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, 33(17): 167 – 172.
(孙会来, 金纯, 张文明, 等. 基于分数阶微积分的油气悬架建模与试验分析 [J]. 振动与冲击, 2014, 33(17): 167 – 172.)
- [10] PODLUBNY I. Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -controllers [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 208 – 214.
- [11] LIU Xiangbin, QU Xiaoli. Stability analysis of fractional order control systems [J]. *Journal of Henan University of Science & Technology*, 2007, 28(2): 33 – 36.
(柳向斌, 曲晓丽. 分数阶控制系统稳定性分析 [J]. 河南科技大学学报, 2007, 28(2): 33 – 36.)
- [12] YAN Hui, YU Shenglin, LI Yuanlu. A design method of the parameters of fractional-order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller-poles-orders searching method [J]. *Information and Control*, 2007, 36(4): 445 – 450.
(严慧, 于盛林, 李远禄. 分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器参数设计方法—极点阶数搜索法 [J]. 信息与控制, 2007, 36(4): 445 – 450.)
- [13] CHEN Y Q, PETRAS I, XUE D Y. Fractional order control—a tutorial [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. New Jersey: IEEE, 2009: 1397 – 1411.
- [14] XUE Dingyu, ZHAO Chunna. Fractional order PID controller design for fractional order system [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 771 – 775.
(薛定宇, 赵春娜. 分数阶系统的分数阶PID控制器设计 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 771 – 775.)
- [15] HUANG Lilian, ZHOU Xiaoliang, XIANG Jianhong. Self-adjusting design on parameters of the fractional order PID controller [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2013, 35(5): 1064 – 1068.
(黄丽莲, 周晓亮, 项建弘. 分数阶PID控制器参数的自适应设计 [J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(5): 1064 – 1068.)

- [16] SAIDI B, AMAIRI M, NAJAR S, et al. Bode shaping-based design methods of a fractional order PID controller for uncertain systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 80(4): 1817 – 1838.
- [17] CHEN L C, ZHU W Q. Stochastic jump and bifurcation of Duffing oscillator with fractional derivative damping under combined harmonic and white noise excitations [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, 46(10): 1324 – 1329.
- [18] CHEN L C, LI Z S, ZHUANG Q J, et al. First-passage failure of single-degree-of-freedom nonlinear oscillators with fractional derivative [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2013, 19(14): 2154 – 2163.
- [19] LI C P, DENG W H. Remarks on fractional derivatives [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 187(1): 777 – 784.
- [20] CAO Jianxiong, DING Hengfei, LI Changpin. Implicit difference schemes for fractional diffusion equations [J]. *Communicatin on Applied Mathematics and Computation*, 2013, 27(1): 61 – 74.
(曹建雄, 丁恒飞, 李常品. 分数阶扩散方程的隐差分格式 [J]. 应用数学与计算数学学报, 2013, 27(1): 61 – 74.)
- [21] WANG Fei, LEI Humin. PD^λ guidance law based on fractional calculus [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(1): 126 – 129.
(王飞, 雷虎民. 基于分数阶微积分 PD^λ 比例导引制导规律 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(1): 126 – 129.)
- [22] BENASSI L, ELLIOTT S J. Active vibration isolation using an inertial actuator with local displacement feedback control [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 278(4/5): 705 – 724.
- [23] ZHANG J F, OUYANG H J, YANG J. Partial eigenstructure assignment for undamped vibration systems using acceleration and displacement feedback [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(1): 1 – 12.
- [24] LUO Youxin. A new kind of fractional-order PID controller and its simulation research [J]. *Journal of Harbin institute of Technology*, 2009, 41(5): 215 – 217.
(罗佑新. 新型分数阶PID控制器及其仿真研究 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2009, 41(5): 215 – 217.)
- [25] WANG Zhenbin, CAO Guangyi, ZENG Qingshan. Fractional order PID controller and its digital implementation [J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2004, 38(4): 517 – 520.
(王振宾, 曹广益, 曾庆山. 分数阶PID控制器及其数字实现 [J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(4): 517 – 520.)
- [26] SANDERS J A, VERHULST F, MURDOCK J. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems* [M]. New York : Springer, 2007.
- [27] LIU Yanzhu, CHEN Liquan. *Nonlinear Vibrations* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001.
(刘延柱, 陈立群. 非线性振动 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.)
- [28] SHEN Y J, YANG S P, SUI C Y. Analysis on limit cycle of fractional-order van der Pol oscillator [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2014, 67(10): 94 – 102.

作者简介:

牛江川 (1977–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为机械系统动力学与振动控制, E-mail: menjc@163.com;

申永军 (1973–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为机械系统动力学与振动控制, E-mail: shenyongjun@126.com;

杨绍普 (1962–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为非线性动力学与控制, E-mail: yangsp@stdu.edu.cn;

李素娟 (1978–), 女, 硕士, 讲师, 目前研究方向为非线性动力学与控制, E-mail: melsj@126.com.