

## 最优长期合同下的企业投融资决策

甘 柳<sup>1,2†</sup>, 杨招军<sup>3</sup>

(1. 湖南大学 金融与统计学院, 湖南 长沙 410079; 2. 湖南商学院 财政金融学院, 湖南 长沙 410205;

3. 南方科技大学 金融系, 广东 深圳 418055)

**摘要:** 作为金融市场摩擦之一的代理问题可能导致非效率的企业投资融资决策, 本文在企业进行扩张投资和债务融资的基础上, 构建动态委托代理模型. 首先基于管理者不可观测的努力和储蓄行为进行最优合同设计, 利用鞅方法得到了管理者价值函数满足的随机微分方程, 并在此基础上给出合同激励相容下价值函数均衡演变的充分必要条件. 其次, 运用随机控制方法, 推导企业价值满足的微分方程, 同时给出了合同的解及最优投资触发水平满足的条件. 最后, 讨论在不同融资情形下, 合同预定努力程度随企业现金流变化的不同趋势, 给出相应解释, 并指出相关参数与最优投资触发水平及企业价值之间的变动关系.

**关键词:** 最优长期合同; 风险厌恶; 最优控制; 几何布朗运动; 投融资决策

中图分类号: O232

文献标识码: A

## Investment and financing decisions under optimal long-term contracting

GAN Liu<sup>1,2†</sup>, YANG Zhao-jun<sup>3</sup>

(1. School of Finance and Statistics, Hunan University, Changsha Hunan 410079, China;

2. Finance School, Hunan University of Commerce, Changsha Hunan 410205, China;

3. Department of Finance, South University of Science and Technology of China, Shenzhen Guangdong 418055, China)

**Abstract:** One important source of financial market frictions involves agency problems which can distort investment and financing decisions. In this paper we develop a dynamic principal-agent model which is based on expand investment and debt financing. Firstly, we consider an optimal contract design problem that assumes unobservable effort and savings of agent. Stochastic differential equation of the agent's continuation value function is provided by using martingale method. Then we obtain a necessary and sufficient condition for the equilibrium evolution of agent's value function when contract is incentive compatible. Furthermore, this paper gets the differential equation for the enterprise value where the solution of contracting and optimal level of investment trigger can be obtained at the same time. Finally, we show and explain the different results of optimal effort policy with the corporate cash flow changes under different financing situation. The relationships between the investment trigger level (enterprise value) and the related coefficients are also discussed.

**Key words:** optimal long-term contracting; risk aversion; optimal control; geometric Brownian motion; investment and financing decisions

### 1 引言(Introduction)

自Modigliani等在公司金融领域开创性的研究以来<sup>[1-2]</sup>, 不少文献对扭曲企业投资和融资决策的市场因素及促成这种扭曲的背后机制进行了研究<sup>[3-6]</sup>. 研究表明各类型市场摩擦都可能导致非效率的投融资决策, 其中企业的代理问题尤显突出. 由于所有权与经营权分离, 管理者的偷懒行为或风险转移(冒险)行为导致了道德风险问题, 并会对企业的投融资决策产生重大影响. 为此企业股东普遍采用薪酬合同方式来

激励管理者.

文献[7]首次构建了连续时间下的道德风险模型, 不少学者基于这一研究从不同方面进行了拓展, 主要可总结为如下方面: 第一, 假定管理者的行为可以影响企业收益流的平均增长率<sup>[8-18]</sup>, 其中, 文献[8]和文献[11]在连续时间框架下引入鞅方法, 使得动态道德风险模型的研究得到极大发展, 而文献[14]开创性的建立了企业现金流(规模)服从几何布朗运动的动态代理模型, 并将其植入Leland的企业资本结构<sup>[19]</sup>框架,

收稿日期: 2015-12-07; 录用日期: 2016-09-05.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: ganliu2016@163.com; Tel.: +86 731-88688343.

责任编辑: 汤善健.

国家自然科学基金项目(71371068, 71521061, 71221001), 湖南省高校科技创新团队支持计划项目资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (71371068, 71521061, 71221001) and Aid Program for Science and Technology Innovative Research Team in Higher Educational Institutions of Hunan Province.

讨论了管理者努力程度不可观测下企业规模与资本结构之间的相互关系. 第二, 假定管理者行为会同时影响企业收益流的平均增长率和波动率(风险)<sup>[20-21]</sup>, 其中, 文献[21]具有代表性, 其模型刻画了管理者的努力行为和冒险行为, 并进行了最优合同的设计与求解. 第三, 用跳过程来刻画企业的风险, 并假定管理者行为会影响到企业收益流的平均增长率和跳跃强度<sup>[22]</sup>, 文献[22]采用泊松过程的跳跃强度来刻画管理者的风险转移行为, 给出了最优合同下企业规模的动态表达, 并得到了企业规模在0到充分大之间变化时的充分条件.

与上述文献模型的框架类似, 本文建立扩张期权下的道德风险模型, 同时研究最优长期合同下企业的投资和融资问题. 值得一提的是, 文献[23]在实物期权框架下研究了管理者和股东投资决策不一致的委托代理问题, 然而该文并没有涉及管理者的主观效用, 努力成本和道德风险, 更没有进行内生化的最优合同设计与求解.

本文考虑正常运营的企业, 企业股东(委托人)拥有追加投资来扩大企业规模的机会(扩张期权): 该投资可延迟, 不可逆且收益不确定. 股东通过内部股权融资或外部债务筹集投资所需成本. 另外, 企业需要聘请专业的管理者(代理人)经营企业, 管理者的努力程度直接影响企业收益流的平均增长率, 理性的管理者是否努力工作取决于薪酬收益和努力带来的负效用. 对于股东而言, 管理者的努力程度和其用来平滑消费的储蓄都是动态且不可观测的. 为促使管理者努力工作, 理性的股东与管理者签订雇佣合同(最优合同), 合同在考虑管理者自利行为的基础上, 预定管理者努力程度及薪酬等要素, 这实质上构成了股东与管理者之间的纳什均衡.

## 2 模型假设(Model assumptions)

给定带信息流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ , 本文所有随机过程及随机变量定义于此空间, 且关于信息流 $\mathcal{F}_t$ 适应. 假设企业单位时间收益流 $X_t$ 服从如下几何布朗运动:

$$dX_t = (a_t + \mu)X_t dt + \sigma X_t dZ_t, \quad (1)$$

其中:  $Z_t$ 为测度 $P$ 下的标准布朗运动,  $a_t \in [0, \bar{a}]$ 表示不可观测的管理者努力程度(管理者努力程度直接影响到企业收益流的增长率),  $\bar{a}$ 为管理者努力的上界,  $\mu$ 为常数,  $\sigma$ 为企业收益流的波动率. 式(1)一方面描述了企业收益流的不确定性, 另一方面描述了管理的道德风险问题.

企业扩张投资后, 其收益流变成扩张投资前的 $1+k(k>0)$ 倍. 管理者, 股东和债权人的折现因子皆为无风险利率 $r$ , 并且管理者可以通过储蓄平滑消费, 管理者除了薪酬收入无其他资金来源, 因此其薪酬减

去消费后的剩余资金都用来储蓄, 管理者的储蓄过程记为 $\{S_t; t \geq 0\}$ , 储蓄利率为 $r$ , 初始储蓄 $S_0 = 0$ . 管理者的主观偏好采用指数效用函数(CARA)来描述, 将管理者的消费记为 $\tilde{c}_t$ , 则CARA为 $-e^{-\gamma \tilde{c}_t}/\gamma$ . 管理者的目标是通过消费和合适的努力水平来最大化自身的效用, 对于股东而言, 管理者的储蓄过程和努力程度都是不可观测的.

## 3 最优长期合同设计(Design of optimal long-term contracting)

本节考虑扩张期权下的动态代理模型, 给出最优合同设计. 首先描述股东与管理者之间的合同问题, 然后求解管理者价值满足的微分方程, 最后给出激励相容下最优合同.

### 3.1 合同问题描述(Description of contracting)

本文长期合同是指管理者不会因为企业经营不善而被股东解雇. 雇佣合同包含如下要素: 预定的薪酬, 预定的努力程度及企业投资时机, 并采用符号 $\Pi = (\{c_t, a_t\}_{t \geq 0}, T_i^u)$ 来表示这3个要素. 另外, 采用符号 $\tilde{c}_t$ 表示管理者真实消费, 符号 $\tilde{a}_t$ 表示管理者真实努力程度.

一方面, 在给定合同 $\Pi = (\{c_t, a_t\}_{t \geq 0}, T_i^u)$ 下, 理性自利的管理者会选择合适的消费和努力程度来最大化其效用贴现求和的期望值:

$$V_0(\Pi) = \max_{\{\tilde{c}_t, \tilde{a}_t\}} E \left[ \int_0^\infty -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma(\tilde{c}_t - K_t X_t g(\tilde{a}_t)) - rt} dt \right], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } dS_t &= rS_t dt + (c_t - \tilde{c}_t)dt, \quad S_0 = 0, \\ dX_t &= (\tilde{a}_t + \mu)X_t dt + \sigma X_t dZ_t, \\ K_t &= 1 + k1_{t \geq T_i^u}, \end{aligned}$$

其中:  $1_{t \geq T_i^u}$ 为示性函数,  $K_t X_t g(\tilde{a}_t)$ 为管理者的努力成本, 并进一步假定 $g(\tilde{a}_t) = 0.5\theta \tilde{a}_t^2$ ,  $\theta$ 为管理者的努力成本系数.

另一方面, 假设在企业初创时刻管理者拥有外部工作机会的价值为 $v_0$ , 故为吸引管理者, 股东给出的薪酬价值不能低于 $v_0$ . 在此约束条件下, 股东通过拟定合同 $\Pi$ 以及决定投资时机来最大化自身剩余收益流的无风险利率贴现求和的期望值:

$$\begin{aligned} \max_{\Pi, T_i^u} E^\Pi \left\{ \int_0^{T_i^u} e^{-rt} (X_t - c_t) dt + \right. \\ \left. e^{-rT_i^u} \left[ \int_{T_i^u}^\infty e^{-r(t-T_i^u)} ((1+k)X_t - c_t) dt - I \right] \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{s.t. } V_0(\Pi) \geq v_0,$$

其中:  $E^\Pi \{\cdot\}$ 表示由管理者行为引致概率测度下的期望算子. 式(3)的含义是明显的, 在企业投资前股东得到的收益流等于营业收入减去发放给管理者的薪酬

为  $X_t - c_t$ , 在企业投资后股东得到的收益流为  $(1 + k)X_t - c_t$ , 另外在投资时刻股东需要支付投资成本  $I$ . 下文将不等式约束变成等式约束, 即股东给出的薪酬价值刚好等于管理者的外部机会.

为了求解最优合同, 需进一步明确式(3)的约束条件, 在下节将给出约束条件(管理者价值函数)满足的微分方程.

### 3.2 管理者价值函数(The agent's continuation value)

为了对管理者价值函数做进一步讨论, 先给出如下引理:

**引理 1** 对于任意合同  $\hat{II}$ , 必定存在一个无储蓄且激励相容的合同  $II$ , 使得对股东而言, 合同  $II$  产生的价值不低于合同  $\hat{II}$  产生的价值.

证 参见文献[13].

引理1使得本文专注于无储蓄且激励相容的合同, 在给定合同  $II = (\{c_t, a_t\}_{t \geq 0}, T_i^u)$  且无储蓄的情况下, 管理者的消费就等于其获得的薪酬, 故本文的最优合同(激励相容且无储蓄)是指管理者问题(式(2))的解恰好是股东预定的  $(c_t, a_t)$ . 于是管理者连续价值函数可以写为:

$$V_t(II, X_t) = E_t \left[ \int_t^\infty - \frac{e^{-\gamma(c_u - K_u X_u g(a_u)) - r(u-t)}}{\gamma} du \right]. \quad (4)$$

利用文献[10]的方法, 由鞅表示定理, 存在一个随机过程  $\{\beta_t, t \geq 0\}$  使得  $V_t(II, X_t)$  的微分有如下形式:

$$dV_t = rV_t dt - U(c_t, a_t) dt + \beta_t(-\gamma r V_t)[dX_t - (a_t + \mu)K_t X_t dt], \quad (5)$$

其中:  $U(c_t, a_t) = -e^{-\gamma(c_t - K_t X_t g(a_t))} / \gamma$  为管理者的效用函数,  $\gamma$  为管理者的风险厌恶系数.

为了求解  $\beta_t$ , 需要另外一个引理.

**引理 2** 给定合同  $II$  下, 将储蓄为  $S$  的管理者连续价值函数记为  $V_t(II, X_t; S)$ , 有:  $V_t(II, X_t; S) = e^{-\gamma r S} V_t(II, X_t; 0)$ . 其中  $V_t(II, X_t; 0)$  为无储蓄管理者的连续价值函数, 即式(4).

证 利用指数效用函数的性质可直接得到.

接下来给出激励相容条件下, 管理者价值函数均衡演变的充分必要条件. 根据经济学原理, 在给定合同  $II$  下, 管理者的消费-储蓄策略应当满足消费的边际效用与财富价值的边际效用相等这个条件:

$$\frac{\partial U(c_t, a_t)}{\partial c} = \frac{\partial V_t(II, X_t; S)}{\partial S} \Big|_{S=0}. \quad (6)$$

由式(6)和引理2可以导出  $U(c_t, a_t) = rV_t$ , 于是有

$$c_t = K_t X_t g(a_t) - \frac{\ln(-\gamma r V_t)}{\gamma}. \quad (7)$$

将  $U(c_t, a_t) = rV_t$  代入到式(5)可以得到:

$$dV_t = \beta_t(-\gamma r V_t)[dX_t - (a_t + \mu)K_t X_t dt]. \quad (8)$$

式(4)和式(8)表明, 管理者选择的努力程度  $\tilde{a}_t$  影响其效用  $U(c_t, \tilde{a}_t)$  和价值函数改变量的期望值  $E_t[dV_t(\tilde{a}_t)]$ , 从式(8)可以看出管理者通过  $\beta_t(-\gamma r V_t) a_t dt$  来影响  $E_t[dV_t(\tilde{a}_t)]$ , 故管理者问题可表述为如下优化问题:

$$\max_{\tilde{a}_t} [U(c_t, \tilde{a}_t) + \beta_t(-\gamma r V_t) \tilde{a}_t dt]. \quad (9)$$

为使得  $\tilde{a}_t = a_t$ , 对式(9)利用一阶导条件(充分必要条件), 不难求得  $\beta_t = g'(a_t)K_t$ . 于是, 激励相容的合同必定使得  $dV_t$  具有如下形式:

$$dV_t = -\gamma r g'(a_t) K_t \sigma X_t dZ_t. \quad (10)$$

至此, 给出了管理者薪酬价值的演变方程.

### 3.3 股东价值函数及合同的解(Shareholders' value and model solution)

在纯股权融资的情况下, 将式(3)对应股东连续价值函数写成分段形式. 首先, 在企业投资后  $(t > T_i^u)$ , 股东连续价值函数为

$$\begin{aligned} J^2(X, V) = & \max_{II} E^II \left\{ \int_t^\infty e^{-r(u-t)} [(1+k)X_u - c_u] du \mid X_t = X \right\}, \\ & \text{s.t. } V_t(II) = V. \end{aligned} \quad (11)$$

其次, 在企业投资前  $(t < T_i^u)$ , 股东的连续价值函数为

$$\begin{aligned} J^1(X, V) = & \max_{II, T_i^u} E^II \left\{ \int_t^{T_i^u} e^{-r(u-t)} [X_u - c_u] du + \right. \\ & \left. e^{-r(T_i^u-t)} \left[ \int_{T_i^u}^\infty e^{-r(u-T_i^u)} ((1+k)X_u - c_u) du - I \right] \mid X_t = X \right\}, \\ & \text{s.t. } V_t(II) = V. \end{aligned} \quad (12)$$

利用动态规划原理, 可得  $J^2(X, V)$  满足如下 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程(证明见附录):

$$\begin{aligned} rJ^2(X, V) = & \max_{a \in [0, \bar{a}]} \{ (1+k)X - c + J_X^2(a + \mu)X + \\ & 0.5J_{XX}^2 \sigma^2 X^2 - J_{XV}^2 \gamma r g'(a)(1+k)V \sigma^2 X^2 + \\ & 0.5J^2[\gamma r g'(a)(1+k)V \sigma X]^2 \}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中:  $J_X^2$ ,  $J_{XX}^2$ ,  $J_{XV}^2$  和  $J_{VV}^2$  分别表示  $J^2(X, V)$  关于变量  $X, V$  的一阶和二阶偏导数(下同),  $c$  由式(7)给出(注意到  $c$  也是分段的).

同理,  $J^1(X, V)$  满足如下 HJB 方程(证明见附录):

$$rJ^1(X, V) = \max_{a \in [0, \bar{a}]} \{X - c + J_X^1(a + \mu)X + 0.5J_{XX}^1\sigma^2 X^2 - J_{XV}^1\gamma r g'(a)V\sigma^2 X^2 + 0.5J_{VV}^1[\gamma r g'(a)V\sigma X]^2\}. \quad (14)$$

方程(13)和(14)在形式上是相似的, 可以统一表达如下:

$$rJ(X, V) = \max_{a \in [0, \bar{a}]} \{K_t X - c + J_X^2(a + \mu)X + 0.5J_{XX}^2\sigma^2 X^2 - J_{XV}^2\gamma r g'(a)K_t V\sigma^2 X^2 + 0.5J_{VV}^2[\gamma r g'(a)K_t V\sigma X]^2\}. \quad (15)$$

依据文献[14]的方法,  $J(X, V)$ 具有如下分离形式:  $J(X, V) = F(X) - (-\ln(-\gamma r V I(\gamma r)))$ , 其中  $F(X)$ 为只与状态变量 $X$ 有关的未知函数, 利用此分离形式可以将方程(15)做降维处理.

$J(X, V)$ 分离形式的含义: 从管理者效用角度考虑的薪酬价值包含了管理者的主观评价, 故利用指数效用函数性质及效用无差别价值原理, 可知 $-\ln(-\gamma r V I(\gamma r))$ (此项大于0)为股东角度(风险中性)的管理者薪酬价值 $V$ 的等价值, 从而 $F(X) = J(X, V) + (-\ln(-\gamma r V I(\gamma r)))$ 为股东价值与管理者薪酬价值之和(下文称为企业价值), 这也是符合直觉的: 企业价值因包含了管理者的薪酬价值, 故只与企业收益流这个状态变量有关.

$F(X)$ 也是分段的, 为此需要分开表述. 在企业投资后, 将 $F(X)$ 记为 $E^u(X)$ , 表示投资后企业价值, 在企业投资前, 将 $F(X)$ 记为 $F^u(X)$ , 表示投资前企业价值, 上标 $u$ 表示企业纯股权融资情形, 并用 $E^{u'}(X)$ ,  $F^{u'}(X)$ 和 $E^{u''}(X)$ ,  $F^{u''}(X)$ 表示 $E^u(X)$ ,  $F^u(X)$ 的一阶和二阶导数(下同). 另外, 为了避免混淆, 用 $a_1^u(X)$ 和 $a_2^u(X)$ 表示企业投资前后的预定努力程度. 于是, 可得如下定理:

**定理1** 纯股权融资情形. 投资后的企业价值 $E^u(X)$ 满足如下常微分方程:

$$rE^u(X) = \max_{a \in [0, \bar{a}]} \{(1+k)X + (a+\mu)XE^{u'}(X) + 0.5\sigma^2 X^2 E^{u''}(X) - 0.5(1+k)X\theta a^2 - 0.5\gamma r(1+k)^2 X^2 \theta^2 a^2 \sigma^2\}, \quad (16)$$

及边界条件:

$$E^u(0) = 0, \lim_{X \rightarrow \infty} E^u(X) \simeq E^u(\tilde{X}) \equiv \frac{1+k}{r-\mu} \tilde{X} + \frac{1+k}{2r\gamma(r-\mu)^2 \theta^2 \sigma^2}, \quad (17)$$

其中 $\tilde{X}$ 表示充分大的收益流. 投资后合同最优预定的

努力程度为

$$a_2^{u*}(X) = \min\left(\frac{E^{u'}(X)}{(1+k)\theta(1+\gamma r(1+k)\theta\sigma^2 X)}, \bar{a}\right), \quad (18)$$

投资前的企业价值 $F^u(X)$ 满足如下常微分方程:

$$rF^u(X) = \max_{a \in [0, \bar{a}]} \{X + (a+\mu)XF^{u'}(X) + 0.5\sigma^2 X^2 F^{u''}(X) - 0.5X\theta a^2 - 0.5\gamma r X^2 \theta^2 a^2 \sigma^2\}, \quad (19)$$

及边界条件:

$$F^u(0) = 0, F^u(X_i^u) = E^u(X_i^u) - I, \quad (20)$$

$$F^{u'}(X_i^u) = E^{u'}(X_i^u), \quad (21)$$

其中,  $X_i^u$ 为最优投资触发水平, 由光滑粘贴条件式(21)给出. 投资前合同最优预定的努力程度为

$$a_1^{u*}(X) = \min\left(\frac{F^{u'}(X)}{\theta(1+\gamma r\theta\sigma^2 X)}, \bar{a}\right). \quad (22)$$

**证** 见附录.

定理1的含义: 首先, 式(16)和式(19)的等式右边最后一项直接体现了管理者风险态度影响企业价值的机制, 管理者的风险厌恶系数 $\gamma$ 越大, 企业价值会越低. 其次, 股东通过最大化自身利益(等价于最大化企业价值)预定管理者的努力程度, 于是得到式(18)和式(22), 这是股东在合同上拟定期望管理者做出的努力, 即合同的解.

#### 4 债务融资下的合同问题(The problem of contracting under debt financing)

一般由于投入成本 $I$ 较大, 股东在投资时会采取债务融资. 债务融资的好处是可以产生避税效应, 而缺点是会带来破产损失. 在股权与债权混合融资模式下, 由股东、债权人和管理者三方分得企业将来的收益. 此外, 为了保证式(2)在本节仍然成立, 假定企业在拟定合同时规定, 若企业破产则一次性支付给管理者一笔薪酬(如养老金), 以保证合同的长期性.

在企业扩张投资前, 股东得到的收益流为企业收益流减去发给管理者的薪酬:  $X_t - c_t$ , 在扩张投资后股东得到的收益流在上述基础上还需要减去支付给债权人的本息:  $(1+k)X_t - c_t - (1-\tau)b$ , 其中 $\tau$ 表示税率, 而债权人得到连续支付的本息 $b$ . 在此情况下, 股东的价值函数, HJB方程以及企业价值的推导与第3.3节的推导方式类似, 但需要注意到, 企业扩张投资后由于采取债务融资, 股东会有一个内生的最优破产水平, 这会导致方程边界条件不同.

采用上标 $l$ 表示企业股权与债务混合融资情形, 便有如下定理:

**定理2** 股权和债权混合融资情形. 投资后的企

业价值 $E^l(X)$ 满足如下常微分方程:

$$rE^l(X) = \max_{a \in [0, \bar{a}], X_b} \{ (1+k)X - (1-\tau)b + (a+\mu)XE^{l'}(X) - 0.5\gamma r(1+k)^2 X^2 \theta^2 a^2 \sigma^2 + 0.5\sigma^2 X^2 E^{l''}(X) - 0.5(1+k)X\theta a^2 \}, \quad (23)$$

及边界条件:

$$E^l(X_b) = 0, \quad E^{l'}(X_b) = 0, \\ \lim_{X \rightarrow \infty} E^l(X) \simeq E^l(\tilde{X}) \equiv \frac{1+k}{r-\mu} \tilde{X} + \frac{1+k}{2r\gamma(r-\mu)^2 \theta^2 \sigma^2} - \frac{b(1-\tau)}{r}, \quad (24)$$

其中:  $X_b$  由  $E^{l'}(X_b) = 0$  给出, 为企业的最优破产触发水平,  $\tilde{X}$  表示充分大的企业收益流. 投资后合同最优预定的努力程度为

$$a_2^{l*}(X) = \min\left(\frac{E^{l'}(X)}{(1+k)\theta(1+\gamma r(1+k)\theta\sigma^2 X)}, \bar{a}\right), \quad (25)$$

投资前的企业价值 $F^u(X)$ 满足如下常微分方程:

$$rF^l(X) = \max_{a \in [0, \bar{a}]} \{ X + (a+\mu)XF^{l'}(X) + 0.5\sigma^2 X^2 F^{l''}(X) - 0.5X\theta a^2 - 0.5\gamma r X^2 \theta^2 a^2 \sigma^2 \} \quad (26)$$

及边界条件:

$$F^l(0) = 0, \quad F^l(X_i^l) = E^l(X_i^l) + D(X_i^l) - I, \quad (27)$$

$$F^{l'}(X_i^l) = E^{l'}(X_i^l) + D'(X_i^l), \quad (28)$$

其中:  $X_i^l$  为最优投资触发水平,  $D(X_i^l)$  表示投资时刻的债务价值,  $D(X)$  由定理3给出. 投资后合同最优预定的努力程度为

$$a_1^{l*}(X) = \min\left(\frac{F^{l'}(X)}{\theta(1+\gamma r\theta\sigma^2 X)}, \bar{a}\right). \quad (29)$$

**证** 证明过程与定理1类似.

定理2的含义: 与定理1不同点在于边界条件的变化, 式(25)表明当企业破产时, 其价值变为0, 而最优破产水平 $X_b$ 由股东内生给定, 股东通过最大化企业价值决定破产时机, 当企业收益流充分大时, 企业价值会近似等于 $E^{l'}(\tilde{X})$ ,  $E^{l'}(\tilde{X})$ 与定理2的纯股权情形相比, 还需减去无风险债务价值, 式(27)表明投资前企业价值的价值匹配条件包含股权价值和债务价值两个部分, 光滑粘贴条件式(28)用来求解 $X_i^l$ .

最后, 考虑债务价值, 在企业投资后, 由于债权得到连续支付的券息为 $b$ , 故债务的价值函数可以表述为如下形式:

$$D(X) = E\left\{\int_t^\infty e^{-r(u-t)} b du \mid X_t = X\right\}. \quad (30)$$

利用前文的推导方法, 不难得到如下定理:

**定理 3** 债务价值 $D(X)$ 满足如下常微分方程:

$$rD(X) = 0.5\sigma^2 X^2 D''(X) + (\mu + a_2^{l*})XD'(X) + b, \quad (31)$$

及边界条件:

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{b}{r}, \quad D(X_b) = (1-\alpha)E^u(X_b), \quad (32)$$

其中 $a_2^{l*}$ 由式(25)给出,  $\alpha$ 为破产损失率.

**证** 见附录.

## 5 数值分析(Numerical results and analysis)

本节参考了文献[9, 14]在数值计算部分选取的参数, 基本模型参数设定为: 无风险利率 $r = 0.05$ , 收益流波动率 $\sigma = 0.25$ , 破产损失率 $\alpha = 0.25$ , 税率 $\tau = 0.2$ , 常数 $\mu = -0.005$ , 管理者努力程度上界 $\bar{a} = 0.05$ , 管理者风险厌恶系数 $\gamma = 5$ , 管理者努力成本系数 $\theta = 35$ , 企业投资成本 $I = 500$ , 扩张系数 $k = 0.5$ , 债务券息 $b = 30$ , 初始现金流 $X_0 = 50$ .

### 5.1 预定努力程度与债务规模(Recommended effort and size of debt)

股东会动态预定管理者的努力程度. 图1描述了纯股权企业和杠杆企业情形下合同预定的努力程度(式(18)(22)(25)(29)), 总体上来看, 不考虑接近破产时刻, 随着企业现金流 $X$ 逐渐增大, 合同预定努力程度会逐渐变小, 这是因为随着 $X$ 的增大, 股东提供给管理者的激励成本比获利要大, 故会降低预定努力程度; 另外无论纯股权企业还是杠杆企业投资前预定的努力程度均高于投资后预定的努力程度, 这由两个原因引起, 首先, 追加投资之前企业平均收益流小于投资后企业平均收益流, 这会导致在投资时刻(纯股权企业最优投资触发点是116.41, 杠杆企业最优投资触发点是94.53)预定努力程度出现跳跃, 其次, 由于企业有扩张投资机会, 该机会产生期权价值, 这也会提高投资前合同预定努力程度.

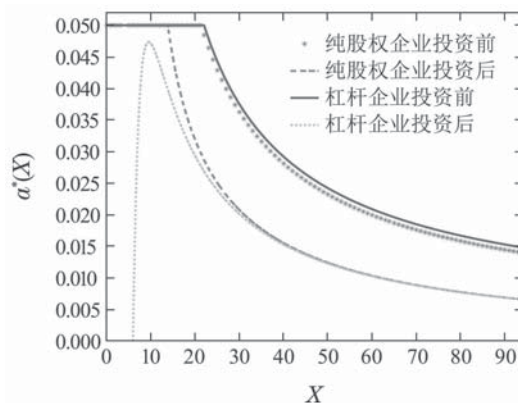


图 1 不同情形下的合同预定的努力程度

Fig. 1 Implemented effort under different situations

股权和债务混合融资情形下, 会出现债务积压问

题,从图1可以看到,当企业收益流接近破产触发水平(5.98),合同预定努力程度很快变成了0(努力程度最小),此时对于股东而言,激励管理者努力工作得不偿失,股东所得的边际价值接近于0,股东不愿意投资(薪酬),当然这会导致社会福利损失,因为此时提高预定努力程度可以避免破产成本产生.应该注意到,由于债务融资,杠杆企业投资前的预定努力程度高于纯股权企业投资前的预定努力程度,而投资后,由于债务积压,导致预定努力程度呈现出相反的结果.

通常由于信息不对称问题的存在,企业会外生的决定债券规模.表1描述了不同券息(债券规模)下的比较静态分析.表1第2列表明券息越大,破产触发点越高,随着券息的增加,债务价值会越来越高,此时企业会提前破产,这与文献[24]结论一致.从第3列可以看到投资触发水平随券息的增加而先增后减,体现了融资行为对投资行为的影响.第4列表明随券息的增加,投资前企业价值先增后减,债务融资的避税效应和破产成本都会影响到投资前的企业价值,当券息较低,税盾效应占主导地位,当券息较高时,破产成本占主导地位.第5列杠杆率为投资时刻的债务价值比企业总价值.

表1 不同券息下的比较静态分析

Table 1 Comparative static analysis under different coupon

| $b$ | $X_b$ | $X_i^l$ | $F^l(X_0)$ | 杠杆率/% |
|-----|-------|---------|------------|-------|
| 25  | 4.90  | 97.27   | 1272.3     | 16.39 |
| 26  | 5.14  | 96.48   | 1273.5     | 17.12 |
| 27  | 5.36  | 117.19  | 1241.3     | 14.95 |
| 28  | 5.56  | 116.41  | 1242.2     | 15.56 |
| 29  | 5.74  | 100.11  | 1256.3     | 16.40 |
| 30  | 5.98  | 94.53   | 1278.2     | 16.68 |

## 5.2 管理者风险厌恶,努力成本及企业风险的影响 (Impact of agent's risk aversion, effort cost and enterprise risk)

本节分析管理者风险厌恶系数,管理者努力成本系数及企业收益流波动率的影响.从表2可以看出,随着管理者风险厌恶系数以及努力成本系数的增加,破产触发点会逐渐升高(股东的最优破产时机提前),管理者风险厌恶水平越高或管理者努力工作需要付出的成本越大,激励管理者就需要支付更高的薪酬,此时股东会提前破产,同时激励成本的增加也会降低投资前企业价值.而随着企业收益流波动率增加,股东决定的破产触发点是降低的,这与文献[24]结论一致,随着风险的增加,对股东而言存在一个期权价值,即如果经营成功将获得很大的收益,而一旦失败由此带来的损失由债权人承担,所以股东会推迟破产来获取

更多收益,而代理问题会扩大这个程度(与标准结论相比破产水平降低的幅度更大).

表2 破产触发水平的比较静态分析

Table 2 Comparative static analysis of the level of bankruptcy trigger

| $\gamma$ | $X_b$ | $\theta$ | $X_b$ | $\sigma$ | $X_b$ |
|----------|-------|----------|-------|----------|-------|
| 0.1      | 3.15  | 5        | 3.04  | 0.20     | 6.14  |
| 1.0      | 4.11  | 10       | 3.44  | 0.25     | 5.98  |
| 2.0      | 4.84  | 15       | 3.95  | 0.30     | 5.87  |
| 3.0      | 5.41  | 20       | 4.52  | 0.35     | 4.85  |
| 4.0      | 5.83  | 25       | 5.12  | 0.45     | 4.34  |
| 5.0      | 5.98  | 30       | 5.70  | 0.50     | 3.88  |

文献[25]首次提出了管理者努力程度和企业投资可以相互替代,管理者高的努力水平对应高的企业收益流,而企业进行投资同样也会增加企业的收益流,不同的是对股东而言,管理者的努力水平是不可控制的,投资却可以控制,这两者的相对成本取决于代理问题的严重程度.直观上来看,当代理问题比较严重时,与激励管理者相比股东进行投机较为划算,图2和图3表明随着管理者风险厌恶系数和努力成本系数的增加,纯股权企业及杠杆企业的投资触发点都呈现出倒U型结构,当管理者风险厌恶系数和努力成本系数较小时,代理问题较为严重,投资是产生较大收益流的划算方法.反之,激励管理者是相对划算的方法.

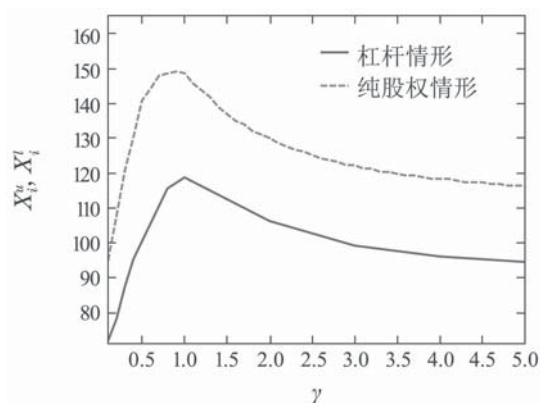


图2 风险厌恶系数与投资触发水平

Fig. 2 Risk aversion vs. investment trigger

从图4可以看出,随着管理者风险厌恶系数的逐渐增大,投资前的企业价值呈现出下降趋势,从定理1和定理2的结论可以看出,管理者的风险厌恶系数会通过股东支付的薪酬水平影响到企业价值,图4反映了这种负相关性,风险厌恶的管理者会导致激励成本增加(文献[26-27]有类似结论),而管理者激励成本的增加会导致投资前企业价值的减少,进一步印证了前文的分析.

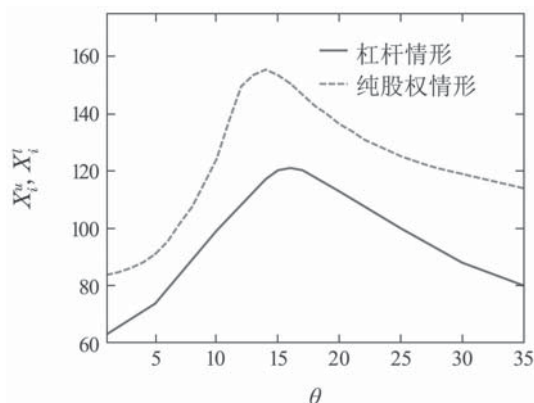


图 3 努力成本系数与投资触发水平

Fig. 3 Effort cost coefficient vs. investment trigger

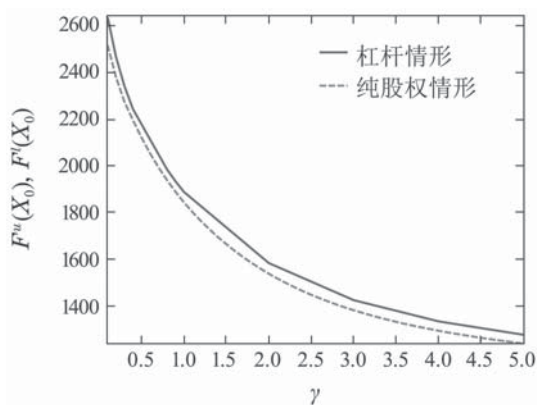


图 4 风险厌恶系数与企业价值

Fig. 4 Risk aversion vs. enterprise value

实物期权研究的一般结论认为随着波动率的增加, 企业投资的期权价值会增加<sup>[4]</sup>, 图5表明, 在存在代理问题的情形下, 随着波动率的增加, 投资前的企业价值(包含了期权价值)先减少后增加, 这是由两个效应引起的, 第1个效应是波动率会间接影响到企业收益流的平均增长率, 从式(22)和(29)可以看出, 波动率增加会降低预定努力程度, 于是波动率的增加间接降低了收益流的平均增长率, 这导致投资前的企业价值降低; 第2个效应, 即期权价值本身的特性, 随着波动率(风险)的增加, 期权价值是增加的。

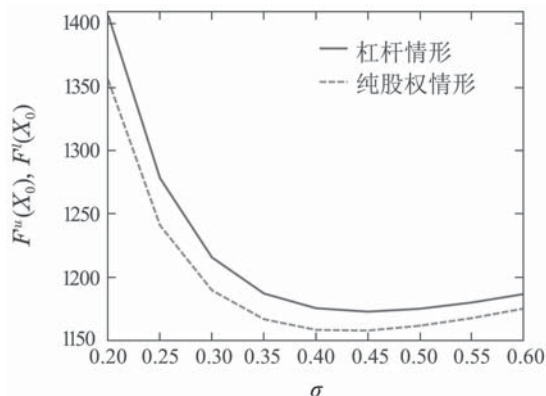


图 5 收益流波动率与企业价值

Fig. 5 Volatility of cash flows vs. enterprise value

从图5可以看出, 当波动率较小时, 第1个效应占主导, 从而使得投资前期权价值下降, 而当波动率较大时, 第2个效应占主导, 投资前企业价值呈现递增的趋势

总的来说, 杠杆企业的投资触发点比纯股权企业的投资触发点低, 股东为了尽快获得避税收益会提前投资; 而杠杆企业投资前的企业价值要比纯股权企业投资前的价值高。

## 6 结语(Conclusions)

管理者的道德风险使得股东或债权人蒙受损失, 尤其是当监督机制乏力且其他替代性的补偿机制失效时, 管理者与股东的代理冲突将更为严重。显然, 无论是管理者消极的经营行为还是股东因为代理问题做出的不合理决策, 都会对社会福利造成损失。

本文利用鞅方法, 随机控制和数理经济分析方法给出了扩张期权下企业最优合同设计与求解。通过比较纯股权企业和杠杆企业的预定努力程度, 投融资决策, 考察了最优长期合同下投融资的交互影响。企业投资机会对股东预定的努力程度影响显著, 而杠杆企业会出现债务积压问题, 在企业现金流接近破产触发点时, 股东预定的努力程度很快接近于0, 导致社会福利损失。另外, 债务融资会提高投资前的企业价值, 当管理者的风险厌恶系数和管理者努力成本系数增加时, 纯股权企业和杠杆企业的投资触发点呈现出先增后减的规律。这些结论为完善企业合同设计和企业证券设计提供了理论依据, 尤其对理顺我国当前混乱的薪酬体系具有参考意义。

## 参考文献(References):

- [1] MODIGLIANI F, MILLER M H. The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment [J]. *American Economic Review*, 1958, 48(3): 261 – 297.
- [2] DIXIT A K, PINDYCK R. *Investment Under Uncertainty* [M]. Princeton, NY: Princeton University Press, 1994.
- [3] MAUER D C, TRIANTIS A J. Interactions of corporate financing and investment decisions: a dynamic framework [J]. *Journal of Finance*, 1994, 49(4): 1253 – 1277.
- [4] MAUER D C, SARKAR S. Real options, agency conflicts, and optimal capital structure [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2005, 29(6): 1405 – 1428.
- [5] LYANDRES E, ZHDANOV A. Accelerated investment effect of risky debt [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2010, 34(11): 2587 – 2599.
- [6] YI Hao, YANG Zhaojun. Consumption-utility based pricing of payments following mean reversion [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(5): 494 – 498.  
(易昊, 杨招军. 均值回复收益的消费效用无差别定价 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(5): 494 – 498.)
- [7] HOLMSTROM B, MILGROM P. Aggregation and linearity in the provision of intertemporal incentives [J]. *Econometrica*, 1987, 55(2): 303 – 328.
- [8] DEMARZO P, SANNIKOVY. Optimal security design and dynamic capital structure in a continuous-time agency model [J]. *The Journal of Finance*, 2006, 61(6): 2681 – 2724.

- [9] DEMARZO P, FISHMAN M. Agency and optimal investment dynamics [J]. *Review of Financial Studies*, 2007, 20(1): 151 – 188.
- [10] DEMARZO P, FISHMAN M, HE Z, et al. Dynamic agency and the q theory of investment [J]. *Journal of Finance*, 2012, 67(6): 2295 – 2340.
- [11] SANNIKOV Y. A continuous-time version of the principal-agent problem [J]. *The Review of Economic Studies*, 2008, 75(3): 957 – 984.
- [12] AI H, LI R. Investment and CEO compensation under limited commitment [J]. *Journal of Financial Economics*, 2015, 116(3): 452 – 472.
- [13] HE Z. Optimal executive compensation when firm size follows geometric brownian motion [J]. *Review of Financial Studies*, 2009, 22(2): 859 – 892.
- [14] HE Z. A model of dynamic compensation and capital structure [J]. *Journal of Financial Economics*, 2011, 100(2): 351 – 366.
- [15] HE Z. Dynamic compensation contracts with private savings [J]. *Review of Financial Studies*, 2012, 25(5): 1494 – 1549.
- [16] BIAIS B, MARIOTTI T, PLANTIN G, et al. Dynamic security design: Convergence to continuous time and asset pricing implications [J]. *The Review of Economic Studies*, 2007, 74(2): 345 – 390.
- [17] ADRIAN T, WESTERFIELD M M. Disagreement and learning in a dynamic contracting model [J]. *Review of Financial Studies*, 2009, 22(10): 3873 – 3906.
- [18] ZHU J Y. Optimal contracts with shirking [J]. *Review of Economic Studies*, 2013, 80(2): 812 – 839.
- [19] LELAND H E. Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure [J]. *The Journal of Finance*, 1994, 49(4): 1213 – 1252.
- [20] CADENILLAS A, CVITANIĆ, ZAPATERO F. Leverage decision and manager compensation with choice of effort and volatility [J]. *Journal of Financial Economics*, 2004, 73(1): 71 – 92.
- [21] OU-YANG H. Optimal contracts in a continuous-time delegated portfolio management problem [J]. *Review of Financial Studies*, 2003, 16(1): 173 – 208.
- [22] BIAIS B, MARIOTTI T, ROCHET J C, et al. Large risks, limited liability, and dynamic moral hazard [J]. *Econometrica*, 2010, 78(1): 73 – 118.
- [23] YANG Zhaojun, XIA Xin, GAN Liu. Corporate investment and financing decisions under principal-agent conflict [J]. *Journal of Quantitative Economics*, 2015, 32(2): 7 – 13.  
(杨招军, 夏鑫, 甘柳. 委托代理冲突下的企业投融资决策 [J]. *经济数学*, 2015, 32(2): 7 – 13.)
- [24] LELAND H E. Agency costs, risk management, and capital structure [J]. *Journal of Finance*, 1998, 53(4): 1213 – 1243.
- [25] HOLMSTROM B, WEISS L. Managerial incentives, investment and aggregate implications: Scale effects [J]. *The Review of Economic Studies*, 1985, 52(3): 403 – 425.
- [26] GERVAIS S, HEATON J B, ODEAN T. Overconfidence, compensation contracts, and capital budgeting [J]. *The Journal of Finance*, 2011, 66(5): 1735 – 1777.
- [27] GOEL A M, THAKOR A V. Overconfidence, CEO selection, and corporate governance [J]. *The Journal of Finance*, 2008, 63(6): 2737 – 2784.
- [28] HACKBARTH D, MAUER D C. Optimal priority structure, capital structure, and investment [J]. *Review of Financial Studies*, 2012, 25(3): 747 – 796.

## 附录(Appendix)

本附录包含式(13)–(14), 定理1和定理3的证明. 式(13)的证明如下:

证 式(11)给出的价值函数与变量 $X$ 和 $V$ 有关, 且其微分方程分别由式(1)和式(10)给出. 于是, 根据贝尔曼原理, 在时刻 $t$ 附近无限小的区间 $\Delta t$ 上有

$$\begin{aligned} rJ^2(X, V) = & \max_H E_t \left[ \int_t^{t+\Delta t} e^{-r(u-t)} ((1+k)X_u - c_u) du + \right. \\ & \left. e^{-r\Delta t} \int_{t+\Delta t}^{\infty} e^{-r(u-t-\Delta t)} ((1+k)X_u - c_u) du \right] = \\ & \max_H E_t \left[ \int_t^{t+\Delta t} e^{-r(u-t)} ((1+k)X_u - c_u) du + \right. \\ & \left. \max_H E_t \{ e^{-r\Delta t} E_{t+\Delta t} \left[ \int_{t+\Delta t}^{\infty} e^{-r(u-t-\Delta t)} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. ((1+k)X_u - c_u) du \right] \} \right]. \end{aligned} \quad (A1)$$

令

$$J_{t+\Delta t}^2 = E_{t+\Delta t} \left[ \int_{t+\Delta t}^{\infty} e^{-r(u-t-\Delta t)} ((1+k)X_u - c_u) du \right].$$

于是, 根据伊藤引理有

$$\begin{aligned} J_{t+\Delta t}^2 = & J^2 + J_X^2 dX + J_V^2 dV + J_{XV}^2 dX dV + \\ & 0.5 J_{XX}^2 dX dX + 0.5 J_{VV}^2 dV dV. \end{aligned} \quad (A2)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ , 有 $e^{-r\Delta t} \rightarrow 1 - r\Delta t$ , 并将式(A2)代入式(A1)整理化简可得式(13). 证毕.

式(14)的证明如下:

证 由于 $J^1(X, V)$ 关于变量 $X$ 和 $V$ 的二阶偏导连续<sup>[28]</sup>, 同样可利用贝尔曼原理和伊藤引理. 于是与式(13)证明过程类似, 可以得到式(14). 证毕.

定理1的证明如下:

证 由于

$$J^2(X, V) = E^u(X) - (-\ln(-\gamma r V I(\gamma r)),$$

对这一等式两边分别关于 $X$ 和 $V$ 两个变量求偏导数, 有

$$\begin{aligned} J_X^2(X, V) &= E^{u'}(X), \quad J_{XX}^2(X, V) = E^{u''}(X), \\ J_{XV}^2(X, V) &= 0, \quad J_{VV}^2(X, V) = -\gamma r V^2, \end{aligned}$$

将其代入式(13), 并将式(7)也代入式(13), 化简之后便可以得到式(16).

接下来, 求解最优合同 $a_2^{u*}(X)$ , 从式(16)找出与预定努力程度相关的项, 便有

$$\begin{aligned} a_2^{u*}(X) = & \arg \max_{a \in [0, \bar{a}]} \{ 0.5(1+k)X\theta a^2 + (a + \mu)XE^{u'}(X) - \\ & 0.5\gamma r(1+k)^2 X^2 \theta^2 a^2 \sigma^2 \}. \end{aligned} \quad (A3)$$

对式(A3)使用一阶导条件可得投资后最优预定的努力程度式(18).

对于纯股权企业而言, 当企业收益流变为0企业价值也会变成0, 于是得到边界条件 $E^u(0) = 0$ , 另一方面, 当企业收益流充分大时, 采用验证的方式可以得到上界

$$\frac{1+k}{r-\mu} \tilde{X} + \frac{1+k}{2r\gamma(r-\mu)^2 \theta^2 \sigma^2}.$$

投资前企业价值及最优合同的求解方式与投资后是类似的, 只需要注意到此时上边界为企业投资边界, 投资前后的企业价值需要满足价值匹配条件 $F^u(X_i^u) = E^u(X_i^u) - I$ 与光滑粘贴条件 $F^{u'}(X_i^u) = E^{u'}(X_i^u)$ . 证毕.

定理3的证明如下:

**证** 从式(31)可以看到与债务价值相关的状态变量只有 $X$ , 于是由式(1)及贝尔曼原理, 可以得到 $D(X)$ 满足HJB方程式(30). 当企业收益流充分大时, 企业不会破产, 此时债务价值为无风险债务价值 $\frac{b}{r}$ , 由此, 得到第1个边界条件 $\lim_{X \rightarrow \infty} D(X) = \frac{b}{r}$ . 而一旦企业破产, 债权人接管企业, 因破产清算, 企业损失掉一部分资产价值, 此时减去破产成本企业剩余价值为 $(1 - \alpha)E^u(X_b)$ , 由此得到第2个边界条件. 由于薪酬合

同由股东与管理者签订, 故由式(25)给出方程(31)中的管理者努力程度. 证毕.

### 作者简介:

**甘 柳** (1983—), 男, 讲师, 目前研究方向为资产定价与公司金融, E-mail: ganliu2016@163.com;

**杨招军** (1964—), 男, 副教授(正教授资格), 博士生导师, 目前研究方向为金融工程、数量金融与风险管理, E-mail: yangzj@sustc.edu.cn.

## 《工程博弈论基础及电力系统应用》评介

自 von Neumann和Morgenstern于1944年合作出版名著《博弈论与经济行为》(The Theory of Games and Economic Behavior), 到Nash在20世纪50年代发表关于非合作博弈均衡解存在性的经典论文, 再到Maynard Smith于20世纪70年代创立演化博弈论, 时至今日, 博弈论已经成为经济、政治、军事、心理乃至整个社会科学的重要的决策分析工具. 近年来, 博弈论也开始广泛应用于通信、电力等工程领域, 在处理工程问题中的不确定性决策或者多主体决策问题中体现出了巨大优势. 由清华大学梅生伟教授等编著的《工程博弈论基础及电力系统应用》一书, 主要关注博弈论在工程领域, 特别是电力系统领域的实际应用, 并在此基础上梳理总结工程博弈论的一般方法论, 是一部具有很高学术参考价值的著作.

2005年第16届IFAC大会上, 现代控制理论的奠基者之一Kalman指出: 回顾过去100多年系统理论的发展历史, 一个不争的结论是, 在基本的物理实质弄清之后, 工程控制与决策问题的解决直接依赖于其内在的纯数学问题的解决. 这一论述概括性地阐述了解决工程控制与决策问题的一般范式, 即从“物理问题”到“数学问题”最后到“求解算法”. 最为著名的例子是控制论的发展历程. 1948年Winner出版《控制论——或关于动物和机器中控制和通信的科学》一书, 指出控制问题的核心是反馈与镇定, 但该书更多的是从思想和哲学层面进行论述. 钱学森于1954年出版的《工程控制论》一书将这种思想具体化, 针对明确的工程问题, 建立严格的数学模型并予以系统化解决, 从而使得控制论真正成为一门崭新的学科. 《工程博弈论基础及电力系统应用》一书遵循这一思路, 以作者多年来的研究成果为基础, 系统归纳、总结工程决策问题的博弈论建模的一般方法以及均衡求解的实用算法, 针对传统博弈论内容过于宽泛、数学过于艰深的问题, 力图搭建起博弈理论与工程实用化设计及应用间的桥梁, 并逐步形成一套适用于解决实际工程决策问题的博弈方法论, 即所谓“工程博弈论”.

全书共分3个部分. 第2–7章为基础篇, 简要阐述博弈论的基本概念及基本理论, 包括数学基础、静态非合作博弈、一般动态博弈、静态合作博弈、微分博弈及演化博弈等方面内容, 为不熟悉博弈论的读者提供简明的基础学习材料, 其主要内容均来自国内外经典的博弈论教材, 尽量避免过于繁复的数学推导与证明, 便于工科读者理解与掌握. 第8–11章为方法篇, 重点探讨工程博弈论中的几类典型问题并给出一般解决方法, 分别就多目标优化、鲁棒优化、鲁棒控制和多层优化四方面进行阐述, 可为读者处理各类典型的工程决策问题提供系统化的建模思路及实用化的求解途径. 第12–17章为应用篇, 给出了工程博弈论在电力系统应用中的各类典型实例, 涵盖电力系统规划、调度、控制、电力经济、电网安全及电网演化等方面内容, 为读者在应用工程博弈论解决实际问题时提供参考范例.

基于博弈的控制理论是控制论的一个前沿方向, 是控制与博弈交叉的一个新生长点. 本书的出版将为该方向的发展解感助推. 全书内容详实, 实例丰富, 可作为工科高年级研究生教材以及进行工程博弈论相关研究的参考用书.

程代展

中国科学院数学与系统科学研究院