

## 针对延迟容忍用户的智能电网需求响应

董齐芬<sup>1†</sup>, 俞立<sup>2</sup>, 宋文战<sup>3</sup>, 洪榛<sup>4</sup>

(1. 浙江警察学院 计算机与信息技术系, 浙江 杭州 310053; 2. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310014;  
3. 美国佐治亚州立大学 计算机系, 亚特兰大 30303; 4. 浙江理工大学 机械与控制学院, 浙江 杭州 310018)

**摘要:** 针对用电请求可被延迟响应的设备, 首先将调度这些设备的用电请求响应问题建立成随机优化模型. 然后利用Lyapunov优化技术设计一种需求响应算法来实时计算设备用电请求何时被响应及被舍弃的用电请求量, 从而降低用户们的电费支出及由于电能供不应求或电网承载超限而被舍弃的部分用电请求对他们造成的影响. 进一步通过理论分析, 当可再生能源发电量、用电请求量及市场电价服从独立同分布时, 建立设备的用电请求被响应的最大等待时间与代价函数值之间的权衡关系. 最后, 仿真实验验证了理论分析结果的有效性.

**关键词:** 智能电网; 需求响应; 随机优化; Lyapunov优化

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Demand response for delay tolerant consumers in smart grid

DONG Qi-fen<sup>1†</sup>, YU Li<sup>2</sup>, SONG Wen-zhan<sup>3</sup>, HONG Zhen<sup>4</sup>

(1. Department of Computer and Information Technology, Zhejiang Police College, Hangzhou Zhejiang 310053, China;  
2. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310014, China;  
3. Department of Computer Science, Georgia State University, Atlanta 30303, USA;  
4. Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

**Abstract:** With an emphasis on delay tolerant electrical devices, the problem of scheduling the operations of these smart devices is described as a stochastic optimization model. Then, based on Lyapunov optimization technique, a demand response algorithm is proposed to determine when to response to electricity request and to calculate the amount of electricity to be discarded in real time. The proposed algorithm reduces the expected electricity bill and the influence on the consumers by having to give up part of the electricity request because of short supply of electricity or overload of the grid capacity. Third, through theoretical analysis, an explicit trade-off between the value of cost function and the worst-case delay of any electricity request to be completed or dropped is obtained when the electricity request price, the amount of renewable generation and the amount of electricity request are independent and identically distributed. Finally, Simulation demonstrates the effectiveness of the proposed results.

**Key words:** smart grid; demand response; stochastic optimization; Lyapunov optimization

### 1 引言(Introduction)

智能电网是将先进的传感测量技术、信息技术、自动控制技术及电网基础设施高度集成的新型现代化电网, 力求在发电、输电、变配电和用电等环节解决传统电网中的难题. 其中, 需求响应对降低峰值负荷、有效利用可再生能源等方面具有极其重要的作用, 是智能电网用电环节中的关键问题之一<sup>[1]</sup>. 广义上, 需求响应定义为: 根据电网中电能的供应情况及其他状况或电力公司给出的电价信息, 调整用户端的用电策略. 目前, 智能电网中的需求响应研究大致分成两类.

一类侧重于调节每个时段内用户的用电量来匹配可用电能<sup>[2-4]</sup>, 这类需求响应针对用电请求即需响应但功率弹性可调的电器设备(如亮度可调节的照明灯). 另一类则研究何时响应电器的用电请求以达到用电匹配供电的目标<sup>[5-6]</sup>, 这类需求响应针对用电请求可被延迟响应的设备, 即将电器的电能消耗分布到各个时段, 只要在给定的期限内完成用户指定的操作, 用户仍是满意的, 本文的研究针对这类用电设备.

在已发表的关于调度用电请求可被延迟响应的设备的研究成果中, 大部分是基于动态规划或马尔科夫

收稿日期: 2016-01-15; 录用日期: 2016-08-10.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: dongqifen@zjcxxy.cn; Tel.: +86 571-87787088.

本文责任编辑: 杨萃.

国家自然科学基金项目(61304256), 浙江省自然科学基金项目(LQ13F030013)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61304256) and National Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LQ13F030013).

决策实现的. 这类方法的前提是可再生能源、用电需求及电价等先验统计信息是完全可知的, 但由于可再生能源和用电需求具有波动性和不可预测性, 因此这些先验统计信息很难获取. 另外, 它们只适用于极小规模系统. 为解决这一难题, Michael J. Neely等人在2010年首次将用于解决无线网络队列系统中动态控制问题的Lyapunov优化技术<sup>[7-9]</sup>引入到智能电网中, 考虑单个可再生能源发电站给单个延迟容忍的设备供电的模型, 研究每个时段内的电能消耗分布, 从而在允许的最大延时之内, 降低用户的时均电费支出<sup>[10]</sup>. 在该解决方案中, 可再生能源的供电能力、用电请求都是实时随机的, 无需知道它们的先验信息. Lyapunov优化技术还特别适用于大规模系统. 因此, 虽然文献[10]中的研究模型很简单, 却起到抛砖引玉的作用, 一些学者们在此基础上作进一步研究. 比如, 文献[11-12]考虑电价的时变特性, 基于Lyapunov优化技术, 设计一种在线控制策略, 使得可在每个时段实时决策超大数据中心蓄电设备的充放电管理, 达到降低数据中心电费账单的目标. Guo等人<sup>[13]</sup>首先研究单用户多个电器设备的用电管理及蓄电池充放电管理, 然后考虑多用户的电能需求与电能存储管理, 并提出一种基于Lyapunov优化的在线分布式算法<sup>[14]</sup>. Zheng等人<sup>[15]</sup>利用Lyapunov优化方法研究了空调的调度控制问题, 使得在不影响用户舒适度的前提下降低供电电压的波动性.

上述成果为用电请求可被延迟响应的设备调度问题提供了很好的参考价值. 但它们未考虑如下问题: 第一, 智能电网将出现的“双向信息流”<sup>[16]</sup>和“双向电能流”<sup>[17]</sup>, 使得用户(尤指大型工商业用户或大用户)同时成为电能生产者和消费者, 从而多用户之间可实现电能共享<sup>[18]</sup>. 第二, 随着用电需求的日益增加, 不可避免的存在电能供不应求或电网承载超限的情况. 在此情况下, 用户们不得不舍弃部分用电请求. 本文对这些问题进行深入研究, 提出一种基于Lyapunov优化的实时需求响应算法. 主要贡献为:

1) 综合考虑上述两个问题, 设计兼顾用户们的电费支出和舍弃的部分用电请求对他们造成影响的时均代价函数, 将用电请求可延迟响应的设备调度问题建立成以时均代价最小化为目标的随机优化模型.

2) 利用Lyapunov优化技术设计一种需求响应算法来实时计算设备用电请求何时被响应及被舍弃的用电请求量. 所设计的算法有利于避免用户们使用高价电和避免过多的舍弃用电请求给用户带来严重影响, 还会根据每类设备对用户的重要性程度决定何时舍弃相应的用电请求.

3) 通过理论分析, 建立设备的用电请求被响应的最大等待时间与所研究的代价函数值之间的权衡关系, 给出设备的用电请求不会被舍弃的条件, 并通过仿真实验进行验证.

## 2 问题描述(Problem formulation)

本文针对大型工商业用户或大用户. 假设单个电力服务站给 $N$ 个用户供电, 且每个用户安装可再生能源发电站, 可将多余电能上传到电网与其他用户共享, 如图1所示. 为方便分析, 本文考虑离散时间的智能电网系统, 且设每个时槽的时间间隔为 $\tau$ .

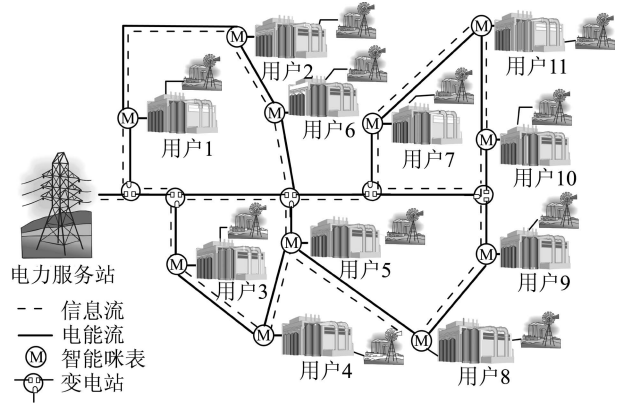


图1 智能电网框图

Fig. 1 The diagram of smart grid

### 2.1 电力服务站(Power service station)

用户向电力服务站购买 $P(t)$ 单位电能, 需支付的费用是 $P(t)c(t)$ , 其中 $c(t)$ 是当前电价, 由电力市场确定且不会超过 $c_{\max}$ , 即 $0 < c(t) \leq c_{\max}$ . 由于电力服务站能够提供的电能受到制约, 故可用 $P_{\max}$ 表示每个时槽内电力服务站可提供的最大电能, 即

$$0 \leq P(t) \leq P_{\max}. \quad (1)$$

### 2.2 用户模型(Consumer model)

用户模型框图如图2所示, 它包含3方面内容:

1) 用电需求: 将具有相同延迟容忍度的设备归为一类, 用户 $n$ 包含 $n_K$ 类设备. 用 $d_n^k(t)$ 表示用户 $n$ 的第 $k$ 类设备当前的用电请求量, 且 $d_n^k(t) \leq (d_n^k)_{\max}$ , 其中的 $(d_n^k)_{\max}$ 表示该设备的最大电能请求量. 这些用电请求被存储在相应队列中, 并遵循先进先出的原则. 令 $\rho_n^k(t)$ 是当前分配给用户 $n$ 的第 $k$ 类设备的可用电能, 且满足 $\rho_n^k(t) \leq (\rho_n^k)_{\max}$ , 其中 $(\rho_n^k)_{\max}$ 表示该设备可分配到的最大电能. 考虑到当电能供不应求或电网承载超限时用户们就不得不舍弃部分用电请求的情况, 设 $a_n^k(t) \leq (d_n^k)_{\max}$ 是用户 $n$ 的第 $k$ 类设备当前需舍弃的用电请求量. 因此, 用电请求存储队列 $Q_n^k(t)$ 的更新过程可表示为

$$Q_n^k(t+1) = \max \{ Q_n^k(t) - \rho_n^k(t) - a_n^k(t), 0 \} + d_n^k(t), \forall n, k, t. \quad (2)$$

根据Lyapunov优化技术, 为确保每一个用电请求的响应时间是有限的, 每个队列应是可稳定的, 即

$$\bar{Q}_n^k = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} E\{Q_n^k(t)\} < \infty, \forall n, k, \quad (3)$$

其中的 $E\{\cdot\}$ 是数学期望. 另外, 由图2知还可得到

$$\sum_{k=1}^{n_k} \rho_n^k(t) = h_n(t) \geq 0, \forall n, t, \quad (4)$$

其中的 $h_n(t)$ 表示当前分配给用户 $n$ 的可用电能.

2) 可再生能源发电设备: 令 $g_n(t)$ 是用户 $n$ 的可再生能源发电站的当前发电量. 由于可再生能源受环境气候影响较大, 故实际发电量往往小于其额定值 $g_n^{\max}$ , 即 $0 \leq g_n(t) \leq g_n^{\max}$ . 为方便分析, 本文假设可再生能源供电是零成本的, 研究结果可方便扩展到考虑可再生能源供电成本的情况.

3) 与外接智能电网的关系: 从图2不难得出, 每个用户的可再生能源发电量 $g_n(t)$ 、分配给用户的可用电能 $h_n(t)$ 及向电网的购(卖)电量 $p_n(t)$ 间满足

$$h_n(t) = g_n(t) + p_n(t), \forall n, t, \quad (5)$$

其中的 $p_n(t)$ 可正可负. 当 $p_n(t)$ 为正时, 表示用户 $n$ 的可再生能源发电站的当前产电量无法自给自足, 需要电网给予支持; 相反地, 表明用户 $n$ 的可再生能源发电站的当前产电量非常充足, 额外多余的电能还可以上传到电网中供其他用户享用.

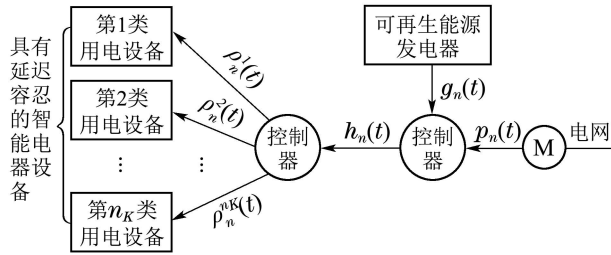


图2 用户模型框图

Fig. 2 The diagram of consumer model

### 2.3 电能共享(Energy share)

因为用电需求和可再生能源均具有一定的波动性, 所以几乎每个用户均会出现电能剩余或匮乏的情况. 若用户间能实现电能共享, 就能提高电能利用效率, 从而达到减少电费支出和用电请求舍弃量的目的, 使每个用户得到实惠. 至于各用户间的实惠平衡问题, 可由电力管理部门制定措施决定, 不展开讨论. 本文关注用户间实行电能共享的共同目标: 最大程度的减少购电量, 降低电费支出; 同时, 尽可能减少用户们舍弃的用电请求量对他们造成的影响. 然而, 这两者之间存在一定的矛盾, 比如, 为减少用户们的用电请求舍弃量, 在电网承载允许和电力服务站供电充足的条件下, 就要尽可能多地向电力服务站购买电能. 因此, 考虑兼顾这两者的时均代价函数

$$\bar{C} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \{ E\{\alpha_1 c(t) P(t) + \alpha_2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} H_n^k(a_n^k(t))\} \}, \quad (6)$$

其中:  $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 是权重系数,  $H_n^k(\cdot)$ 表示舍弃的用电请

求对用户造成影响的函数. 因为用户舍弃的用电请求量越大, 对他带来的影响也越大, 且随着舍弃的用电请求量的增加, 对用户造成的影响是急剧加大的, 所以 $H_n^k(\cdot)$ 应是单调递增的凸函数且 $H_n^k(0) = 0$ .

### 2.4 电能传输约束(Power transmission constraint)

由于本文以大型工商业用户或大用户为研究对象, 因此, 为便于分析, 可采用直流潮流法来近似分析电网中的有功潮流约束:

$$\frac{P(t)}{\tau} 1_{j0} - \frac{p_n(t)}{\tau} 1_{jn} - \sum_{q \in \Omega(j)} p_{jq}(t) = 0, \forall j \in J, t, \quad (7)$$

$$p_{jq}(t) = \frac{\theta_j(t) - \theta_q(t)}{b_{jq}}, \forall j \in J, q \in \Omega(j), t, \quad (8)$$

$$|p_{jq}(t)| \leq p_{jq}^{\max}, \forall j \in J, q \in \Omega(j), t, \quad (9)$$

其中: 将用户、电力服务站及变电站统称为节点, 并用 $J$ 表示它们的集合;  $1_{j0}(1_{jn})$ 是符号函数, 当节点 $j$ 是电力服务站(用户 $n$ )时,  $1_{j0}(1_{jn})$ 等于1, 否则为0;  $\Omega(j)$ 是与节点 $j$ 直接相连的节点集合;  $\theta_j(t)$ 是节点 $j$ 上的当前电压相角值;  $b_{jq}$ 是两相连节点 $j$ 和 $q$ 之间的传输线 $l_{jq}$ 上的电抗;  $p_{jq}(t)$ 和 $p_{jq}^{\max}$ 分别是传输线 $l_{jq}$ 上当前流经的有功潮流和其所能承载的最大有功潮流.

### 2.5 随机优化模型(Stochastic optimization model)

综上, 本文研究的需求响应问题可表示成如下随机优化模型:

$$\begin{aligned} & \min \bar{C}, \\ & 0 \leq \rho_n^k(t) \leq (\rho_n^k)_{\max}, 0 \leq a_n^k(t) \leq (a_n^k)_{\max} \\ & \text{s.t. 式(1)-(5)(7)-(9)}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中:  $d_n^k(t)$ ,  $g_n(t)$ ,  $c(t)$ 及 $Q_n^k(t)$ 是当前观测量,  $\rho_n^k(t)$ 和 $a_n^k(t)$ 则是决策变量, 并且一旦这两个变量确定, 变量 $h_n(t)$ ,  $p_{jq}(t)$ ,  $P(t)$ ,  $\theta_j(t)$ 及 $p_n(t)$ 的值也就确定.

## 3 算法设计(Algorithm design)

### 3.1 Lyapunov优化中的关键技术(Key techniques in Lyapunov optimization)

给出Lyapunov优化中的常用技术, 并在前人的基础上, 提出与本文研究问题相关的引理和结论.

首先, 定义虚拟队列

$$Z_n^k(t+1) = \max[Z_n^k(t) - \rho_n^k(t) - a_n^k(t) + \zeta_n^k 1_{Q_n^k(t) > 0}, 0], \forall n, k, \quad (11)$$

其中:  $\zeta_n^k$ 是可调参数, 其值影响用户 $n$ 的第 $k$ 类设备的用电请求被响应的最大等待时间和随机优化问题(10)的目标函数值;  $1_{\{Q_n^k(t) > 0\}}$ 是符号函数, 当 $Q_n^k(t)$ 大于0时, 它为1, 否则为0. 给出一个与设备的用电请求被响应的最大等待时间相关的引理<sup>[10]</sup>.

**引理1** 假设存在一种需求响应策略, 对 $\forall t$ , 均有 $Q_n^k(t) < (Q_n^k)_{\max}$ 和 $Z_n^k(t) < (Z_n^k)_{\max}$ , 其中的 $(Q_n^k)_{\max}$ 和 $(Z_n^k)_{\max}$ 是正常数, 则设备发出用电请求后

被响应的最大等待时间为 $(\delta_n^k)_{\max}$ 个时槽:

$$(\delta_n^k)_{\max} = \left\lceil \frac{(Q_n^k)_{\max} + (Z_n^k)_{\max}}{\zeta_n^k} \right\rceil, \forall n, k. \quad (12)$$

接着,根据Lyapunov优化中的 $\omega$ -only平稳随机策略<sup>[9]</sup>,给出关于问题(10)的平稳随机策略引理.

**引理 2** 如果随机优化问题(10)是可行的,那么,对任意常数 $\varepsilon > 0$ ,均可在其可行域内,根据当前每个用户 $n$ 的第 $k$ 类设备的用电请求量 $d_n^k(t)$ 和其用电请求存储队列 $Q_n^k(t)$ 及相应虚拟队列 $Z_n^k(t)$ 、可再生能源发电站的发电量 $g_n(t)$ 以及单位电价 $c(t)$ ,确定一种分配给用户 $n$ 的第 $k$ 类设备的电能 $\hat{\rho}_n^k(t)$ 和需舍弃的用电请求量 $\hat{a}_n^k(t)$ 的方案,使得

$$\mathbb{E}\{\alpha_1 c(t) \hat{P}(t) + \alpha_2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} H_n^k(\hat{a}_n^k(t))\} \leq \varphi_{\text{opt}} + \varepsilon, \quad (13)$$

$$\mathbb{E}\{d_n^k(t)\} \leq \mathbb{E}\{\hat{\rho}_n^k(t) + \hat{a}_n^k(t)\} + \varepsilon, \quad (14)$$

其中: $\varphi_{\text{opt}}$ 表示随机优化问题(10)的目标函数最优值, $\hat{P}(t)$ 由 $\hat{\rho}_n^k(t)$ 确定.根据式(4)–(5)和(7),有

$$\hat{P}(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \hat{\rho}_n^k(t) - \sum_{n=1}^N g_n(t). \quad (15)$$

进一步,记 $\Theta(t) = \{Q_n^k(t), Z_n^k(t)\}$ 为当前所有用电请求存储队列和相应虚拟队列的向量,并定义二次Lyapunov函数

$$L(\Theta(t)) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{(Q_n^k(t))^2 + (Z_n^k(t))^2\}. \quad (16)$$

再定义一阶Lyapunov平移函数

$$\Delta(\Theta(t)) = \mathbb{E}\{L(\Theta(t+1)) - L(\Theta(t)) | \Theta(t)\}. \quad (17)$$

再进一步,将问题(10)的目标函数以惩罚项的形式与一阶Lyapunov平移函数相加,得到Lyapunov平移函数–加–惩罚函数:

$$\Phi(t) = \Delta(\Theta(t)) + V \mathbb{E}\{\alpha_1 c(t) P(t) + \alpha_2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} H_n^k(a_n^k(t)) | \Theta(t)\}. \quad (18)$$

其中 $V > 0$ 也是可调参数.下面的引理给出 $\Phi(t)$ 的取值范围.

**引理 3** 在随机优化问题(10)的可行域内,对于任意分配给用户 $n$ 的第 $k$ 类设备当前的可用电能 $\rho_n^k(t)$ 及其需舍弃的用电请求量 $a_n^k(t)$ ,均有

$$\begin{aligned} \Phi(t) \leq & B_{\max} + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \mathbb{E}\{Q_n^k(t) d_n^k(t) + Z_n^k(t) \zeta_n^k + \\ & 0.5(\zeta_n^k)^2 + (\rho_n^k(t))^2 - \{\zeta_n^k + Z_n^k(t) + Q_n^k(t)\} \times \\ & (\rho_n^k(t) + a_n^k(t)) | \Theta(t)\} + V \mathbb{E}\{\alpha_1 c(t) P(t) + \\ & \alpha_2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} H_n^k(a_n^k(t)) | \Theta(t)\}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$B_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{4(\rho_n^k)_{\max} (d_n^k)_{\max} + 3(d_n^k)_{\max}^2\}.$$

此引理的证明过程详见附录A.

### 3.2 基于Lyapunov优化的需求响应算法(Demand response based on Lyapunov optimization)

遵循Lyapunov优化中的思路,设计一种需求响应:观察当前每个用户 $n$ 的第 $k$ 类设备的用电请求量 $d_n^k(t)$ 及其用电请求存储队列 $Q_n^k(t)$ 与虚拟队列 $Z_n^k(t)$ 、可再生能源发电量 $g_n(t)$ 及电价 $c(t)$ ,在可行域内计算出用户 $n$ 的第 $k$ 类设备的电能 $\rho_n^k(t)$ 和需舍弃的用电请求量 $a_n^k(t)$ ,从而最小化式(19)不等号右边的表达式.为更易理解,整理式(19)不等号右边的表达式,得到

$$\begin{aligned} \Phi(t) \leq & B_{\max} + B(t) + \mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{V \alpha_2 H_n^k(a_n^k(t)) - \right. \\ & a_n^k(t) \times \{\zeta_n^k + Z_n^k(t) + Q_n^k(t)\} | \Theta(t)\} + \\ & \mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{V \alpha_1 c(t) - \zeta_n^k - Z_n^k(t) - \right. \\ & Q_n^k(t)\} \times \rho_n^k(t) + (\rho_n^k(t))^2 | \Theta(t)\}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $B(t)$ 与当前观测值及可调参数有关:

$$\begin{aligned} B(t) = \mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{Q_n^k(t) d_n^k(t) + Z_n^k(t) \zeta_n^k + \right. \\ \left. 0.5(\zeta_n^k)^2\} - V \sum_{n=1}^N \alpha_1 c(t) g_n(t) | \Theta(t)\}. \end{aligned} \quad (21)$$

进而,根据上述设计原则得到需求响应算法步骤如下:

**步骤 1** 初始化 $Q_n^k(0) = Z_n^k(0) = 0, \forall n, k$ ,参数 $\zeta_n^k, \forall n, k$ 和 $V$ .然后,对 $\forall t$ ,根据 $c(t), d_n^k(t), Q_n^k(t), Z_n^k(t), g_n(t), \forall n, k$ 的值,执行下面的计算.

**步骤 2** 通过求解如下凸优化问题,计算当前时槽分配给每个用户 $n$ 的第 $k$ 类设备的可用电能 $\rho_n^k(t)$ :

$$\begin{aligned} \min & \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{(\rho_n^k(t))^2 + \rho_n^k(t) \times \\ & \{V \alpha_1 c(t) - \zeta_n^k - Z_n^k(t) - Q_n^k(t)\}\}, \\ \text{s.t.} & \text{式(1)(4)–(5)(7)–(9),} \\ & 0 \leq \rho_n^k(t) \leq (\rho_n^k)_{\max}. \end{aligned}$$

**步骤 3** 通过求解如下优化问题,计算当前时槽每个用户 $n$ 的第 $k$ 类设备需要放弃的电能请求量 $a_n^k(t)$ :

$$\begin{aligned} \min & \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{V \alpha_2 H_n^k(a_n^k(t)) - \\ & \{\zeta_n^k + Z_n^k(t) + Q_n^k(t)\} a_n^k(t)\}, \\ \text{s.t.} & 0 \leq a_n^k(t) \leq (d_n^k)_{\max}. \end{aligned}$$

**步骤 4** 由式(2)(11)分别更新 $Q_n^k(t), Z_n^k(t)$ .

根据上述步骤,所设计的算法具有以下特性:

1) 从步骤2中的凸优化问题可知, 当单位电价很高且某类设备的电能请求队列处于较空状态时, 算法不会急于对该设备的用电请求作出响应, 这有利于避免用户使用高价电, 从而减少电费支出. 但当电能请求存储队列较满时, 算法就会给相应的设备分配电能, 避免过多的舍弃用电请求给用户带来严重影响.

2) 从步骤3中的优化问题可知, 当有限的电网承载范围与电力服务站的供电能力造成必有部分用电请求会一直在队列中等待时, 算法会根据设备对用户的重要程度决定何时舍弃相应的用电请求. 具体地, 若某类设备对用户的作用很小, 则当其电能请求存储队列稍有任务时, 它的用电请求就会被舍弃, 使得对用户重要的设备有更多使用电能的机会; 但若某类设备对用户的作用很大, 则一直当其电能请求存储队列超过给定极限时, 才会舍弃它的用电请求, 因为算法总是试图在等待其他用户的其他设备用电请求较少或电能充足时, 完成对这类重要设备的用电请求响应.

### 3.3 算法性能(Algorithm performance)

**定理 1** 设  $H_n^k(\cdot)$  在  $x$  处的导数为  $\chi_n^k(x)$ , 并且记  $\gamma_n^k = \chi_n^k((d_n^k)_{\max})$ . 若  $(\rho_n^k)_{\max} \geq (d_n^k)_{\max}$ , 且  $\varsigma_n^k$  满足  $0 < \varsigma_n^k \leq E(d_n^k)$ , 则当  $c(t)$  和  $d_n^k(t)$ ,  $g_n(t)$ ,  $\forall n, k$  服从独立同分布, 提出的需求响应算法具有以下性能:

1) 对  $\forall t$ , 用户  $n$  的第  $k$  类设备的用电请求存储队列  $Q_n^k(t)$  及相应的虚拟队列  $Z_n^k(t)$  均满足

$$Q_n^k(t) \leq (Q_n^k)_{\max}, Z_n^k(t) \leq (Z_n^k)_{\max}, \forall n, k, \quad (22)$$

其中:  $(Q_n^k)_{\max} = V\alpha_2\gamma_n^k - \varsigma_n^k + (d_n^k)_{\max}$ ,  $(Z_n^k)_{\max} = V\alpha_2\gamma_n^k$ .

2) 用户  $n$  的第  $k$  类设备的用电请求被响应的最大等待时间为  $(\delta_n^k)_{\max}$  个时槽:

$$(\delta_n^k)_{\max} = \left\lceil \frac{2V\alpha_2\gamma_n^k - \varsigma_n^k + (d_n^k)_{\max}}{\varsigma_n^k} \right\rceil, \forall n, k. \quad (23)$$

3) 令  $a_n^k(t)$ ,  $\rho_n^k(t)$ ,  $\forall n, k$  是本文算法的需求响应策略,  $\varphi$  是相应的时均代价函数值,  $\varphi_{\text{opt}}$  表示随机优化问题(10)的最优目标函数值, 则  $\varphi$  与  $\varphi_{\text{opt}}$  之间满足

$$\varphi \leq \frac{B_{\max} + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{(\rho_n^k)_{\max}^2 + 0.5(\varsigma_n^k)^2\}}{V} + \varphi_{\text{opt}}. \quad (24)$$

4) 如果电网承载范围与电力服务站的供电能力均是足够大的, 且舍弃用户  $n$  的第  $k$  类设备的用电请求会对他会产生较大的影响, 即  $H_n^k(\cdot)$  满足

$$\chi_n^k(0) > \frac{2\alpha_1 c_{\max}}{\alpha_2} + \frac{(d_n^k)_{\max} + 4(\rho_n^k)_{\max}}{\alpha_2 V}, \quad (25)$$

那么, 本文算法中的需求响应策略保证该类设备的用电请求不会被舍弃.

此定理的证明过程详见附录B.

定理1表明若  $c(t)$  和  $d_n^k(t)$ ,  $g_n(t)$ ,  $\forall n, k$  服从独立同

分布, 则设备发出用电请求后被响应的最大等待时间与代价函数值之间存在权衡关系, 且由参数  $V$  和  $\varsigma_n^k$ ,  $\forall n, k$  共同决定, 即用电请求被响应的最大等待时间与  $V$  成正比、与  $\varsigma_n^k$  成反比, 而代价函数值与其最优值之间的差距与  $V$  成反比、与  $\varsigma_n^k$  成正比. 所以, 若设置  $V$  很大、 $\varsigma_n^k$  很小, 就能得到无限接近于最优值的代价函数值, 但用电请求被响应的等待时间就会很长. 实际上, 应该根据用户意愿合理设置它们的值.

## 4 算法仿真(Algorithm simulation)

### 4.1 仿真参数(Simulation parameter)

本节对图1所示的智能电网进行仿真. 以下各小节仿真中共同用到的参数设置如下:

1) 仿真周期是一个月, 时槽长度为0.5 h.

2) 以美国可再生能源实验室发布的关于洛杉矶地区平均每分钟的太阳辐照度(solar irradiance, SI)数据<sup>[19]</sup>作为可再生能源发电的参考(本文选择2012年12月1日早上6点至2012年12月31日晚12点的数据), 并使用不同比例因子来表征不同用户的可再生能源设备之间的异质性, 即可再生能源设备在每个时槽内提供的电能为  $\text{rand}[5, 10] \times SI \times 60 \times 30$  焦.

3) 共有4种类别的设备, 每个用户拥有的设备类别如表1所示.

表 1 每个用户拥有的设备类别

Table 1 Device categories that each consumer has

用户	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
类别1	√	√	√		√	√		√	√	√	√
类别2	√		√	√	√	√			√	√	
类别3		√	√		√		√	√		√	
类别4		√	√	√	√	√	√		√	√	√

4) 在每个时槽内, 设备的用电请求量(兆瓦时)为

$$d_n^k(t) = \begin{cases} 2 + 2 \times \text{rand}[0, 1], & 6:00 \sim 21:00, \\ 0.5 + 0.5 \times \text{rand}[0, 1], & 21:00 \sim 6:00, \end{cases}$$

而最大电能请求量和可分配到的最大电能分别为  $(d_n^k)_{\max} = 4 \text{ MWh}$  和  $(\rho_n^k)_{\max} = (d_n^k)_{\max}$ .

5) 用户的用电请求被舍弃时给他带来不便的影响函数  $H_n^k(x)$  定义为

$$H_n^k(x) = q_n^k x^2 + u_n^k x, \forall n, k, \quad (26)$$

其中  $q_n^k$  和  $u_n^k$  表示用户  $n$  的第  $k$  类设备对该用户的重要性参数. 本节设置: 当  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  时,  $q_n^k = \text{rand}[0, 1]$ ,  $u_n^k = \text{rand}[0.5, 1]$ ; 当  $n \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$  时,  $q_n^k = \text{rand}[1, 2]$ ,  $u_n^k = \text{rand}[1, 2]$ .

6) 单位电价  $c(t) = \text{rand}[0.5, 1] \text{ /kWh}$ .

### 4.2 有用电请求舍弃的场景(Scenario with dropped electricity request)

设置电力服务站在每个时槽内可提供的最大电能  $P_{\max} = 60 \text{ MWh}$ , 各传输线的电抗及其所能承载的

最大有功潮流如表2所示, 电费支出和用户影响函数的权重系数分别为 $\alpha_1 = 0.5$ 和 $\alpha_2 = 0.5$ . 通过仿真验证了此条件下无法一味地满足用户们的用电请求, 即用户们不得不舍弃部分用电请求. 下面分别从用电请求舍弃量、参数 $V$ 和 $\zeta_n^k, \forall n, k$ 对算法的影响进行讨论.

表 2 各传输线的电抗及其承载能力

Table 2 Reactance and capacity of transmission line

传输线	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
电抗	0.058	0.098	0.05	0.12	0.092	0.17	0.059	0.101	0.072	0.063
限额	28.8	24	16.8	14.4	34.8	18	20.4	13.2	7.2	3.6

---

传输线	11	12	13	14	15	16	17	18	19
电抗	0.161	0.085	0.078	0.038	0.029	0.178	0.208	0.059	0.105
限额	8.4	9.6	6	7.2	9.6	9.6	8.4	14.4	19.2

### 4.2.1 用电请求舍弃量 (The amount of dropped electricity request)

设置 $V = 100$ ,  $\zeta_n^k = E(d_n^k), \forall n, k$ . 对用户6和用户9的设备(它们在仿真周期内的总用电请求量大致相同, 分别是 3280.3, 3300.2, 3288.0, 3272.4, 3255.6 和 3243.1)用电请求舍弃量进行比较, 如图3所示. 从图3可看出用户9的3类设备在每个时槽被舍弃的用电请求量均明显少于用户6的3类设备, 这是因为根据第4.1节的参数设置, 有 $H_9^k(x) > H_6^k(x), \forall k, x > 0$ , 即用户9的的设备的重要性更大. 这表明本文算法确实可以根据每类设备对用户的重要程度决定需舍弃的用电请求量, 从而尽可能地减少重要设备的用电请求舍弃量从而最大程度地保障用户的基本用电需求.

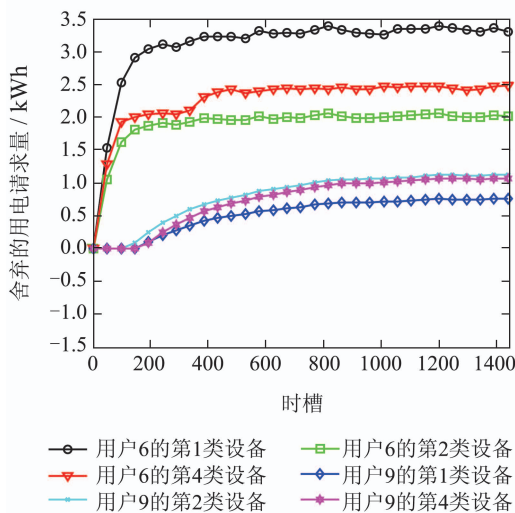


图 3 用户6与用户9的设备在每个时槽被舍弃的用电请求量  
Fig. 3 The amount of dropped electricity request of both the 6th and the 9th consumers' devices in each time slot

### 4.2.2 参数 $V$ 对算法的影响 (Impact of the parameter $V$ )

设置 $\zeta_n^k = E(d_n^k), \forall n, k$ , 参数 $V$ 对算法的影响如图

4至图6所示. 从图4可以看出, 总代价随着 $V$ 的增加而降低, 但随着 $V$ 的进一步增加, 总代价的减少量并不明显, 表明与随机优化问题(10)的最优目标函数值越来越接近, 该实验结果与定理1中的结论(式(24))是一致的. 从图5可知, 用电请求存储队列中的存储量随着 $V$ 的减小而减少, 但随着 $V$ 的进一步减小(从1减小到0.1), 队列中的存储量几乎保持不变, 这是因为根据用电请求存储队列的更新式(2)可知, 对 $\forall n, k, t$ , 均有 $Q_n^k(t+1) \geq d_n^k(t)$ , 所以当 $V$ 减小到一定值后, 无论它再怎么减小, 用电请求存储队列中的用电请求量也不会减少. 因而这也是符合定理1中的结论(式(22))的. 进一步, 根据理论分析结果(式(23))可知, 当 $V$ 的值越小, 设备的用电请求被响应的等待时间就越小, 故在有限的电能供应和电网承载范围内, 就使得用户们需舍弃越多的电能请求, 如图6所示.

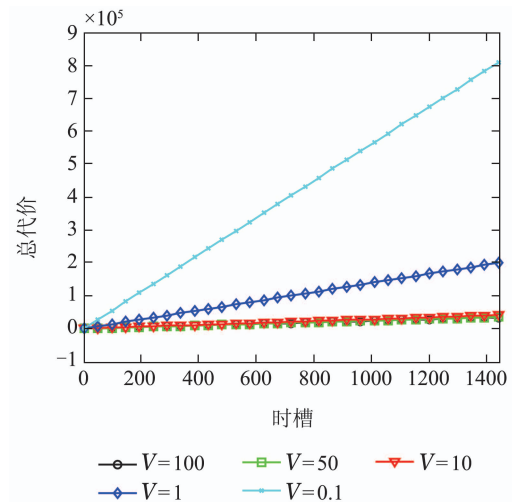


图 4 参数 $V$ 对总代价的影响

Fig. 4 Impact of the parameter  $V$  on the total cost

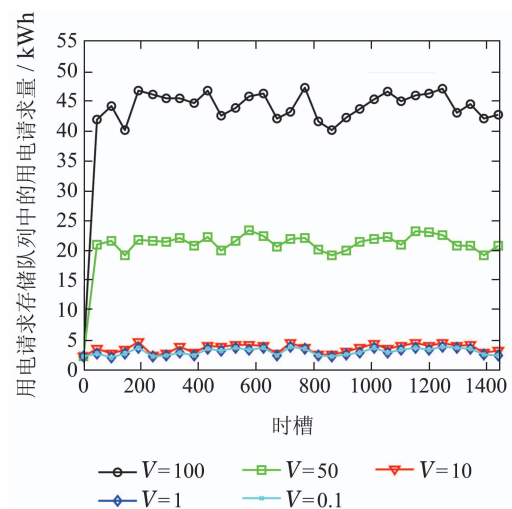


图 5 参数 $V$ 对用电请求存储队列的影响(以用户2的第4类设备为例)

Fig. 5 Impact of the parameter  $V$  on waiting demands in the queue (Take the 4th device of the 2nd consumer for example)

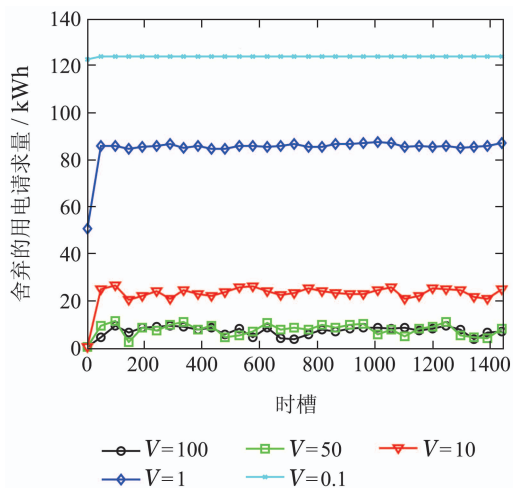


图6 参数V对用电请求舍弃量(所有用户所有设备的用电请求舍弃量之和)的影响

Fig. 6 Impact of the parameter V on the total amount of dropped electricity request

从上述分析可知,合理选择V的值,可以在总代价、用户等待时间及用电请求舍弃量之间达到较好的均衡.根据图4至图6,在本小节的仿真场景下将V设置成10是较理想的.

### 4.2.3 参数 $\zeta_n^k$ 对算法的影响 (Impact of the parameter $\zeta_n^k$ )

设  $\zeta_n^k = e \times E(d_n^k)$ ,  $\forall n$ , 其中的  $e$  是可调的且与参数  $\zeta_n^k$  成正比,即本小节的仿真中通过调节  $e$  的值来同步调节各类设备的参数  $\zeta_n^k$ . 设置参数  $V=100$ , 研究参数  $e$  (即参数  $\zeta_n^k$ ) 对算法的影响,如图7至图9所示.正如定理1所分析的,参数  $\zeta_n^k$  对算法的影响与参数  $V$  对算法的影响正好是相反的.具体地,总代价随着  $\zeta_n^k$  的增加而快速提高,但设备用电请求存储队列中的存储量是随着  $\zeta_n^k$  的增加而减少的.另外,随着  $\zeta_n^k$  的增大,因有限的电能供应和电网承载能力使得用户们舍弃的电能请求量就增多.

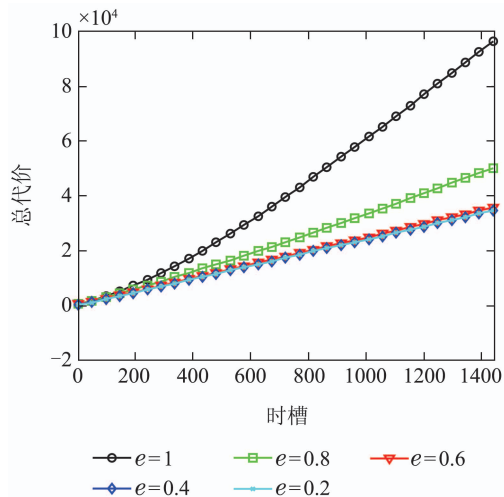


图7 参数  $\zeta_n^k$  对总代价的影响

Fig. 7 Impact of the parameter  $\zeta_n^k$  on the total cost

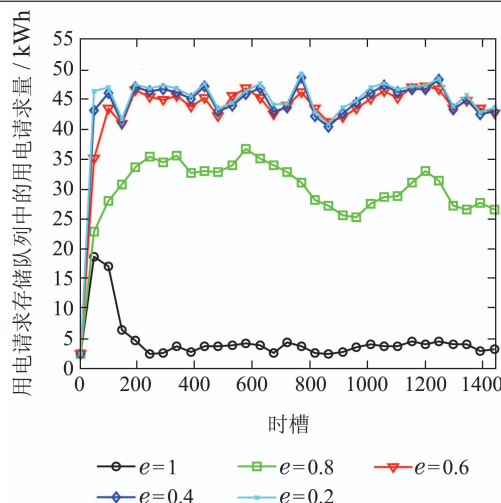


图8 参数  $\zeta_n^k$  对用电请求存储队列的影响(以用户2的第4类设备为例)

Fig. 8 Impact of the parameter  $\zeta_n^k$  on waiting demands in the queue (Take the 4th device of the 2nd consumer for example)

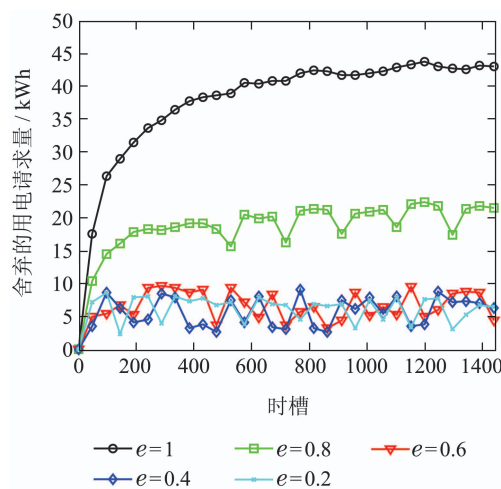


图9 参数  $\zeta_n^k$  对用电请求舍弃量(所有用户所有设备的用电请求舍弃量之和)的影响

Fig. 9 Impact of the parameter  $\zeta_n^k$  on the total amount of dropped electricity request

综上,在实际应用中,需根据智能电网的设置及用户们的要求合理地选择参数V和参数  $\zeta_n^k$  从而均衡用电代价与等待时间.

### 4.3 无用电请求舍弃的场景 (Scenario with no dropped electricity request)

设置电力服务站可提供的最大电能和智能电网传输线承载力均是无限的,电费支出和用户影响函数的权重系数分别为  $\alpha_1 = 0.1$  和  $\alpha_2 = 0.9$ ,即表示用户们比较关注用电请求被舍弃时对他们造成的影响.仿真中还设置  $V \geq 50$ ,从而保证对  $\forall n, k$ ,式(25)总是满足的.仿真结果正如定理1中的命题4)所述,在此种情况下,所有用户的所有用电请求均在一定的延时等待后得到满足.因所有用户的所有用电请求均未被舍弃,

故代价函数中只存在总支出电费这一项,故本小节关注本文算法在电费支出方面的情况.图10和图11分别是参数 $V$ 和 $\zeta_n^k$ 对总支出电费的影响,并与不考虑需求响应的用电模式(即一味地满足所有用户的所有用电请求)进行比较.这两个图表明当参数 $V$ 和 $\zeta_n^k$ 的取值合适时,本文提出的算法利用设备的延迟容忍特性可以减小总支出电费.另外,参数 $V$ 和 $\zeta_n^k$ 对算法的影响与有用电请求舍弃时是类似的,在此不再重述.

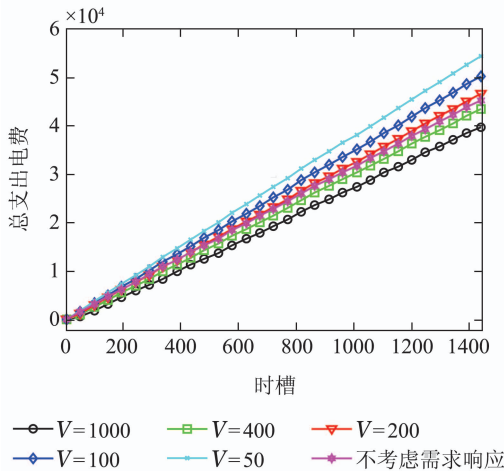


图10 无用电请求舍弃时,参数 $V$ 对总支出电费的影响  
Fig. 10 Impact of the parameter  $V$  on the total electricity bill when there is no dropped electricity request

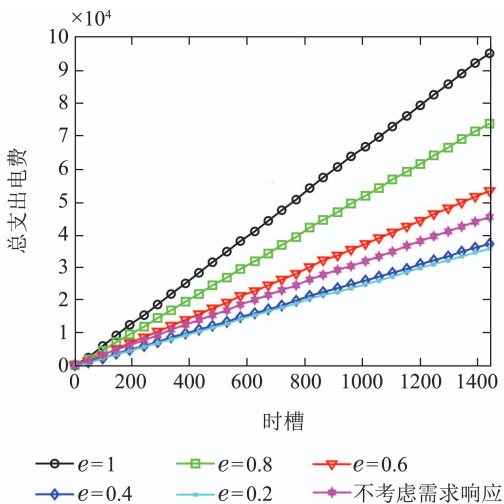


图11 无用电请求舍弃时,参数 $\zeta_n^k$ 对总支出电费的影响  
Fig. 11 Impact of the parameter  $\zeta_n^k$  on the total electricity bill when there is no dropped electricity request

## 5 结论(Conclusions)

针对用电请求可被延迟响应的设备,综合考虑用户间电能共享和电网承载能力,本文设计了一种基于Lyapunov优化技术的需求响应算法来实时计算设备用电请求何时被响应及被舍弃的用电请求量.理论分析和仿真实验均表明通过合理设置参数 $\zeta_n^k$ 和 $V$ 的值,本文提出的算法可以在总电费支出、用户等待时间和

用电请求舍弃量之间达到较好的均衡.但本文成果是基于直流潮流方程的,所得结果存在一定的误差,而非凸的交流潮流方程将会极大地增加所研究问题的难度.因此,如何在本文研究成果的基础上,设计一种基于交流潮流方程的需求响应算法,是一个极具挑战但很有意义的问题,也是下一步研究方向.

## 参考文献(References):

- [1] ALBADI M H, EL-SAADANY E F. A summary of demand response in electricity markets [J]. *Electric Power Systems Research*, 2008, 78(11): 1989 – 1996.
- [2] GATSIS N, GIANNAKIS G B. Residential load control: distributed scheduling and convergence with lost AMI messages [J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2012, 3(2): 770 – 786.
- [3] ROOABEHANI M, DAHLEH M, MITTER S. Dynamic pricing and stabilization of supply and demand in modern electric power grids [C] // *Proceedings of the 1st IEEE Conference on Smart Grid Communications*. Gaithersburg: IEEE, 2010: 543 – 548.
- [4] LARSEN G K H, VAN-FORREEST N D, SCHERPEN J M A. Distributed control of the power supply-demand balance [J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2013, 4(2): 828 – 836.
- [5] HAN S, SEZAKI K. Development of an optimal vehicle-to-grid aggregator for frequency regulation [J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2010, 1(1): 65 – 72.
- [6] KIM T T, POOR H V. Scheduling power consumption with price uncertainty [J]. *IEEE Transaction on Smart Grid*, 2011, 2(3): 519 – 527.
- [7] NEELY M J, MODIANO E, ROHRS C E. Dynamic power allocation and routing for time varying wireless networks [J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2005, 23(1): 89 – 103.
- [8] NEELY M J. Energy optimal control for time varying wireless networks [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(7): 2915 – 2934.
- [9] NEELY M J. *Stochastic Network Optimization with Application to Communication and Queuing Systems* [M]. Florida: Morgan & Claypool Press, 2010.
- [10] NEELY M J, TEHRANI A S, DIMAKIS A G. Efficient algorithms for renewable energy allocation to delay tolerant consumers [C] // *Proceedings of the 1st IEEE Conference on Smart Grid Communications*. Gaithersburg: IEEE, 2010: 549 – 554.
- [11] URGAONKAR R, URGAONKAR B, NEELY M J, et al. Optimal power cost management using stored energy in data centers [C] // *Proceedings of the ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems*. New York: ACM, 2011: 221 – 232.
- [12] GUO Y, DING Z, FANG Y, et al. Cutting down electricity cost in internet data centers by using energy storage [C] // *Proceedings of the IEEE Global Telecommunications Conference*. Houston: IEEE, 2011: 1 – 5.
- [13] GUO Y, PAN M, FANG Y. Optimal power management of residential customers in the smart grid [J]. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2012, 23(9): 1593 – 1606.
- [14] GUO Y, PAN M, FANG Y, et al. Decentralized coordination of energy utilization for residential households in the smart grid [J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2013, 4(3): 1341 – 1350.
- [15] ZHENG L, CAI L. A distributed demand response control strategy using Lyapunov optimization [J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2014, 5(4): 2075 – 2083.



- [16] CHEN Laijun, MEI Shengwei, CHEN Ying. Smart grid information security and its influence on power system survivability [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(2): 240–244.  
(陈来军, 梅生伟, 陈颖. 智能电网信息安全及其对电力系统生存性的影响 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(2): 240–244.)
- [17] FANG X, MISRA S, XUE G L, et al. Smart grid-the new and improved power grid: a survey [J]. *IEEE Communications Surveys and Tutorials*, 2012, 14(4): 944–980.
- [18] MEI Shengwei, ZHU Jianquan. Mathematical and control wcientic issues of smart grid and its prospects [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(2): 119–131.  
(梅生伟, 朱建全. 智能电网中的若干数学与控制科学问题及其展望 [J]. 自动化学报, 2013, 39(2): 119–131.)
- [19] NREL: *Solar Resource & Meteorological Assessment Project* [E-B/OL]. <http://www.nrel.gov/midc/lmu/>.

### 附录A 引理3的证明 (Appendix A Proof of Lemma 3)

根据用电请求存储队列的更新式(2), 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{(Q_n^k(t+1))^2 - (Q_n^k(t))^2\} = \\ & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{(\max\{Q_n^k(t) - \rho_n^k(t) - a_n^k(t), 0\} + \\ & d_n^k(t))^2 - (Q_n^k(t))^2\} \leq \\ & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{(Q_n^k(t) - \rho_n^k(t) - a_n^k(t))^2 + (d_n^k(t))^2 + \\ & 2Q_n^k(t)d_n^k(t) - (Q_n^k(t))^2\}, \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

其中的不等式利用数学关系式 $(\max\{a-b, 0\} + c)^2 \leq (a-b)^2 + 2ac + c^2$ ,  $\forall a \geq 0$ 求得. 类似地, 根据虚拟队列的更新式(11), 可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{(Z_n^k(t+1))^2 - (Z_n^k(t))^2\} \leq \\ & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{(\max\{Z_n^k(t) - \rho_n^k(t) - a_n^k(t) + \\ & \zeta_n^k, 0\})^2 - (Z_n^k(t))^2\} \leq \\ & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{(Z_n^k(t) - \rho_n^k(t) - a_n^k(t) + \\ & \zeta_n^k)^2 - (Z_n^k(t))^2\}. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

将式(A1)–(A2)及 $P(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \rho_n^k(t) - \sum_{n=1}^N g_n(t)$ 代入式(18), 再由 $d_n^k(t) \leq (d_n^k)_{\max}$ ,  $\rho_n^k(t) \leq (\rho_n^k)_{\max}$ 和 $a_n^k(t) \leq (a_n^k)_{\max}$ 整理可得式(19).

### 附录B 定理1的证明 (Appendix B Proof of Theorem 1)

1) 利用数学归纳法证明.

a) 证明 $Q_n^k(t) \leq (Q_n^k)_{\max}$ ,  $\forall n, k, t$ .

显然,  $Q_n^k(0) = 0 < (Q_n^k)_{\max}$ . 假设对 $\forall t$ , 均有 $Q_n^k(t) < (Q_n^k)_{\max}$ . 下面证明 $Q_n^k(t+1) < (Q_n^k)_{\max}$ 也成立.

首先, 分析 $Q_n^k(t) \leq V\alpha_2\gamma_n^k - \zeta_n^k$ 的情况. 由式(2)可知, 对

$\forall t$ ,  $Q_n^k(t)$ 的增加量不会超过 $(d_n^k)_{\max}$ , 故在此种情况下,  $Q_n^k(t+1) < (Q_n^k)_{\max}$ 显然成立.

再分析 $V\alpha_2\gamma_n^k - \zeta_n^k < Q_n^k(t) \leq (Q_n^k)_{\max}$ 的情况. 在这种情况下, 有

$$\zeta_n^k + Z_n^k(t) + Q_n^k(t) > V\alpha_2\gamma_n^k, \quad (\text{B1})$$

那么, 算法的步骤3中的目标函数中的子项

$$\begin{aligned} f_n^k(a_n^k(t)) &= V\alpha_2 H_n^k(a_n^k(t)) - \\ & \{\zeta_n^k + Z_n^k(t) + Q_n^k(t)\}a_n^k(t) \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

在 $0 \leq a_n^k(t) \leq (d_n^k)_{\max}$ 处的一阶导数满足

$$\begin{aligned} V\alpha_2 \chi_n^k(a_n^k(t)) - \{\zeta_n^k + Z_n^k(t) + Q_n^k(t)\} < \\ V\alpha_2 \chi_n^k(a_n^k(t)) - V\alpha_2 \gamma_n^k \leq 0, \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

其中最后一个不等式是由 $H_n^k(\cdot)$ 是单调递增的凸函数的性质得到的. 上式表明当 $V\alpha_2\gamma_n^k - \zeta_n^k < Q_n^k(t) \leq (Q_n^k)_{\max}$ 时,  $f_n^k(a_n^k(t))$ 在区间 $[0, (d_n^k)_{\max}]$ 内是单调递减的, 因此, 用户 $n$ 计算出他的第 $k$ 类设备需舍弃 $(d_n^k)_{\max}$ 单位的用电请求. 进而, 根据式(2)可知,  $Q_n^k(t+1)$ 仍不会超过 $(Q_n^k)_{\max}$ .

综上,  $Q_n^k(t) \leq (Q_n^k)_{\max}$ ,  $\forall n, k, t$ 成立.

b) 证明 $Z_n^k(t) < (Z_n^k)_{\max}$ ,  $\forall n, k, t$ .

显然,  $Z_n^k(0) = 0 < (Z_n^k)_{\max}$ . 假设对 $\forall t$ , 均有 $Z_n^k(t) < (Z_n^k)_{\max}$ , 下面证明 $Z_n^k(t+1) < (Z_n^k)_{\max}$ 也成立.

首先, 分析 $Z_n^k(t) \leq V\alpha_2\gamma_n^k - \zeta_n^k$ 的情况. 由式(11)可知, 对 $\forall t$ ,  $Z_n^k(t)$ 的最大增加量为 $\zeta_n^k$ , 因此有 $Z_n^k(t+1) \leq Z_n^k(t) + \zeta_n^k \leq V\alpha_2\gamma_n^k$ .

再分析 $V\alpha_2\gamma_n^k - \zeta_n^k < Z_n^k(t) \leq (Z_n^k)_{\max}$ 的情况. 此时, 式(B1)也成立. 故用户 $n$ 的第 $k$ 类设备需舍弃 $(d_n^k)_{\max}$ 电能请求. 由式(11)可知,  $Z_n^k(t)$ 的增加量小于等于 $\zeta_n^k - (d_n^k)_{\max}$ . 又因为 $0 < \zeta_n^k \leq (d_n^k)_{\max}$ , 所以 $Z_n^k(t+1) < Z_n^k(t) \leq (Z_n^k)_{\max}$ .

综上,  $Z_n^k(t) \leq (Z_n^k)_{\max}$ ,  $\forall n, k, t$ 成立.

2) 由命题1)中的结果和引理1即可得到式(23).

3) 令 $\hat{a}_n^k(t), \hat{\rho}_n^k(t), \forall n, k$ 是引理2中 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的平稳随机策略,  $\hat{\psi}(t)$ 和 $\psi(t)$ 分别表示将 $\hat{a}_n^k(t), \hat{\rho}_n^k(t), \forall n, k$ 和本文算法的需求响应策略 $a_n^k(t), \rho_n^k(t), \forall n, k$ 代入式(19)的不等号右边的表达式所求得的值. 因为本文算法的设计原则是: 每个时槽内, 在可行域中选择一种能使式(19)不等号右边的表达式达到最小值的需求响应策略, 所以对 $\forall t$ , 均有

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\leq \psi(t) \leq \hat{\psi}(t) \leq \\ B_{\max} &+ \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{(\rho_n^k)_{\max}^2 + 0.5(\zeta_n^k)^2\} + V\varphi_{\text{opt}}, \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

其中第1个不等式由引理3得到, 最后一个不等式由引理2及 $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $0 < \zeta_n^k \leq E(d_n^k)$ ,  $\forall n, k$ 得到. 将上式两端取数学期望, 并由迭代期望法则 (the law of iterated expectations), 可以得到

$$\begin{aligned} E\{L(\Theta(t+1))\} &- E\{L(\Theta(t))\} + \\ VE\{\alpha_1 c(t)P(t) &+ \alpha_2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} H_n^k(a_n^k(t))\} &\leq \end{aligned}$$

$$B_{\max} + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{(\rho_n^k)_{\max}^2 + 0.5(\varsigma_n^k)^2\} + V\varphi_{\text{opt}}, \quad \forall t. \quad (\text{B5})$$

再将上式从  $t=0$  到  $t=T-1$  依次相加, 得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{L(\theta(T))\} - \mathbb{E}\{L(\theta(0))\} + \\ & \sum_{t=0}^{T-1} V \mathbb{E}\{\alpha_1 c(t)P(t) + \alpha_2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} H_n^k(a_n^k(t))\} \leq \\ & \sum_{t=0}^{T-1} \{B_{\max} + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n_k} \{(\rho_n^k)_{\max}^2 + \\ & 0.5(\varsigma_n^k)^2\}\} + TV\varphi_{\text{opt}}. \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

因  $Q_n^k(0) = 0, Z_n^k(0) = 0, \forall n, k$ , 故  $L(\theta(0)) = 0$ . 又对  $\forall n, k, t$ , 均有  $Q_n^k(t) \leq (Q_n^k)_{\max}$  和  $Z_n^k(t) \leq (Z_n^k)_{\max}$ , 故  $L(\theta(T))$  总是有界的. 因此, 将上式两端同时除以  $TV$  并令  $T \rightarrow \infty$ , 即可得式(24).

4) 因为电网承载范围与电力服务站的供电能力都是足够大的, 所以本文算法步骤2的优化问题中的第1行约束是冗余的. 进而, 类似命题1)中的证明过程, 可以得出用户  $n$  的第  $k$  类设备的用电请求队列及相应的虚拟队列的上界分别是

$$(Q_n^k)_{\max} = V\alpha_1 c_{\max} + 2(\rho_n^k)_{\max} - \varsigma_n^k + (d_n^k)_{\max}, \quad (\text{B7})$$

$$(Z_n^k)_{\max} = V\alpha_1 c_{\max} + 2(\rho_n^k)_{\max}. \quad (\text{B8})$$

因此, 本文算法步骤3中的优化问题的目标函数中的子项(B2)

在  $0 \leq a_n^k(t) \leq (d_n^k)_{\max}$  处的一阶导数总有

$$\begin{aligned} & V\alpha_2 \chi_n^k(a_n^k(t)) - \{\varsigma_n^k + Z_n^k(t) + Q_n^k(t)\} \geq \\ & V\alpha_2 \chi_n^k(d_n^k(t)) - 2V\alpha_1 c_{\max} - 4(\rho_n^k)_{\max} - (d_n^k)_{\max} \geq \\ & V\alpha_2 \chi_n^k(0) - 2V\alpha_1 c_{\max} - 4(\rho_n^k)_{\max} - (d_n^k)_{\max} > 0, \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

其中: 第1个不等式由式(B7)和式(B8)得到, 第2个不等式是由  $H_n^k(\cdot)$  是单调递增的凸函数的性质得到, 最后一个不等式则由该命题中  $H_n^k(\cdot)$  满足的条件式(25)得到. 上式表明在该命题的条件下,  $f_n^k(a_n^k(t))$  在区间  $[0, (d_n^k)_{\max}]$  上是单调递增的, 因此, 用户  $n$  的第  $k$  类设备不需要舍弃任何用电请求.

综上, 定理1中的4个命题全部得证.

作者简介:

**董齐芬** (1985-), 女, 博士, 讲师, 目前研究方向为智能电网中的需求响应算法、无线传感网、优化理论, E-mail: dongqifen@zjcxxy.cn;

**俞立** (1961-), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为控制理论、网络控制、智能电网, E-mail: lyu@zjut.edu.cn;

**宋文战** (1976-), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能电网、无线传感网, E-mail: wsong@gsu.edu;

**洪榛** (1983-), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为无线传感器网络、优化理论、智能交通, E-mail: hongzhen614@126.com.