

含输入死区系统的滤波误差初始修正迭代学习控制

严求真¹, 孙明轩^{2†}, 蔡建平³

(1. 浙江水利水电学院 信息工程学院, 浙江 杭州 310018; 2. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023;

3. 浙江水利水电学院 应用数学研究所, 浙江 杭州 310018)

摘要: 针对一类输入环节含死区非线性特性且误差初值非零的非参数不确定系统, 提出滤波误差初始修正学习控制方案, 分别解决死区斜率下限可知与未知两种情形下的轨迹跟踪问题. 给出了两种修正滤波误差信号构造方法, 并根据Lyapunov综合方法设计学习控制器, 采用鲁棒学习策略处理非参数不确定性和死区非线性特性. 经过足够多次迭代后, 实现滤波误差在预设的作业区间也收敛于零. 文中所提出的控制方案, 具有构造简单与实施方便的特点, 仿真结果表明了本文所提控制方法的有效性.

关键词: 死区; 迭代学习控制; 初值问题; 非参数不确定性; Lyapunov方法

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Filtering-error rectified iterative learning control for systems with input dead-zone

YAN Qiu-zhen¹, SUN Ming-xuan^{2†}, CAI Jian-ping³

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power, Hangzhou Zhejiang 310018, China;

2. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China;

3. Institute of Applied Mathematics, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

Abstract: This paper presents the filtering-error rectified adaptive iterative learning control algorithms to tackle the trajectory-tracking problem for a class of nonparametric uncertain systems with unknown input dead-zone, in the presence of arbitrary initial states. To overcome the arbitrary initial states, two construction programs of the rectified filtering-error are proposed. Two iterative learning controllers are designed by applying Lyapunov synthesis, suitable to the case that the lower bound of the dead-zone's slope is known and the case that it is unknown respectively, dealing with the nonparametric uncertainties and the unknown dead-zone nonlinearity according to the robust learning strategy. As iteration increases, the filtering error converges to zero on the specified interval. The rectified filtering-error signal can be simply constructed, and the proposed learning control scheme, whose effectiveness is demonstrated in the presented numerical results, is easy for implementation.

Key words: dead-zone; iterative learning control; initial condition problem; nonparametric uncertainties; Lyapunov approach

1 引言(Introduction)

在伺服电机等实际系统的执行环节中, 常存在死区非线性特性. 这种非线性特性的存在, 不仅降低了系统的稳态精度, 还会损害系统瞬态性能, 严重时甚至导致系统发散. 为确保闭环系统稳定以及实现精确跟踪, 在设计控制器时必须采取措施对死区予以估计和补偿. 因此, 研究死区非线性的处理问题是一项有意义的工作.

若系统中含有的输入死区特性参数完全已知, 那么通过简单的常数逆向补偿就可以直接在数值上完全消除死区非线性对控制性能的影响. 但现实中的死区非线性特性常系参数不可知, 故上述常数补偿方法在设计控制系统时很难实施^[1]. 为此, 人们尝试利用自适应方法估计死区参数^[2-4], 并由此补偿死区非线性. 利用死区的结构特点, 可将未知死区分解为两部分, 其一为系统输入与未知常数的积, 另一部分被视

收稿日期: 2016-03-24; 录用日期: 2016-10-18.

[†]通信作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn.

本文责任编辑: 王郅维.

国家自然科学基金项目(61374103, 61573320, 61573322), 浙江省公益技术应用研究项目(2016C32093, 2017C33155), 浙江省教育厅科研项目(Y201635861)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61374103, 61573320, 61573322), Science and Technology Project of Zhejiang Province (2016C32093, 2017C33155) and Scientific Research Project of Education Department of Zhejiang Province (Y201635861).

作有界不确定性. 对于该有界不确定性, 可以利用神经网络/模糊系统对其予以逼近^[5-6], 也可以利用鲁棒方法予以补偿^[7-9]. 文[7]针对一类输入死区两侧斜率相等的参数不确定系统, 给出鲁棒自适应控制设计方案. 文[8]采用鲁棒自适应方法补偿两侧斜率不等的输入死区. 文[9]考虑含输入死区的非参数不确定时滞系统, 提出鲁棒自适应算法解决轨迹跟踪问题.

迭代学习控制技术适用于在有限作业区间上实施具有重复性的控制任务, 它利用前次或前几次迭代运行过程中的系统信息, 修正本次运行中的被学习量, 逐渐并最终完全补偿在每次迭代运行中重复出现的各类不确定性, 在整个作业区间上实现状态/输出对目标轨迹的精确跟踪. 在问世至今的30余年中, 迭代学习控制一直是控制领域的研究热点之一, 并取得大量的理论和应用成果^[10-14]. Lyapunov综合方法是近年来学习控制领域的重要研究课题之一^[15-16]. 至今, 人们对线性参数化系统的研究已经比较充分, 相关文献讨论的主题多为利用学习方法补偿系统中的定常/时变/混合参数不确定性, 并由此设计轨迹跟踪控制器, 实现相应的跟踪任务^[17]. 有关参数化系统的其他研究成果还涉及参数以某种已知模式沿迭代轴变化^[18]、非线性参数不确定性^[19]. 非参数不确定系统的学习控制方法研究已经引起人们的兴趣, 文[20]采用鲁棒方法处理非参数不确定性, 即利用界函数设计反馈项对其予以补偿. 文[21]采用鲁棒方法与学习方法相结合的方法处理非参数不确定性. 文[22]采用傅立叶级数逼近非参数不确定性.

初值问题是迭代学习控制的基本问题, 指的是常规迭代学习控制算法要求系统能够精确复位, 使得各次迭代中系统误差初值次为零^[23-24]. 这样, 经过足够多次迭代后, 可以实现整个作业区间上的零误差轨迹跟踪. 但在现实中, 初始误差的存在限制了这些迭代学习控制算法在现实中的应用. 为拓宽迭代学习控制技术在现实中的应用范围, 多年来, 人们一直探索适用于初始误差非零情形的迭代学习控制算法. 到目前为止, 基于Lyapunov综合方法的初值问题解决方案还比较少. 文[25]在构造时变边界层的基础上, 提出模糊学习控制算法. 文[17]研究非线性系统的误差跟踪学习算法, 并将误差跟踪方法与参考信号初始修正方法进行对比. 文[26]考虑非参数不确定系统的状态受限误差跟踪学习控制方法. 参考信号初始修正方法的提出可追溯到20世纪90年代, 人们在基于压缩映射原理设计学习控制系统时, 即利用这一方法设计学习律, 实现系统输出对修正极限输出轨迹的跟踪^[27]. 近年来, 参考信号初始修正方法重新受到人们的关注^[28-29].

本文研究含输入死区系统的滤波误差初始修正学习控制方法. 为解决任意系统初态情形下的精确跟

踪问题, 针对一类输入环节含死区非线性特性且系统状态初值任意的非参数不确定系统, 在构造相应修正滤波误差的基础上, 给出两套自适应学习控制设计方案, 分别适用于死区斜率下界已知与未知场合. 上述算法根据鲁棒学习策略处理非参数不确定性与死区非线性特性, 经过足够多次迭代后, 可使修正滤波误差在整个作业区间收敛于零, 并由此实现滤波误差在预设的部分作业区间上收敛于零, 同时保证闭环系统所有信号有界. 在本文提出的控制设计方案中, 修正滤波误差信号的构造较为简单, 控制方案本身的实施也较为方便.

2 问题的提出与准备(Problem formulation)

考虑在有限时间 $[0, T]$ 上迭代运行的含输入死区非参数不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_{n,k} = f(\mathbf{x}_k, t) + g(\mathbf{x}_k, t)u(v_k), \end{cases} \quad (1)$$

式中: $k(= 0, 1, 2, \dots)$ 为重复作业次数, $t \in [0, T]$, $\mathbf{x}_k = [x_{1,k} \ \dots \ x_{n,k}]^T \in \mathbb{R}^n$ 为可量测的系统状态, $f(\mathbf{x}_k, t) \in \mathbb{R}$, $g(\mathbf{x}_k, t) \in \mathbb{R}$ 为未知的光滑函数, 分别满足假设1和假设2. 参考信号为 $\mathbf{x}_d = [x_{1,d} \ x_{2,d} \ \dots \ x_{n,d}]^T = [x_d \ \dot{x}_d \ \dots \ x_d^{(n-1)}]^T$, 并且 $x_d^{(n)}$ 存在, $\mathbf{x}_k(0) \neq \mathbf{x}_d(0)$, $u(v_k) \in \mathbb{R}$ 为执行机构的实际输出, $v_k \in \mathbb{R}$ 是控制输入,

$$u(v_k) = \begin{cases} m_r(v_k - b_r), & v_k \geq b_r, \\ 0, & b_l \leq v_k < b_r, \\ m_l(v_k - b_l), & v_k < b_l, \end{cases} \quad (2)$$

其中 m_r 和 m_l 均为未知正数. 本文考虑 $m_r = m_l = m > 0$, 但其具体大小未知情形.

假设 1 $\forall \xi_1 \in \mathbb{R}^n, \forall \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, 函数 $f(\xi_1, t)$ 和 $g(\cdot, \cdot)$ 分别满足

$$|f(\xi_1, t) - f(\xi_2, t)| \leq \alpha_f(\xi_1, \xi_2, t) \|\xi_1 - \xi_2\| \quad (3)$$

与

$$|g(\xi_1, t) - g(\xi_2, t)| \leq \alpha_g(\xi_1, \xi_2, t) \|\xi_1 - \xi_2\|, \quad (4)$$

其中, $\alpha_f(\cdot, \cdot, \cdot)$ 和 $\alpha_g(\cdot, \cdot, \cdot)$ 为非负连续函数.

假设 2 存在已知连续函数 $g_m(\mathbf{x}_k, t)$, 满足 $0 < g_m(\mathbf{x}_k, t) \leq g(\mathbf{x}_k, t)$.

为了叙述简便, 下文分别简记 $g_m(\mathbf{x}_k, t)$, $f(\mathbf{x}_k, t)$, $g(\mathbf{x}_k, t)$, $f(\mathbf{x}_d, t)$, $g(\mathbf{x}_d, t)$, $\alpha_f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d, t)$, $\alpha_g(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d, t)$, $u(v_k)$ 为 g_{mk} , f_k , g_k , f_d , g_d , α_{fk} , α_{gk} , u_k . 在不引起歧义时, 函数的自变量 t 常被略去.

3 修正滤波误差信号的构造(Construction of the rectified filtering error)

定义

$$\begin{cases} \mathbf{e}_k = [e_{1k} & e_{2k} & \cdots & e_{nk}]^T = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_d, \\ s_k = c_1 e_{1k} + c_2 e_{2k} + \cdots + c_{n-1} e_{n-1k} + e_{nk}. \end{cases} \quad (5)$$

上式中, $c_1, \dots, c_{n-1}$ 为合适的正数, 使得多项式 $\Delta(p) = p^{n-1} + c_{n-1}p^{n-2} + \cdots + c_2p + c_1$ 为 Hurwitz 多项式. 倘若利用 Lyapunov 函数 $V_{0k}(t) = \frac{1}{2}s_k^2$ 设计控制器, $V_{0k}(0) \neq 0$ 将为设计学习控制系统带来不便. 为克服这一障碍, 对上述滤波误差 $s_k(t)$ 予以修正, 得到修正滤波误差

$$s_{\phi k} = s_k - s_k(0)\phi(t), \quad (6)$$

其中: $\phi(t)$ 为一类连续可导的单调递减函数, 满足 $\phi(0) = 1, \phi(t) = 0 (\forall t \in [t_1, T], t_1 > 0)$. 不难看出, 在 $t \in [0, t_1]$ 上选择合适的 $\phi(t)$, 是构造修正滤波误差信号的主要内容.

可以通过待定系数法确定关于 t 的多项式中的各系数来确定 $\phi(t)$. 下面给出具体的实现方案: 在 $t \in (t_1, T]$ 上, 选择 $\phi(t) = 0$; 在 $t \in [0, t_1]$ 上, 选择 $\phi(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$, 其中:

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3t_1^2 & 2t_1 \\ t_1^3 & t_1^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1t_1 + a_0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$a_0 = 1, a_1$ 可为任意非正数, 例如不妨可取 $a_1 = 0$. 类似的, $\phi(t)$ 在 $t \in [0, t_1]$ 上的选择方案还有

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{10(t_1 - t)^3}{t_1^3} - \frac{15(t_1 - t)^4}{t_1^4} + \frac{6(t_1 - t)^5}{t_1^5}, \\ \phi(t) &= \frac{t^2}{t_1^2} - \frac{2t}{t_1} + 1 \end{aligned}$$

等. 此外, 也可根据含 t 算式的定积分来构造

$$\phi(t) = (1 - \int_0^t \omega(\tau) d\tau)^2, \quad (8)$$

其中 $\omega(t)$ 满足

$$\begin{cases} \omega(t) = 0, & t > t_1, \\ \int_0^{t_1} \omega(\tau) d\tau = 1. \end{cases}$$

一种可选的方案为

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{e^t}{e^{t_1} - 1}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & t > t_1. \end{cases} \quad (9)$$

根据 $\phi(t)$ 的性质, 由式(6)可以看出, 经过足够迭代后, 若能够实现整个作业区间 $[0, T]$ 上的 $s_{\phi k}(t) = 0$, 即可实现 $s_k(t) = 0, t \in [t_1, T]$. 这是下文中进行控制器设计的策略所在.

4 控制器设计与收敛性分析(Control design and convergence analysis)

4.1 m 已知情形(Case of m known)

本小节考虑 m 的下界已知情形, 即存在已知正数 $\underline{m}$, 满足 $0 < \underline{m} \leq m$. 由式(6)可得

$$\dot{s}_k = \mathbf{c}^T \mathbf{e}_k + f_k + g_k u_k - \dot{x}_{n,d} - s_k(0)\dot{\phi}(t),$$

其中 $\mathbf{c} = [0 \ c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{n-1}]^T$. 对 Lyapunov 函数 $V_k = \frac{1}{2}s_{\phi k}^2$ 求关于时间的导数, 知

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= s_{\phi k}(\mathbf{c}^T \mathbf{e}_k + f_k + g_k u_k - \dot{x}_{n,d} - s_k(0)\dot{\phi}(t)) \leq \\ &s_{\phi k}(\mathbf{c}^T \mathbf{e}_k + f_k - f_d - s_k(0)\dot{\phi}(t)) + \\ &ms_{\phi k}(g_k v_k - g_k v_{dk} + g_k v_{dk} - g_d v_{dk} + \\ &g_d v_{dk} - g_d v_d) + |s_{\phi k}|mg_k \max(b_r, |b_l|) \leq \\ &|s_{\phi k}|(\|\mathbf{c}\| + \alpha_{fk})\|\mathbf{e}_k\| + s_{\phi k}s_k(0)\dot{\phi}(t) + \\ &m|s_{\phi k}|\alpha_{gk}|v_{dk}|\|\mathbf{e}_k\| + ms_{\phi k}(g_k v_k - g_k v_{dk}) + \\ &ms_{\phi k}(g_d v_{dk} - g_d v_d) + |s_{\phi k}|mg_k \max(b_r, |b_l|). \end{aligned} \quad (10)$$

上式中, v_d 为产生 $\mathbf{x}_d$ 的控制量, 满足

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,d} = x_{i+1,d}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_{n,d} = f_d + mg_d v_d. \end{cases} \quad (11)$$

注意到

$$\begin{aligned} |s_{\phi k}|mg_k \max(b_r, |b_l|) &\leq \\ m|s_{\phi k}|g_d \max(b_r, |b_l|) + \\ m|s_{\phi k}|\max(b_r, |b_l|)\alpha_{gk}\|\mathbf{e}_k\|. \end{aligned} \quad (12)$$

由式(10)与式(12)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq |s_{\phi k}|(\|\mathbf{c}\| + \alpha_{fk})\|\mathbf{e}_k\| + s_{\phi k}s_k(0)\dot{\phi}(t) + \\ &m|s_{\phi k}|\alpha_{gk}|v_{dk}|\|\mathbf{e}_k\| + ms_{\phi k}(g_k v_k - g_k v_{dk}) + \\ &ms_{\phi k}(g_d v_{dk} - g_d v_d) + |s_{\phi k}|m\theta_1 + \\ &|s_{\phi k}|m\theta_2\alpha_{gk}\|\mathbf{e}_k\|. \end{aligned} \quad (13)$$

上式中, θ_1 为 $g_d \max(b_r, |b_l|)$, $\theta_2 = \max(b_r, |b_l|)$. 至此, 设计控制器

$$\begin{aligned} v_k &= -\gamma_1 s_{\phi k} + v_{dk} - \frac{\|\mathbf{e}_k\|}{mg_{mk}}(\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|) \times \\ &\tanh(\mu(\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|)\|\mathbf{e}_k\|s_{\phi k}) - \\ &\frac{1}{mg_{mk}}|s_k(0)\dot{\phi}(t)|\tanh(\mu|s_k(0)\dot{\phi}(t)|s_{\phi k}) - \\ &\frac{\|\mathbf{e}_k\|}{g_{mk}}\alpha_{gk}|v_{dk}|\tanh(\mu\|\mathbf{e}_k\|\alpha_{gk}|v_{dk}|s_{\phi k}) - \\ &\frac{1}{g_{mk}}\boldsymbol{\theta}_k^T \boldsymbol{\phi}_{1k}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中: $\mu = (k+1)(k+2)$, $\boldsymbol{\theta}_k$ 用于估计 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2]^T$, $\boldsymbol{\phi}_{1k} = [\tanh(\mu s_{\phi k}) \ \alpha_{gk}\|\mathbf{e}_k\|\tanh(\mu\alpha_{gk}\|\mathbf{e}_k\|s_{\phi k})]^T$, 且

$$\begin{cases} v_{dk} = \text{sat}_v(\hat{v}_{dk}), \\ \hat{v}_{dk} = \text{sat}_v(\hat{v}_{dk-1}) - \gamma_2 s_{\phi k}, \quad \hat{v}_{d-1} = 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}_k = \text{sat}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \text{sat}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) + \gamma_3 \boldsymbol{\phi}_{1k} s_{\phi k}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (16)$$

本文中,对 $\text{sat}(\cdot)$ 的定义为:对于 $\hat{a} \in \mathbb{R}$,

$$\text{sat}_a(\hat{a}) \triangleq \begin{cases} (\text{sgn } \hat{a})\bar{a}, & |\hat{a}| > \bar{a}, \\ \hat{a}, & \text{其他}, \end{cases}$$

$\bar{a}$ 为对应的限幅值;对于向量 $\hat{\mathbf{a}}$, $\text{sat}_a(\hat{\mathbf{a}})$ 表示对向量 $\hat{\mathbf{a}}$ 中的各元素进行上述限幅运算.在式(15)–(16)中,选取的限幅值 $\bar{v}$ 和 $\bar{\theta}$ 要足够大,分别满足 $\bar{v} \geq |v_d|$ 和 $\bar{\theta} \geq \max(\theta_1, \theta_2)$.

本文将系统(1)的收敛性和稳定性结果总结为下述定理1.

定理1 在 $\mathbf{x}_k(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)取值任意的情况下,将控制律(14)施加于系统(1),经过足够多次迭代后,可使 $s_{\phi k}$ 在整个作业区间上收敛于零,即

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{\phi k}(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (17)$$

并保证闭环系统所有信号有界.

证 选取Lypunov泛函

$$L_{1k} = V_k + \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t m g_d \tilde{v}_{dk}^2 d\tau + \frac{1}{2\gamma_3} \int_0^t m \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k d\tau,$$

式中 $\tilde{v}_{dk} = v_{dk} - v_d$.

利用双曲函数的性质,可以推出

$$|s_{\phi k}|(\|\mathbf{c}\| + \alpha_{fk})\|\mathbf{e}_k\| - m g_k s_{\phi k} \frac{\|\mathbf{e}_k\|}{m g_{mk}} (\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|) \times \tanh(\mu(\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|)\|\mathbf{e}_k\|s_{\phi k}) \leq \frac{0.2785}{\mu}, \quad (18)$$

$$s_{\phi k} s_k(0) \dot{\phi}(t) - m g_k \frac{1}{m g_{mk}} |s_k(0) \dot{\phi}(t)| \times \tanh(\mu |s_k(0) \dot{\phi}(t)| s_{\phi k}) \leq \frac{0.2785}{\mu}, \quad (19)$$

$$m |s_{\phi k}| \alpha_{gk} |v_{dk}| \|\mathbf{e}_k\| - m g_k \frac{\|\mathbf{e}_k\|}{g_{mk}} \alpha_{gk} |v_{dk}| \times \tanh(\mu \|\mathbf{e}_k\| \alpha_{gk} |v_{dk}| s_{\phi k}) \leq \frac{0.2785}{\mu} \quad (20)$$

和

$$\begin{aligned} & |s_{\phi k}| m \theta_1 + |s_{\phi k}| m \theta_2 \alpha_{gk} \|\mathbf{e}_k\| - s_{\phi k} \frac{m g_k}{g_{mk}} \boldsymbol{\theta}_k^T \boldsymbol{\phi}_{1k} \leq \\ & |s_{\phi k}| m \theta_1 + |s_{\phi k}| m \theta_2 \alpha_{gk} \|\mathbf{e}_k\| - m s_{\phi k} \boldsymbol{\theta}_k^T \boldsymbol{\phi}_{1k} - \\ & s_{\phi k} m \theta_1 \tanh(\mu s_{\phi k}) - \\ & s_{\phi k} m \theta_2 \alpha_{gk} \|\mathbf{e}_k\| \tanh(\mu \alpha_{gk} \|\mathbf{e}_k\| s_{\phi k}) + \\ & s_{\phi k} m \theta_1 \tanh(\mu s_{\phi k}) + \\ & s_{\phi k} m \theta_2 \alpha_{gk} \|\mathbf{e}_k\| \tanh(\mu \alpha_{gk} \|\mathbf{e}_k\| s_{\phi k}) \leq \\ & m(\theta_1 + \theta_2) \frac{0.2785}{\mu} + m s_{\phi k} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\phi}_{1k}. \end{aligned} \quad (21)$$

由式(13)–(14),并结合式(18)–(21),

$$\dot{V}_k \leq -\gamma_1 g_k s_{\phi k}^2 + m s_{\phi k} g_d (v_{dk} - v_d) + m s_{\phi k} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\phi}_{1k} + \frac{0.2785(m(\theta_1 + \theta_2) + 3)}{\mu}. \quad (22)$$

于是

$$\begin{aligned} V_k & \leq \int_0^t m s_{\phi k} g_d (v_{dk} - v_d) d\tau + \\ & \int_0^t m s_{\phi k} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\phi}_{1k} d\tau + \\ & \frac{0.2785t(m(\theta_1 + \theta_2) + 3)}{\mu}. \end{aligned}$$

由此,可知当 $k > 0$ 时,

$$\begin{aligned} L_{1k} - L_{1k-1} & \leq \\ & \int_0^t m s_{\phi k} g_d (v_{dk} - v_d) d\tau + \int_0^t m s_{\phi k} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\phi}_{1k} d\tau - \\ & V_{k-1} + \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t m g_d (\tilde{v}_{dk}^2 - \tilde{v}_{dk-1}^2) d\tau + \\ & \frac{1}{2\gamma_3} \int_0^t m (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) d\tau + \\ & \frac{0.2785t(m(\theta_1 + \theta_2) + 3)}{\mu}. \end{aligned}$$

根据式(15),可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\gamma_2} (\tilde{v}_{dk} - \tilde{v}_{dk-1}^2) + s_k \tilde{v}_{dk} = \\ & \frac{1}{\gamma_2} (v_d - v_{dk}) (v_{dk-1} - v_{dk} - \gamma_2 s_k) - \\ & \frac{1}{2\gamma_2} (v_{dk} - v_{dk-1})^2 \leq \\ & \frac{1}{\gamma_2} (v_d - \text{sat}_v(\hat{v}_{dk})) (\hat{v}_{dk} - \text{sat}_v(\hat{v}_{dk})) \leq 0. \end{aligned}$$

结合上述两式,有

$$\begin{aligned} L_{1k} - L_{1k-1} & \leq \int_0^t m s_{\phi k} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\phi}_{1k} d\tau - V_{k-1} + \\ & \frac{1}{2\gamma_3} \int_0^t m (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) d\tau + \\ & \frac{0.2785t(m(\theta_1 + \theta_2) + 3)}{\mu}. \end{aligned} \quad (23)$$

根据学习律(16),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\gamma_3} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) + s_{\phi k} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\phi}_{1k} \leq \\ & \frac{1}{\gamma_3} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_k)^T (-\boldsymbol{\theta}_k + \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \gamma_3 s_{\phi k} \boldsymbol{\phi}_{1k}) = \\ & \frac{1}{\gamma_3} (\boldsymbol{\theta} - \text{sat}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k))^T (\hat{\boldsymbol{\theta}}_k - \text{sat}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k)) \leq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

由式(23)–(24),

$$L_{1k} - L_{1k-1} \leq \frac{0.2785t(m(\theta_1 + \theta_2) + 3)}{\mu} - V_{k-1}.$$

进一步地,

$$\begin{aligned} L_{1k} & \leq L_{10} + \sum_{i=1}^k \frac{0.2785t(m(\theta_1 + \theta_2) + 3)}{(i+1)(i+2)} - \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k s_{\phi i-1}^2. \end{aligned} \quad (25)$$

因为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{0.2785t(m(\theta_1 + \theta_2) + 3)}{(i+1)(i+2)} &\leq \\ 0.2785t(m(\theta_1 + \theta_2) + 3) & \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) &\leq \\ \frac{0.2785t(m(\theta_1 + \theta_2) + 3)}{2} & \end{aligned}$$

是个有界量, 同时由函数的连续性易知 L_{10} 也是有界的, 根据数列收敛的必要条件, 可以从式(25)推出 $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{\phi k}(t) = 0, t \in [0, T]$. 这蕴含着

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k(t) = 0, t \in [t_1, T].$$

由以上分析容易看出, $s_{\phi k}$ 是有界的. 由式(6)知, $|s_k| \leq |s_{\phi k}| + |s_k(0)\phi(t)|$, 因此, 根据 $s_{\phi k}$ 的有界性可以推出 s_k 也是有界的. 由 s_k 的定义可知

$$\dot{\mathbf{e}}_k = \mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{b}\dot{s}_k, \quad (26)$$

式中:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T, \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

式(26)在区间 $[0, t]$ 上的定积分为

$$\mathbf{e}_k(t) = \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{e}_k(\tau) d\tau + \mathbf{b}s_k(t),$$

对该式两边同取范数, 有

$$\|\mathbf{e}_k(t)\| \leq \int_0^t \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{e}_k(\tau)\| d\tau + |s_k(t)|.$$

根据Bellman-Gronwall引理,

$$\|\mathbf{e}_k(t)\| \leq \|\mathbf{A}\| e^{t\|\mathbf{A}\|} \int_0^t |s_k(\tau)| d\tau + |s_k(t)|. \quad (28)$$

至此, 利用不等式(28), 可知 $\mathbf{e}_k$ 是有界的, 进而可知闭环系统中的其他信号变量也有界. 证毕.

4.2 $\underline{m}$ 未知情形(Case of $\underline{m}$ unknown)

上文讨论 $\underline{m}$ 已知情形的控制设计问题, 但在一些情况下, $\underline{m}$ 不可知. 本小节考虑 $\underline{m}$ 未知情形下的控制器设计方案, 设计控制律和学习律分别为

$$\begin{aligned} v_k &= v_{dk} - \frac{1}{g_{mk}} \boldsymbol{\vartheta}_k^T \boldsymbol{\phi}_{2k} - \frac{1}{g_{mk}} \boldsymbol{\theta}_k^T \boldsymbol{\phi}_{1k} - \gamma_1 s_{\phi k} - \\ &\frac{\|\mathbf{e}_k\|}{g_{mk}} \alpha_{gk} |v_{dk}| \tanh(\mu \|\mathbf{e}_k\| \alpha_{gk} |v_{dk}| s_{\phi k}) \end{aligned} \quad (29)$$

和

$$\begin{cases} v_{dk} = \text{sat}_v(\hat{v}_{dk}), \\ \hat{v}_{dk} = \text{sat}_v(\hat{v}_{dk-1}) - \gamma_4 s_{\phi k}, \hat{v}_{d-1} = 0, \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}_k = \text{sat}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \text{sat}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) + \gamma_5 \boldsymbol{\phi}_{1k} s_{\phi k}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\vartheta}_k = \text{sat}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k), \\ \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k = \text{sat}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{k-1}) + \gamma_6 \boldsymbol{\phi}_{2k} s_{\phi k}, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{-1} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (32)$$

式(29)–(31)中, $\boldsymbol{\vartheta}_k$ 为对 $\boldsymbol{\vartheta} = [\frac{1}{m} \ \frac{1}{m}]^T$ 的估计,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_{2k} &= [\|\mathbf{e}_k\|(\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|) \tanh(\mu(\alpha_{fk} + \|\mathbf{c}\|) \|\mathbf{e}_k\| s_{\phi k}) \\ &\quad |s_k(0)\dot{\phi}(t)| \tanh(\mu |s_k(0)\dot{\phi}(t)| s_{\phi k})]^T. \end{aligned}$$

在式(30)–(32)中, 选取的限幅值 $\bar{v}$, $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\vartheta}}$ 要足够大, 分别满足

$$\bar{v} \geq |v_d|, \bar{\boldsymbol{\theta}} \geq \max(\theta_1, \theta_2), \bar{\boldsymbol{\vartheta}} \geq \frac{1}{m}.$$

定理2 在 $\mathbf{x}_k(0) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 取值任意的情况下, 将控制律(29)施加于系统(1), 足够多次迭代后, 可使 $s_{\phi k}$ 在区间 $[0, T]$ 上收敛于零, 即

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{\phi k}(t) = 0, t \in [0, T], \quad (33)$$

并保证闭环系统所有信号有界.

证 利用双曲函数的性质, 可知

$$\begin{aligned} &|s_{\phi k}|(\|\mathbf{c}\| + \alpha_{fk}) \|\mathbf{e}_k\| + s_{\phi k} s_k(0) \dot{\phi}(t) - \\ &\frac{mg_k}{g_{mk}} \boldsymbol{\vartheta}_k^T \boldsymbol{\phi}_{2k} \leq |s_{\phi k}|(\|\mathbf{c}\| + \alpha_{fk}) \|\mathbf{e}_k\| + \\ &|s_{\phi k}| |s_k(0) \dot{\phi}(t)| - s_{\phi k} m \times \boldsymbol{\vartheta}_k^T \boldsymbol{\phi}_{2k} - \\ &s_{\phi k} m \boldsymbol{\vartheta}_k^T \boldsymbol{\phi}_{2k} + s_{\phi k} m \boldsymbol{\vartheta}_k^T \boldsymbol{\phi}_{2k} = \\ &\frac{2 \times 0.2785}{\mu} + s_{\phi k} m \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_k^T \boldsymbol{\phi}_{2k}, \end{aligned} \quad (34)$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_k = \boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta}_k$. 将式(29)(34)代入式(13)后,

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq -\gamma_1 g_k s_{\phi k}^2 + m s_{\phi k} g_d (v_{dk} - v_d) + \\ &m s_{\phi k} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\phi}_{1k} + s_{\phi k} m \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_k^T \boldsymbol{\phi}_{2k} + \\ &\frac{0.2785(m(\theta_1 + \theta_2) + 3)}{\mu}. \end{aligned}$$

选取Lypunov泛函

$$\begin{aligned} L_{2k} &= V_k + \frac{1}{2\gamma_4} \int_0^t m g_d \tilde{v}_{dk}^2 d\tau + \frac{1}{2\gamma_5} \int_0^t m \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k d\tau + \\ &\frac{1}{2\gamma_6} \int_0^t m \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_k d\tau. \end{aligned} \quad (35)$$

根据以上两式, 可以推出

$$\begin{aligned} L_{2k} - L_{2k-1} &\leq \\ &\int_0^t m s_{\phi k} g_d (v_{dk} - v_d) d\tau + \int_0^t m s_{\phi k} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\phi}_{1k} d\tau + \\ &\int_0^t m s_{\phi k} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_k^T \boldsymbol{\phi}_{2k} d\tau - V_{k-1} + \frac{1}{2\gamma_4} \int_0^t m g_d (\tilde{v}_{dk}^2 - \\ &\tilde{v}_{dk-1}^2) d\tau + \frac{1}{2\gamma_5} \int_0^t m (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) d\tau + \\ &\frac{1}{2\gamma_6} \int_0^t m (\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_k - \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_{k-1}) d\tau + \\ &\frac{0.2785t(m(\theta_1 + \theta_2) + 3)}{\mu}. \end{aligned}$$

根据式(30)–(32), 分别可以推出

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\gamma_4}(\tilde{v}_{dk} - \tilde{v}_{dk-1}^2) + s_k \tilde{v}_{dk} = \\ & \frac{1}{\gamma_4}(v_d - v_{dk})(v_{dk-1} - v_{dk} - \gamma_1 s_k) - \\ & \frac{1}{2\gamma_4}(v_{dk} - v_{dk-1})^2 \leq \\ & \frac{1}{\gamma_4}(v_d - \text{sat}_v(\hat{v}_{dk}))(\hat{v}_{dk} - \text{sat}_v(\hat{v}_{dk})) \leq 0, \\ & \frac{1}{2\gamma_5}(\tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\theta}_{k-1}) + s_{\phi k} \tilde{\theta}_k^T \phi_{1k} \leq \\ & \frac{1}{\gamma_5}(\theta - \theta_k)^T(-\theta_k + \theta_{k-1} + \gamma_5 s_{\phi k} \phi_{1k}) = \\ & \frac{1}{\gamma_5}(\theta - \text{sat}_\theta(\hat{\theta}_k))^T(\hat{\theta}_k - \text{sat}_\theta(\hat{\theta}_k)) \leq 0, \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\gamma_6}(\tilde{\vartheta}_k^T \tilde{\vartheta}_k - \tilde{\vartheta}_{k-1}^T \tilde{\vartheta}_{k-1}) + s_{\phi k} \tilde{\vartheta}_k^T \phi_{2k} \leq \\ & \frac{1}{\gamma_6}(\vartheta - \vartheta_k)^T(-\vartheta_k + \vartheta_{k-1} + \gamma_6 s_{\phi k} \phi_{2k}) = \\ & \frac{1}{\gamma_6}(\vartheta - \text{sat}_\vartheta(\hat{\vartheta}_k))^T(\hat{\vartheta}_k - \text{sat}_\vartheta(\hat{\vartheta}_k)) \leq 0. \end{aligned}$$

由以上4式可得

$$L_{2k} - L_{2k-1} \leq -V_{k-1} + \frac{0.2785t(m(\theta_1 + \theta_2) + 3)}{\mu}.$$

至此, 类似于上一小节, 可以推出 $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{\phi k} = 0$, 以及闭环系统各信号的有界性. 证毕

本节分别针对 $\underline{m}$ 可知与不可知情形, 给出相应的控制设计方案. 在对死区参数 m 的取值范围有足够了解的前提下, 选用设计方案(14)和(29)都是可行的. 对比式(14)与(29), 可以看出, 后者中的被学习量个数比前者多, 系统运行时在线计算量较前者大. 在对死区参数 m 的取值范围缺乏足够了解时, 宜采用方案(29)设计控制系统. 倘若对死区参数 m 的取值范围一无所知或知之甚少, 仍根据(14)设计控制系统, 并选取一个极小的正数作为 $\underline{m}$ 以满足 $\underline{m} < m$ 这一条件, 则所设计的控制器具有较大的保守性, 其原因是式(14)的第3项和第4项中, 均有 $\underline{m}$ 位于分母处, 选择极小的 $\underline{m}$ 会导致鲁棒项过大; 而在控制方案(29)中, 采用学习方法估计 $\frac{1}{m}$, 可以避免前述保守性问题.

5 数值算例(Numerical simulation)

考虑在 $[0, T]$ 上运行的Duffing系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k}, \\ \dot{x}_{2,k} = -0.1x_{2,k} - x_{1,k}^3 + \cos t + \\ \quad (1 + 0.01x_{1,k}^2 + 0.005x_{2,k}^2)u(v_k), \end{cases}$$

式中: $u(v_k)$ 为死区非线性的输出, 该死区的参数 $b_r = 0.5$, $b_l = -0.6$, $m_r = 1.2$, $m_l = 1.2$, 但以上参数的真

值未知. 视 $-0.1x_{2,k} - x_{1,k}^3 + \cos t$ 和 $1 + 0.01x_{1,k}^2 + 0.005x_{2,k}^2$ 分别为不确定性 $f(\mathbf{x}_k, t)$ 和 $g(\mathbf{x}_k, t)$. 系统初态为 $x_{1,k}(0) = 0.3 + 0.1r_1$, $x_{2,k}(0) = 0.01r_2$, r_1 与 r_2 均为0与1之间的随机数. 拟采用迭代学习控制方法设计控制器, 实现 $[x_{1,k}, x_{2,k}]$ 对参考信号 $[0.5 \cos(2\pi t) - \pi \sin(2\pi t)]^T$ 进行精确跟踪. 鉴于 $[x_{1,k}(0) \ x_{2,k}(0)]^T \neq [0.5 \ 0]^T$, 此处采用本文所提方法设计控制系统, 按照式(6)(8)(9)构造修正参考信号. $t_1 = 0.5$, $T = 3$. 选取 $g_{mk} = 1$,

$$\alpha_{fk} = 0.1 + |x_{1,d}^2 + x_{1,k}^2 + x_{1,d}x_{1,k}|,$$

$$\alpha_{gk} = 0.01|x_{1,d} + x_{1,k}| + 0.005|x_{2,d} + x_{2,k}|,$$

容易检验, 它们满足本文的假设. 采用控制律(29)及相应学习律进行仿真, 仿真参数为 $\gamma_1 = 10$, $\gamma_4 = 15$, $\gamma_5 = \gamma_6 = 0.08$, $\bar{v} = 80$, $\bar{\theta} = 30$, $\bar{\vartheta} = 5$. 迭代40次后, 仿真结果如图1–8所示. 图1–2是第40次迭代时的系统状态情况. 图3–6分别是第40次迭代过程中的状态误差、滤波误差和修正滤波误差情况. 可以看出, 经过足够多次迭代后, 可实现 s_k 在 $[t_1, T]$ 上的取值为零, $s_{\phi k}$ 在 $[0, T]$ 上的取值为零. 图7是修正滤波误差随迭代次数的收敛过程, 在该图中, $J_k \triangleq \max_{t \in [0, T]} |s_{\phi k}(t)|$. 图8是第40次迭代过程中的控制输入情况.

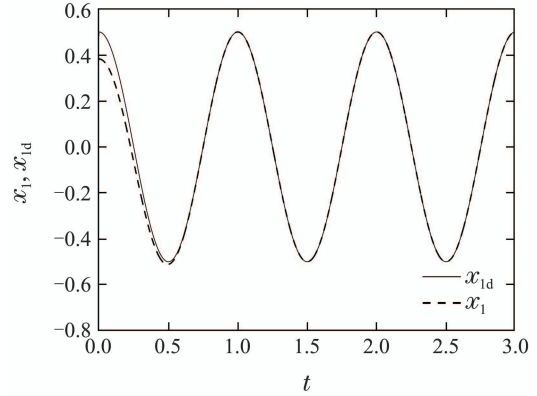


图1 状态 x_1 及其参考轨迹 x_{1d}

Fig. 1 State x_1 and the reference trajectory x_{1d}

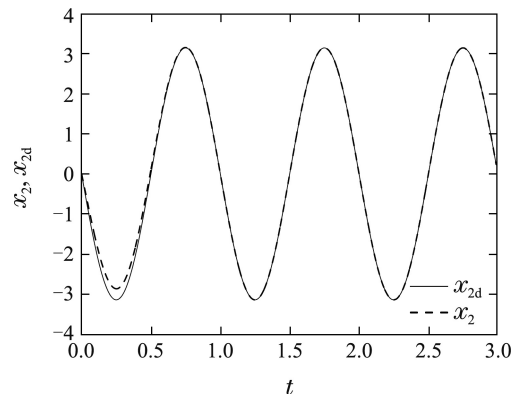
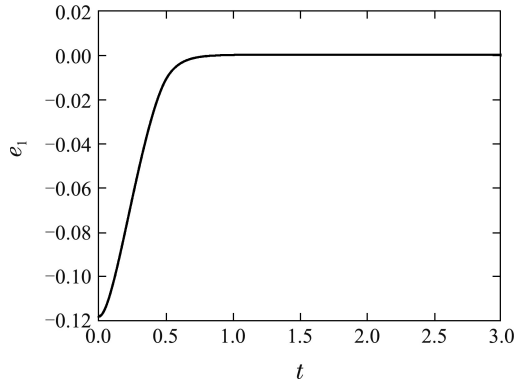
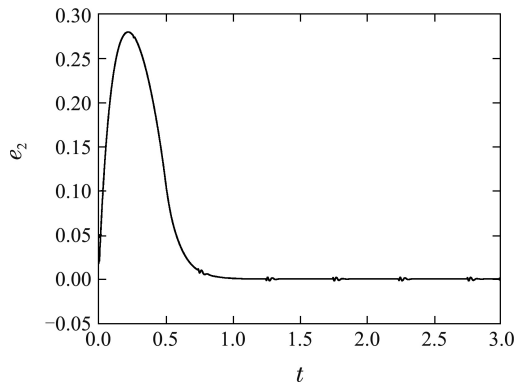
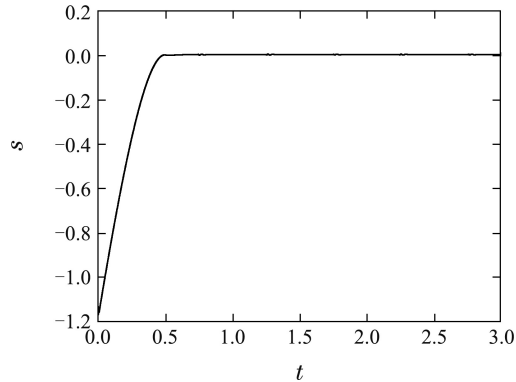
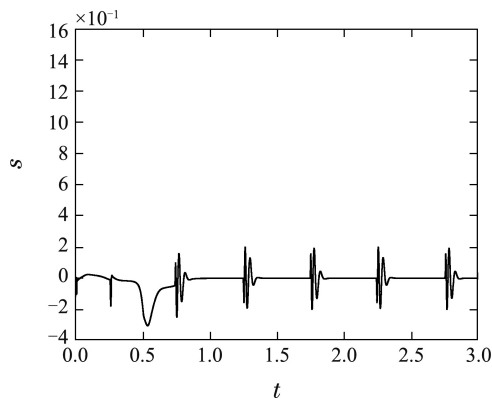
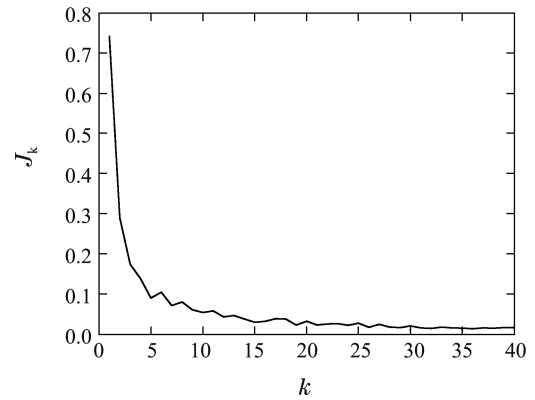
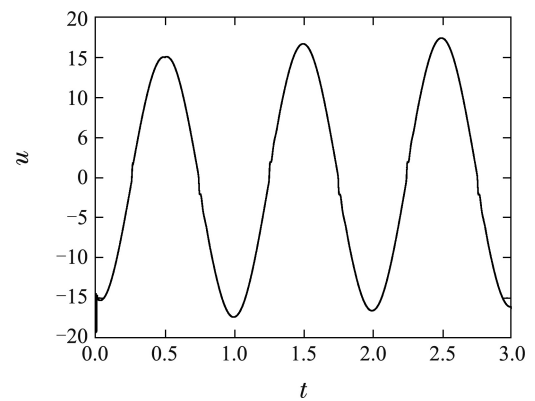


图2 状态 x_2 及其参考轨迹 x_{2d}

Fig. 2 State x_2 and the reference trajectory x_{2d}

图 3 误差 e_1 Fig. 3 The error e_1 图 4 误差 e_2 Fig. 4 The error e_2 图 5 滤波误差 s Fig. 5 The filtering error s 图 6 修正滤波误差 s_ϕ Fig. 6 The rectified filtering-error s_ϕ 图 7 $|s_{\phi k}|$ 随迭代次数变化的情况Fig. 7 The variable $|s_{\phi k}|$ with respect to iteration图 8 控制输入 u Fig. 8 The input u

本例表明, 利用本文提出的滤波误差初始修正学习控制设计方法, 可以解决含输入死区非参数不确定系统的初值问题, 实现初态误差非零情形下的部分作业区间精确跟踪。

6 结论(Conclusions)

本文针对输入环节含死区非线性特性的非参数不确定系统, 分别针对死区斜率下界已知/未知两种情形, 给出相应的滤波误差初始修正学习控制设计方案. 该算法采用鲁棒学习策略处理非参数不确定性和死区非线性特性. 在任意系统初态情形下, 两种设计方案均可实现滤波误差在预设的作业区间上收敛于零. 方案一适用于死区斜率下界已知情形, 方案二在死区斜率下界已知及未知情形下均适用, 但在线计算量比方案一大。

参考文献(References):

- [1] TSANG K M, LI G M. Robust nonlinear nominal-model following control to overcome deadzone nonlinearities [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2001, 48(1): 177 – 184.
- [2] RECKER D A, KOKOTOVIC P V, RHODE D, et al. Adaptive nonlinear control of systems containing a deadzone [C] // *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. Brighton, England: IEEE, 1991: 2111 – 2115.

- [3] TAO G, KOKOTOVIC P V. Adaptive control of plants with unknown dead-zones [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(1): 59 – 68.
- [4] ZHOU J, WEN C, ZHANG Y. Adaptive output control of nonlinear systems with uncertain dead-zone nonlinearity [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 504 – 511.
- [5] SELMIC R R, LEWIS F L. Deadzone compensation in motion control systems using neural networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(4): 602 – 613.
- [6] LEWIS F L, TIM W K, WANG L Z, et al. Dead-zone compensation in motion control systems using adaptive fuzzy logic control [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999, 7(6): 731 – 742.
- [7] WANG X S, SU C Y, HONG H. Robust adaptive control of a class of linear systems with unknown dead-zone [J]. *Automatica*, 2004, 40(3): 407 – 413.
- [8] IBRIR S, XIE W F, SU C Y. Adaptive tracking of nonlinear systems with non-symmetric dead-zone input [J]. *Automatica*, 2007, 43(3): 522 – 530.
- [9] HUA C C, WANG Q G, GUAN X P. Adaptive tracking controller design of nonlinear systems with time delays and unknown dead-zone input [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(7): 1753 – 1759.
- [10] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robotics by learning [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 12(2): 123 – 140.
- [11] DAI Xisheng, GUO Yajun, TIAN Senping, et al. Iterative learning control of nonlinear parabolic partial difference systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(12): 1607 – 1612.
(戴喜生, 郭亚君, 田森平, 等. 非线性抛物型偏差分系统迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(12): 1607 – 1612.)
- [12] LIU Shan, LIU Jie. Extended Laguerre basis function based iterative learning control for non-minimum phase systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 985 – 992.
(刘山, 刘杰. 非最小相位系统的扩展Laguerre基函数迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 985 – 992.)
- [13] CHI Ronghu, HOU Zhongsheng, WANG Danwei, et al. An optimal terminal iterative learning control approach for nonlinear discrete-time systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1025 – 1030.
(池荣虎, 侯忠生, 王郸维, 等. 非线性离散时间系统的最优终端迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 1025 – 1030.)
- [14] LÜ Qing, FANG Yongchun, REN Xiao. Anti-disturbance iterative learning control for nonlinear systems with time-iteration-varying disturbances [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(9): 1190 – 1197.
(吕庆, 方勇纯, 任逍. 含非严格重复扰动的抗扰迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(9): 1190 – 1197.)
- [15] FRENCH M, ROGERS E. Nonlinear iterative learning by an adaptive Lyapunov technique [J]. *International Journal of Control*, 2000 73(10): 840 – 850.
- [16] XU J X, TAN Y. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1940 – 1945.
- [17] SUN M X, YAN Q Z. Error tracking of iterative learning control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 251 – 262.
- [18] YIN C K, XU J X, HOU Z S. A high-order internal model based learning control scheme for nonlinear systems with time-iteration-varying parameters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(11): 2665 – 2670.
- [19] SUN Yunping, LI Junmin, LI Jing. Adaptive repetitive learning control for a class of nonlinearly parameterized uncertain systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(2): 228 – 232.
(孙云平, 李俊民, 李靖. 一类非线性参数化系统自适应重复学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(2): 228 – 232.)
- [20] HAM C, QU Z H. A new learning control based on the Lyapunov direct method [C] // *Proceedings of Southcon '94 Conference Record*. Orlando: IEEE, 1994: 121 – 125.
- [21] YAN Qiuzhen, SUN Mingxuan. Suboptimal learning control for nonlinear systems with both parametric and nonparametric uncertainties [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(9): 1659 – 1668.
(严求真, 孙明轩. 非线性不确定系统准最优学习控制 [J]. 自动化学报, 2015, 41(9): 1659 – 1668.)
- [22] LIUZZO S, MARINO R, TOMEI P. Adaptive learning control of nonlinear systems by output error feedback [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(7): 1232 – 1248.
- [23] XU J X, RUI Y. On initial conditions in iterative learning control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(9): 1349 – 1354.
- [24] RUAN Xiaoe, ZHAO Jianyong. Pulse compensated iterative learning control to nonlinear systems with initial state uncertainty [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 993 – 1000.
(阮小娥, 赵建永. 具有初始状态不确定性的非线性系统脉冲补偿迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 993 – 1000.)
- [25] CHIEN C J, HSU C T, YAO C Y. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, 12(5): 724 – 732.
- [26] YAN Qiuzhen, SUN Mingxuan. Error-tracking iterative learning control with state constrained for nonparametric uncertain systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(7): 895 – 901.
(严求真, 孙明轩. 非参数不确定系统状态受限误差跟踪学习控制方法 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(7): 895 – 901.)
- [27] SUN Mingxuan, HUANG Baojian. *Iterative Learning Control* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1999.
(孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.)
- [28] LI Xiangyang. Iterative learning control for a class of nonlinear time-varying system [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(8): 1087 – 1093.
(李向阳. 一类非线性时变系统的迭代学习控制. 控制理论与应用 [J]. 2014, 31(8): 1087 – 1093.)
- [29] LI X D, LV M M, HO J K L. Adaptive ILC algorithms of nonlinear continuous systems with non-parametric uncertainties for non-repetitive trajectory tracking [J]. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(10): 2279 – 2289.

作者简介:

严求真 (1972–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: zjyqz@126.com;

孙明轩 (1961–), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为学习控制理论与应用, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn;

蔡建平 (1975–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为自适应控制, E-mail: caijianping2001@hotmail.com.