

一类不确定运动系统的空间迭代学习控制

刘娇龙¹, 董新民^{1†}, 薛建平¹, 王海涛²

(1. 空军工程大学 航空航天工程学院, 陕西 西安 710038; 2. 哈尔滨飞行学院, 黑龙江 哈尔滨 150000)

摘要: 本文讨论了一类在有限空间区间内重复运行的不确定运动系统的跟踪控制问题. 通过引入空间状态微分算子和空间复合能量函数, 提出了一种空间周期的自适应迭代学习控制算法. 首先利用空间状态微分算子, 将系统从时间域转化到空间域形式. 然后基于空间复合能量函数设计了控制器, 利用含限幅作用的参数自适应律逼近系统中的不确定性, 同时引入鲁棒项共同抑制非参数不确定性的影响. 通过严格的数学分析, 证明了在标准初始条件和随机有界初始误差两种情况下的跟踪误差收敛性. 最后通过列车仿真进一步验证了该算法的有效性.

关键词: 迭代学习控制; 空间运动系统; 复合能量函数; 系统不确定性; 初始状态误差

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Spatial iterative learning control for a class of uncertain motion systems

LIU Jiao-long¹, DONG Xin-min^{1†}, XUE Jian-ping¹, WANG Hai-tao²

(1. School of Aeronautics and Astronautics Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi 710038, China;

2. Air Force Harbin Flight Academy, Harbin Heilongjiang 150000, China)

Abstract: In this paper, the tracking control problem for a class of uncertain motion systems which are iteratively running in the spatial domain is discussed. By introducing a spatial state differentiator operator and spatial composite energy function, a spatial period adaptive iterative learning control algorithm is proposed. First, the spatial state differentiator is utilized to transform the motion systems from the time formulation to the spatial formulation. Then, the controller is designed based on the spatial composite energy function. The system uncertainties are learned by the adapting law with projection operator, and an additional robust item is introduced to work concurrently with the learning mechanism to tackle the non-parametric uncertainties. With rigorous mathematical analysis, the convergence properties of tracking error are derived under the identical initial condition and random initial condition within a bound. Finally, a numerical example of a train tracking control is further provided to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: iterative learning control; spatial motion systems; composite energy function; system uncertainties; initial state error

1 引言(Introduction)

当系统在有限时间区间内重复进行同一种操作时, 迭代学习控制(iterative learning control, ILC)是一种适用的控制技术. 迭代学习控制通过重复运行不断修正控制输入, 对各种与迭代次数无关的干扰信号形成完全抑制作用, 使得系统输出在不断迭代过程中逐渐实现对期望轨迹的完全跟踪. 由于结构简单, 对模型精度要求低等特点, 它受到越来越多的关注与应用^[1-5]. 经典的迭代学习控制基于压缩映射原理, 着力于解决非线性系统的轨迹跟踪问题. 然而, 经典迭代学习控制局限于全局Lipschitz连续的动力学系统, 令它的适用范围大打折扣. 同时, 基于压缩映射原理

的经典迭代学习控制也很难和现有基于Lyapunov的控制方法相融合, 使得其与当今控制理论格格不入. 为了解决这些限制, 基于复合能量函数(composite energy function, CEF)的新迭代学习控制被提出^[6]. 复合能量函数本质上是一种Lyapunov-like函数, 它的提出和应用, 使得迭代学习控制能很好的与鲁棒控制、自适应控制等方法相结合. 同时, 由于在控制器设计时引入动力系统的局部Lipschitz项, 迭代学习控制突破了动力学系统必须是全局Lipschitz连续的约束. 在CEF理论框架下, 具有参数不确定性^[6]、非参数不确定性^[7-8]、输入不确定性^[9]以及状态或输出受限^[10]等系统的学习控制问题得到有效解决.

收稿日期: 2016-04-04; 录用日期: 2016-11-16.

[†]通信作者. E-mail: dongxinmin@139.com; Tel.: +86 29-84787400.

本文责任编辑: 徐胜元.

国家自然科学基金项目(61473307, 61304120)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61473307, 61304120).

现有的迭代学习控制普遍基于系统在时间域上重复这一前提,即系统反复的在时间区间 $[0, T]$ 内执行跟踪任务.因此,系统的状态、内部不确定性、外部干扰,都在时间域 $[0, T]$ 上具有重复性.然而,在很多实际的系统中,系统的这种重复性/周期性并不存在于时间区间,而存在于空间区间.例如,火车或地铁总是反复的从A站开往B站,系统在每次任务过程中经过的空间位置相同,但经历的时间却不一定相等.另外,有很多运动系统不确定性或外部干扰都是空间位置或系统状态的函数,而非时间的函数.文献[11]中,卫星所受到的外部干扰被建模成空间位置的函数.文献[12]在研究火车所受空气阻力时指出,火车经过隧道时受到阻力主要来自车头所受的压力,而压力是火车位置和速度的函数.文献[13–14]研究了空中加油对接控制,受油机在接近加油机并不断尝试对接的过程,可以视为其相对加油机在空间域上做重复的运动;另外,受油机所受的尾流气动影响,显然是受油机与加油机相对位置的函数.这些运动都具有一个共同的性质,即空间坐标上具有重复特性,而系统的不确定性或干扰都是空间位置和状态的函数.如何将已有基于时间的迭代学习控制,拓展到基于空间的迭代学习控制,使该理论能够适用于诸如上述的更多的实际系统,无疑具有很大的理论价值和实际应用意义.

近年来,基于空间周期的学习控制受到越来越多的关注.文献[15]基于运动系统空间位置,研究了初始状态控制终端状态的迭代学习算法.文献[16]研究了三维抛射运动的迭代学习控制.抛射体的终端状态根据空间位置来定义,并在空间域上提出了迭代学习算法.文献[17–19]在研究电机转速控制时,对于系统中基于位置或速度的未知干扰,采用状态周期重复学习控制进行自适应补偿.文献[20]研究了旋转机械系统在具有基于位置的单周期、多周期干扰时,如何利用空间周期自适应学习控制进行转速控制.文中的系统周期体现在空间域上,收敛性分析也基于空间域进行.文献[21]研究了汽车二维运动的空间学习算法.文中的期望轨迹在 y 轴具有周期性,而学习控制算法根据上一周期空间坐标下的误差来更新下一周期对应坐标处的控制输入,最终达到完美跟踪性能.

现有的空间学习控制研究,主要是在重复学习控制框架下,对系统中基于空间位置的参数型不确定性进行学习补偿.然而,对于在空间域 $[0, s_p]$ 上迭代运行的实际运动系统,如何充分利用空间周期特性进行空间迭代学习控制,还鲜有报道.基于此,本文考虑在空间区间 $[0, s_p]$ 上重复执行同一操作的运动系统,提出了基于复合能量函数的空间迭代学习控制算法.通过严格的理论证明和实际的列车运行算例证明了算法的有效性.文章的主要创新点及工作在于:1)引入空间状态微分算子变换,提出空间域形式的复合能量函数,将已有的时间周期迭代学习控制拓展到空间周期

迭代学习控制;2)解决了基于空间位置的参数型不确定性以及基于空间位置和运动速度的非参数不确定性的学习抑制问题;3)证明了所提出的控制律能够有效应对初始状态存在随机误差的情况.

本文组织结构如下:第2节详细阐述了本文所研究系统的基本定义、需要的合理假设以及收敛性分析所需的相关引理;第3节给出了空间迭代学习控制算法,并对系统参数的有界性和控制误差的收敛性进行了数学证明;第4节给出了实际验证例子;第5节总结了全文工作.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下运动系统:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i, \\ \frac{dv_i}{dt} = \theta^T(x_i)\xi(v_i, x_i) + b(v_i, x_i) + u_i(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $i \in \mathbb{N}^+$ 为迭代次数, x_i 和 v_i 分别代表系统位置和速度.在每次迭代过程, $x_i \in [0, s_p]$, s_p 是系统在终点处的空间位移. $\theta^T(x_i)\xi(v_i, x_i)$ 是系统中的参数化不确定性部分,其中: $\theta(x_i) \in \mathbb{R}^m$ 是未知的与系统位置相关的连续向量函数, $\xi(v_i, x_i) \in \mathbb{R}^m$ 是已知的基于系统状态的连续向量函数. $b(v_i, x_i) \in \mathbb{R}$ 是系统中的非参数化不确定性部分,满足局部Lipschitz连续,即 $|b(v_i, x) - b(v_d, x)| \leq \beta(x, v_i, v_d)|v_i - v_d|, \forall v_i, v_d \in \mathbb{R}^+$,其中 $\beta(x, v_i, v_d)$ 为已知的非负连续函数. $u_i(t)$ 是系统的输入, $u_i(t) > 0$ 时表示加速,而 $u_i(t) < 0$ 时表示制动.

为了便于阐述本文提出的基于空间的迭代学习控制算法,首先给出如下假设和定义.

假设 1 运动系统速度在整个运行过程中朝一个方向前进,且速度 $v > 0$.

注 1 实际上,很多系统正常运行时都满足此假设.如启动后的火车、地铁,定直平飞的飞机,绕地球轨道旋转的卫星等等.当运动系统在启动和停止时,可以选择在速度接近0时切换到其他控制器上.

定义 1 系统的运行总距离,即空间状态 s 定义如下:

$$s = \int_0^t \frac{dx}{d\tau} d\tau = \int_0^t |v(\tau)| d\tau = \int_0^t v(\tau) d\tau. \quad (2)$$

注 2 根据假设1和定义1可知, s 随着时间 t 增加而单调递增,两者具有双射关系, $s = f(t)$ 存在反函数 $t = f^{-1}(s)$.又有 $x(0) = 0$,所以 $s = x$.因此, $v(t)$ 可以表示为关于 s 的函数 $v(f^{-1}(s))$,同时系统(1)中的参数都能以 s 为自变量进行描述.下文,将以 s 代替系统每次迭代过程中的空间位置 x_i .

定义 2 考虑运动系统在空间状态 s 域重复运行,即每次迭代中 $s \in [0, s_p]$. s_p 为系统每次运动的总路程,定义如下:

$$s_p = \int_0^{T_i} v_i(\tau) d\tau, \quad (3)$$

其中 T_i 为系统第 i 次运行过程中, 从位置0运动到 s_p 所用的总时间.

注3 需要注意的是, 本文所考虑的 T_i 可能是迭代变化的. 系统的周期性存在于空间状态 s 域, 而非时间 t 域. 为了充分利用系统在空间上的周期性, 抑制基于空间状态 s 与速度 v 的不确定性干扰, 采用空间状态微分算子将系统(1)变化为基于 s 的空间形式.

定义3 定义关于空间状态的微分算子如下:

$$\nabla \triangleq \frac{d}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d}{dt}. \quad (4)$$

基于以上假设和定义, 利用微分算子(4)可将系统(1)转化为基于空间状态 s 的微分形式:

$$\begin{aligned} \nabla v_i &= \frac{1}{v_i(s)} (\theta^T(s) \xi(v_i, s) + b(v_i, s) + u_i(s)), \\ s &\in [0, s_p]. \end{aligned} \quad (5)$$

期望跟踪信号为

$$\begin{cases} \frac{dx_d}{dt} = v_d, \\ \frac{dv_d}{dt} = h_d(v_d, x_d), \end{cases} \quad (6)$$

其中 $h(v_d, x_d)$ 是关于速度 v 和位置 x 的光滑连续函数.

同样的, 利用算子 ∇ 可以得到期望跟踪信号的空间域表达式

$$\nabla v_d = \frac{h_d}{v_d}. \quad (7)$$

对应地, $v_d(s)$ 可通过 ∇v_d 在 s 域积分而得. 此时, 系统变量转化为空间域上的速度 $v(s)$, 对应的跟踪误差定义在空间 s 域上

$$e_{v,i}(s) = v_i(s) - v_d(s). \quad (8)$$

考虑到系统从速度为0开始启动时采用其他控制律可能带来初始跟踪误差, 因此当 $s = 0$ 时, 考虑两种初始位置误差情况: 一是 $e_{v,i}(0) = 0$, 即满足标准初始条件; 二是 $e_{v,i}(0) = \text{rand}(i) \cdot C$, 其中: $\text{rand}(i) \in [-1, 1]$, C 是误差界限, 即初始误差在有界范围内随机变化.

为了方便下文的控制律设计与收敛性证明, 给出以下引理.

引理1^[22]

$$(\theta_j - \hat{\theta}_j)^2 \geq (\theta_j - P_\theta(\hat{\theta}_j))^2, \quad (9)$$

其中: $\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_j(s)$ 表示对第 j 个参数 θ_j 的估计值; $P_\theta(\hat{\theta}_j)$ 表示 $\hat{\theta}_j$ 的限幅函数, 定义如下:

$$P_\theta(\hat{\theta}_j) \triangleq \begin{cases} \hat{\theta}_j, & |\hat{\theta}_j| \leq \theta_j^*, \\ \text{sgn}(\hat{\theta}_j) \theta_j^*, & |\hat{\theta}_j| > \theta_j^*, \end{cases} \quad (10)$$

其中: $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数, θ_j^* 为 $\hat{\theta}_j$ 的上限值. 进一步, 对

于向量 $\theta \in \mathbb{R}^m$, 有

$$(\theta - \hat{\theta}_i)^T \Gamma (\theta - \hat{\theta}_i) \geq (\theta - P_\theta(\hat{\theta}_i))^T \Gamma (\theta - P_\theta(\hat{\theta}_i)), \quad (11)$$

其中: $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为对角元素皆大于0的对角矩阵, $\hat{\theta}_i$ 是 θ 的估计值.

引理2^[7] 对于向量 a, b, c 和矩阵 D , 下式成立:

$$\begin{aligned} (a - b)^T D (a - b) - (a - c)^T D (a - c) = \\ [2(a - b) + (b - c)]^T D (c - b). \end{aligned} \quad (12)$$

特别地, 对于标量 a, b, c , 上式可以表示为

$$\begin{aligned} (a - b)^2 - (a - c)^2 = \\ [2(a - b) + (b - c)] (c - b). \end{aligned} \quad (13)$$

在下文中, 将使用到关于误差的 L^2 范数, 定义为 $\|e_{v,i}\|_{s_p} \triangleq (\int_0^{s_p} (e_{v,i}/v_i)^2 ds)^{1/2}$. 控制律设计和收敛性分析都在 s 域进行. 为了简化表示, s 将在不易产生混淆的情况下省略掉.

3 主要结果(Main results)

本节针对在空间域 $[0, s_p]$ 内重复执行跟踪任务的运动系统(1), 设计空间迭代学习控制律, 使得当 $i \rightarrow \infty$ 时, 系统输出在空间 s 域内完全跟踪期望轨迹. 在空间 s 域设计学习控制算法为

$$u_i = -\hat{\theta}_i \xi_i - \hat{b}_i + v_i \frac{h_d}{v_d} - K_1 \frac{e_{v,i}}{v_i} - \beta_i e_{v,i}, \quad (14)$$

$$\hat{\theta}_i = P_\theta(\hat{\theta}_{i-1}) + \Gamma \frac{e_{v,i}}{v_i} \xi_i, \quad \hat{\theta}_0 = 0, \quad (15)$$

$$\hat{b}_i = P_b(\hat{b}_{i-1}) + K_2 \frac{e_{v,i}}{v_i}, \quad \hat{b}_0 = 0, \quad (16)$$

其中: K_1 为正的反馈增益系数; K_2 为正的参数学习系数; $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ 是表示学习增益系数的对角矩阵, $\gamma_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, m$; $\hat{\theta}_i \triangleq \hat{\theta}_i(s)$ 和 $\hat{b}_i \triangleq \hat{b}_i(s)$ 分别是在空间位置 s 处对参数 $\theta(s)$ 和 $b(v_i, s)$ 的第 i 次估计值; $u_i \triangleq u_i(s)$, $e_{v,i} \triangleq e_{v,i}(s)$, $v_i \triangleq v_i(s)$, $\xi_i \triangleq \xi(v_i, s)$, $\frac{h_d}{v_d} \triangleq \frac{h_d}{v_d}(s)$, $\beta_i \triangleq \beta(s, v_i, v_d)$. 如引理1, P_θ 和 P_b 代表限幅函数, 对 P_θ 有

$$P_\theta(\hat{\theta}) = [P_\theta(\hat{\theta}_1) \ P_\theta(\hat{\theta}_2) \ \dots \ P_\theta(\hat{\theta}_m)]^T. \quad (17)$$

注4 由假设1可知 $v > 0$, 因此控制律(14)–(16)中包含了 v_i 的倒数是可行的. 另外, 本文考虑期望速度 $v_d(s) > 0$. 当控制过程出现较大误差而导致速度 v_i 减小至趋于0时, 控制律中的 $e_{v,i}/v_i$ 项为负且幅值迅速增大. 由式(14)各组成项可知, 这将使控制量 u_i 迅速增大, 使运动系统速度 v_i 增加而远离零点.

注5 从式(33)可以看出, 限幅函数的引入能够保证任意次迭代过程中系统所有变量的有界性. 对于限幅函数的上界值, 可通过多种方法进行估计. 首先, 可以通过以往的控制经验进行估计; 其次, 在实际系统中, 不确定性或外部干扰总是有界的, 可以通过硬件的约束或者简单的建模来获取这个

界限;最后,可以通过选择足够大的数值来作为上界值,而这并不会影响控制器的性能。

注6 在控制律(14)的设计中,采用因果的学习律对参数不确定性和非参数不确定性分别进行估计.对于不确定参数 θ ,由于已知部分系统信息 ξ ,因此可以充分利用已知信息进行参数自适应律(15)的设计;而对于非参数不确定性 b ,由于系统信息完全未知,因此在参数自适应律(16)的基础上,必须额外引入一个鲁棒控制项 $\beta_i e_{v,i}$.

定理1 在假设1和控制律(14)作用下,运动系统(1)具有如下性质:

性质1 当初始误差 $e_{v,i}(0) = 0$ 时,系统所有变量在状态域 $[0, s_p]$ 内有界,系统在整个空间区间 $[0, s_p]$ 上,有 $e_{v,i}(s) \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$.

性质2 当初始误差 $e_{v,i}(0) = \text{rand}(i) \cdot C$,系统所有变量在状态域 $[0, s_p]$ 内有界.同时,存在 $\{e_{v,i}\}$ 的子集 $\{e_{v,i_j}\}$,对于任意 $\delta > 0$,当 $i_j \rightarrow \infty$ 时,有 $\|e_{v,i}\|_{s_p} \leq \varepsilon$.其中 $\varepsilon = \sqrt{(C^2 + \delta)/2K_1}$.

注7 在随机初始误差的情况下,迭代学习控制无法获得渐近收敛的控制性能.性质2指出,随着迭代次数增加,跟踪误差的 L^2 范数在绝大多数情况下小于界限 ε ,仅在有限次数下会超出这个界限.从下文的证明中可以得出,误差限 ε 与初始误差界限 C 成正比,与反馈增益 K_1 成反比.这表明反馈系数越大,对于抑制初始随机误差有更好的效果.但在实际过程中 K_1 的选择也受到物理性能的约束.

证 为了分析控制律的收敛性能,设计基于空间 s 域的复合能量函数

$$E_i(s) = \frac{1}{2} e_{v,i}^2(s) + \frac{1}{2} \int_0^s \tilde{\theta}_i^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_i d\tau + \frac{1}{2K_2} \int_0^s \tilde{b}_i^2 d\tau, \quad (18)$$

其中: $\tilde{\theta}_i \triangleq \theta(s) - \hat{\theta}_i(s)$ 是参数不确定项的估计误差, $\tilde{b}_i = b_d - \hat{b}_i$ 是非参数不确定项的估计值 $\hat{b}(v_i, s)$ 与期望值 $b_d = b(v_d, s)$ 的误差.这里,将式(18)中CEF右边3项分别表示为 $E_i^1(s) = (1/2)e_{v,i}^2(s)$, $E_i^2(s) = 1/2 \int_0^s \tilde{\theta}_i^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_i d\tau$, $E_i^3(s) = (1/2K_2) \int_0^s \tilde{b}_i^2 d\tau$.

本文的收敛性分析将在空间域 s 进行,并借鉴基于时间复合能量函数的收敛性证明思路.首先,给出CEF在空间域上的迭代差分形式并推导其递减特性;然后,证明CEF的有界性;最后,得出在两种初始误差情况下的跟踪误差收敛性能.

1) CEF差分.

考虑相邻两次迭代过程的CEF差分:

$$\begin{aligned} \Delta E_i(s) &= E_i(s) - E_{i-1}(s) = \\ &= \frac{1}{2} e_{v,i}^2(s) - \frac{1}{2} e_{v,i-1}^2(s) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^s \tilde{\theta}_i^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_i d\tau - \frac{1}{2} \int_0^s \tilde{\theta}_{i-1}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{i-1} d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2K_2} \int_0^s \tilde{b}_i^2 d\tau - \frac{1}{2K_2} \int_0^s \tilde{b}_{i-1}^2 d\tau = \\ &= \Delta E_i^1(s) + \Delta E_i^2(s) + \Delta E_i^3(s). \end{aligned} \quad (19)$$

对于 $\Delta E_i^1(s)$,有

$$\begin{aligned} \Delta E_i^1(s) &= \frac{1}{2} e_{v,i}^2(s) - \frac{1}{2} e_{v,i-1}^2(s) = \\ &= \int_0^s e_{v,i}(\tau) \nabla e_{v,i}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} e_{v,i}^2(0) - \frac{1}{2} e_{v,i-1}^2(s), \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\nabla e_{v,i}$ 是 $e_{v,i}$ 关于状态 s 的导数,代入式(5)和式(7),可表示为

$$\begin{aligned} \nabla e_{v,i} &= \nabla(v_i - v_d) = \\ \nabla v_i - \nabla v_d &= \\ \frac{1}{v_i} (\theta^T \xi_i + b_i + u_i) - \frac{h_d}{v_d}. \end{aligned} \quad (21)$$

代入控制律(14),可进一步得到

$$\begin{aligned} \nabla e_{v,i} &= \\ \frac{1}{v_i} (\theta^T \xi_i + b_i - \hat{\theta}_i^T \xi_i - \hat{b}_i + v_i \frac{h_d}{v_d} - \\ K_1 \frac{e_{v,i}}{v_i} - \beta_i e_{v,i}) - \frac{h_d}{v_d} &= \\ \frac{\tilde{\theta}_i^T \xi_i}{v_i} + \frac{b_i - b_d + b_d - \hat{b}_i}{v_i} - K_1 \frac{e_{v,i}}{v_i^2} - \frac{\beta_i e_{v,i}}{v_i} &= \\ \frac{\tilde{\theta}_i^T \xi_i}{v_i} + \frac{b_i - b_d}{v_i} + \frac{\tilde{b}_i}{v_i} - K_1 \frac{e_{v,i}}{v_i^2} - \frac{\beta_i e_{v,i}}{v_i}. \end{aligned} \quad (22)$$

结合式(20)–(22),可得到 ΔE_i^1 的表达式为

$$\begin{aligned} \Delta E_i^1(s) &= \\ \int_0^s e_{v,i} \nabla e_{v,i} d\tau + \frac{1}{2} e_{v,i}^2(0) - \frac{1}{2} e_{v,i-1}^2(s) &= \\ \int_0^s e_{v,i} \left(\frac{\tilde{\theta}_i^T \xi_i}{v_i} + \frac{b_i - b_d}{v_i} + \frac{\tilde{b}_i}{v_i} - K_1 \frac{e_{v,i}}{v_i^2} - \frac{\beta_i e_{v,i}}{v_i} \right) d\tau + \frac{1}{2} e_{v,i}^2(0) - \frac{1}{2} e_{v,i-1}^2(s) &= \\ \int_0^s \frac{\tilde{\theta}_i^T \xi_i e_{v,i}}{v_i} d\tau + \int_0^s \frac{(b_i - b_d) e_{v,i}}{v_i} d\tau + \\ \int_0^s \frac{\tilde{b}_i e_{v,i}}{v_i} d\tau - K_1 \int_0^s \frac{e_{v,i}^2}{v_i^2} d\tau - \\ \int_0^s \frac{\beta_i e_{v,i}^2}{v_i} + \frac{1}{2} e_{v,i}^2(0) - \frac{1}{2} e_{v,i-1}^2(s). \end{aligned} \quad (23)$$

根据假设1,以及未知项 $b(v_i, x_i)$ 满足局部Lipschitz连续,有

$$\begin{aligned} \frac{(b_i - b_d) e_{v,i}}{v_i} &\leq \\ \left| \frac{(b_i - b_d) e_{v,i}}{v_i} \right| &= \frac{|b_i - b_d| \cdot |e_{v,i}|}{v_i} \leq \end{aligned}$$

$$\frac{\beta_i |v_i - v_d| \cdot |e_{v,i}|}{v_i} = \frac{\beta_i e_{v,i}^2}{v_i}. \quad (24)$$

将式(24)代入式(23), 可得

$$\begin{aligned} \Delta E_i^1(s) \leq & \int_0^s \frac{\tilde{\theta}_i^T \xi_i e_{v,i}}{v_i} d\tau + \int_0^s \frac{\tilde{b}_i e_{v,i}}{v_i} d\tau - \\ & K_1 \int_0^s \frac{e_{v,i}^2}{v_i^2} d\tau + \frac{1}{2} e_{v,i}^2(0) - \frac{1}{2} e_{v,i-1}^2(s). \end{aligned} \quad (25)$$

对于 $\Delta E_i^2(s)$, 利用引理1和引理2, 并代入参数学习律(15), 可以得到

$$\begin{aligned} \Delta E_i^2(s) = & \frac{1}{2} \int_0^s \tilde{\theta}_i^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_i d\tau - \frac{1}{2} \int_0^s \tilde{\theta}_{i-1}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_{i-1} d\tau = \\ & \frac{1}{2} \int_0^s (\theta - \hat{\theta}_i)^T \Gamma^{-1} (\theta - \hat{\theta}_i) - \\ & (\theta - \hat{\theta}_{i-1})^T \Gamma^{-1} (\theta - \hat{\theta}_{i-1}) d\tau \leq \\ & \frac{1}{2} \int_0^s (\theta - \hat{\theta}_i)^T \Gamma^{-1} (\theta - \hat{\theta}_i) - \\ & (\theta - P_\theta(\hat{\theta}_{i-1}))^T \Gamma^{-1} (\theta - P_\theta(\hat{\theta}_{i-1})) d\tau = \\ & \frac{1}{2} \int_0^s (2(\theta - \hat{\theta}_i) + (\hat{\theta}_i - P_\theta(\hat{\theta}_{i-1})))^T \Gamma^{-1} \times \\ & (P_\theta(\hat{\theta}_{i-1}) - \hat{\theta}_i) d\tau = \\ & - \int_0^s \frac{\tilde{\theta}_i^T \xi_i e_{v,i}}{v_i} d\tau - \frac{1}{2} \int_0^s \frac{e_{v,i}^2}{v_i^2} \xi_i^T \Gamma \xi_i d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

对于 $\Delta E_i^3(s)$, 有

$$\begin{aligned} \Delta E_i^3(s) = & \frac{1}{2K_2} \int_0^s \tilde{b}_i^2 - \tilde{b}_{i-1}^2 d\tau = \\ & \frac{1}{2K_2} \int_0^s (b_d - \hat{b}_i)^2 - (b_d - \hat{b}_{i-1})^2 d\tau \leq \\ & \frac{1}{2K_2} \int_0^s (b_d - \hat{b}_i)^2 - (b_d - P_b(\hat{b}_{i-1}))^2 d\tau \leq \\ & \frac{1}{2K_2} \int_0^s -2(b_d - \hat{b}_i)(\hat{b}_i - P_b(\hat{b}_{i-1})) - \\ & (\hat{b}_i - P_b(\hat{b}_{i-1}))^2 d\tau = \\ & \frac{1}{2K_2} \int_0^s -2\tilde{b}_i(K_2 \frac{e_{v,i}}{v_i}) - (K_2 \frac{e_{v,i}}{v_i})^2 d\tau = \\ & - \int_0^s \frac{\tilde{b}_i e_{v,i}}{v_i} d\tau - \frac{K_2}{2} \int_0^s (\frac{e_{v,i}}{v_i})^2 d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

联立式(25)–(27), 可得到CEF差分形式为

$$\begin{aligned} \Delta E_i(s) \leq & - (K_1 + \frac{K_2}{2}) \int_0^s (\frac{e_{v,i}}{v_i})^2 d\tau + \frac{1}{2} e_{v,i}^2(0) - \\ & \frac{1}{2} \int_0^s \frac{e_{v,i}^2}{v_i^2} \xi_i^T \Gamma \xi_i d\tau - \frac{1}{2} e_{v,i-1}^2(s) \leq \\ & - K_1 \int_0^s (\frac{e_{v,i}}{v_i})^2 d\tau + \frac{1}{2} e_{v,i}^2(0) - \frac{1}{2} e_{v,i-1}^2(s), \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $\int_0^s \tilde{\theta}_i^T \xi_i e_{v,i}/v_i d\tau$ 和 $\int_0^s \tilde{b}_i e_{v,i}/v_i d\tau$ 项在式(25)–(27)相互抵消.

2) $E_i(s)$ 的有界性.

在第 i 次迭代时, $E_i(s)$ 关于 s 的导数为

$$\nabla E_i(s) = \nabla E_i^1 + \nabla E_i^2 + \nabla E_i^3. \quad (29)$$

对于 ∇E_i^1 , 代入式(15)–(16)(22)和式(24), 可得

$$\begin{aligned} \nabla E_i^1 = & e_{v,i} \nabla e_{v,i} = \\ & e_{v,i} (\frac{\tilde{\theta}_i^T \xi_i}{v_i} + \frac{b_i - b_d}{v_i} + \frac{\tilde{b}_i}{v_i} - K_1 \frac{e_{v,i}}{v_i^2} - \frac{\beta_i e_{v,i}}{v_i}) = \\ & \frac{\theta^T \xi_i}{v_i} e_{v,i} - \frac{P_\theta^T(\hat{\theta}_{i-1}) \xi_i}{v_i} e_{v,i} - \frac{\xi_i^T \Gamma^T \xi_i}{v_i^2} e_{v,i}^2 + \\ & \frac{b_i - b_d}{v_i} e_{v,i} - \frac{\beta_i}{v_i} e_{v,i}^2 + \frac{b_d}{v_i} e_{v,i} - \\ & \frac{P_b(\hat{b}_{i-1})}{v_i} e_{v,i} - K_2 \frac{e_{v,i}^2}{v_i^2} - K_1 \frac{e_{v,i}^2}{v_i^2} \leq \\ & \frac{\theta^T \xi_i}{v_i} e_{v,i} - \frac{P_\theta^T(\hat{\theta}_{i-1}) \xi_i}{v_i} e_{v,i} - \frac{\xi_i^T \Gamma^T \xi_i}{v_i^2} e_{v,i}^2 + \\ & \frac{b_d}{v_i} e_{v,i} - \frac{P_b(\hat{b}_{i-1})}{v_i} e_{v,i} - K_2 \frac{e_{v,i}^2}{v_i^2} - K_1 \frac{e_{v,i}^2}{v_i^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

对于 ∇E_i^2 , 代入式(15), 有

$$\begin{aligned} \nabla E_i^2 = & \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_i = \\ & \frac{1}{2} (\theta^T - P_\theta^T(\hat{\theta}_{i-1}) - \xi_i^T \Gamma^T \frac{e_{v,i}}{v_i}) \Gamma^{-1} \times \\ & (\theta - P_\theta(\hat{\theta}_{i-1}) - \Gamma \frac{e_{v,i}}{v_i} \xi_i) = \\ & \frac{1}{2} \theta^T \Gamma^{-1} \theta - P_\theta^T(\hat{\theta}_{i-1}) \Gamma^{-1} \theta - \frac{e_{v,i}}{v_i} \xi_i^T \theta + \\ & P_\theta^T(\hat{\theta}_{i-1}) \xi_i \frac{e_{v,i}}{v_i} + \frac{1}{2} P_\theta^T(\hat{\theta}_{i-1}) \Gamma^{-1} P_\theta(\hat{\theta}_{i-1}) + \\ & \frac{1}{2} \xi_i^T \Gamma \xi_i \frac{e_{v,i}^2}{v_i^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

对于 ∇E_i^3 , 代入式(16), 有

$$\begin{aligned} \nabla E_i^3 = & \frac{1}{2K_2} \tilde{b}_i^2 = \\ & \frac{1}{2K_2} (b_d - P_b(\hat{b}_{i-1}) - K_2 \frac{e_{v,i}}{v_i})^2 = \\ & \frac{b_d^2}{2K_2} + \frac{P_b^2(\hat{b}_{i-1})}{2K_2} + \frac{K_2}{2} \frac{e_{v,i}^2}{v_i^2} - \\ & \frac{b_d P_b(\hat{b}_{i-1})}{K_2} - \frac{b_d e_{v,i}}{v_i} + \frac{e_{v,i} P_b(\hat{b}_{i-1})}{v_i}. \end{aligned} \quad (32)$$

联立式(29)–(32), 可得

$$\begin{aligned} \nabla E_i \leq & \frac{1}{2} \theta^T \Gamma^{-1} \theta - P_\theta^T(\hat{\theta}_{i-1}) \Gamma^{-1} \theta + \\ & \frac{1}{2} P_\theta^T(\hat{\theta}_{i-1}) \Gamma^{-1} P_\theta(\hat{\theta}_{i-1}) + \frac{b_d^2}{2K_2} - \end{aligned}$$

$$\frac{b_d P_b(\hat{b}_{i-1})}{K_2} + \frac{P_b^2(\hat{b}_{i-1})}{2K_2} - K_1 \frac{e_{v,i}^2}{v_i^2}, \quad (33)$$

其中式中的 $\theta^T \xi_i e_{v,i}/v_i$, $b_d e_{v,i}/v_i$, $P_b^T(\hat{\theta}_{i-1}) \xi_i e_{v,i}/v_i$, $P_b(\hat{b}_{i-1}) e_{v,i}/v_i$ 被相互抵消. 由于 θ 和 b_d 是连续函数, 因此在有限状态区间 $[0, s_p]$ 内必然有界. 另外, $P_b(\hat{b}_{i-1})$ 和 $P_\theta(\hat{\theta}_{i-1})$ 显然是有界的. 因此, 总存在一个足够大的 $e_{v,i}$, 使得 $\nabla E_i(s) < 0$. 又因为 $E_i(0)$ 有界, 所以 $E_i(s)$ 有界. 根据 $E_i(s)$ 的构造(18), 可得到 $e_{v,i}$, $\tilde{\theta}_i$ 和 $\tilde{b}_i$ 的有界性, 进而可得 v_i , $\hat{\theta}_i$, $\hat{b}_i$ 以及 u_i 的有界性.

3) 误差收敛特性.

反复应用式(28), 可得到CEF在 $i \rightarrow \infty$ 时的表达式为

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} E_i(s) = \\ E_1(s) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^i \Delta E_j(s) \leq \\ E_1(s) - \lim_{i \rightarrow \infty} K_1 \sum_{j=1}^i \int_0^s \left(\frac{e_{v,j}}{v_j} \right)^2 d\tau + \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i e_{v,j}^2(0). \end{aligned} \quad (34)$$

当 $e_{v,j}(0) = 0$ 时, 式(34)可以表示为

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_i(s) + \lim_{i \rightarrow \infty} K_1 \sum_{j=1}^i \int_0^s \left(\frac{e_{v,j}}{v_j} \right)^2 d\tau \leq E_1(s). \quad (35)$$

由于 $E_1(s)$ 和 $E_i(s)$ 是有界的, 因此 $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} e_{v,j}^2(s)$ 存在且有界. 进而可直接得到 $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{v,i}^2(s) = 0$ 以及 $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{v,i}(s) = 0, s \in [0, s_p]$. 从而完成定理1中的性质1证明.

当 $e_{v,i}(0) = \text{rand}(i) \cdot C$ 时, 不能得到误差的一致收敛特性. 但可以得到定理1中性质2的收敛特性. 采用类似文献[22]中的反证法进行证明.

假设存在正整数 N , 对于任意 $i > N$, 都有 $\|e_{v,i}\|_{s_p} > \varepsilon$.

此时, 令 $s = s_p$, 则式(34)可以表示为

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} E_i(s_p) \leq \\ E_1(s_p) - \lim_{i \rightarrow \infty} K_1 \sum_{j=1}^i \int_0^{s_p} \left(\frac{e_{v,j}}{v_j} \right)^2 d\tau + \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} i C^2 = \\ E_1(s_p) - K_1 \sum_{j=1}^N \int_0^{s_p} \left(\frac{e_{v,j}}{v_j} \right)^2 d\tau + \frac{1}{2} N C^2 - \\ \lim_{i \rightarrow \infty} K_1 \sum_{j=N+1}^i \int_0^{s_p} \left(\frac{e_{v,j}}{v_j} \right)^2 d\tau + \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (i - N) C^2 \leq \\ B - \lim_{i \rightarrow \infty} K_1 (i - N) \varepsilon^2 + \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (i - N) C^2 = \\ B + \lim_{i \rightarrow \infty} (i - N) \left(\frac{1}{2} C^2 - K_1 \varepsilon^2 \right), \end{aligned} \quad (36)$$

其中 $B = E_1(s_p) - K_1 \sum_{j=1}^N \int_0^{s_p} (e_{v,j}/v_j)^2 d\tau + \frac{1}{2} N C^2$,

显然 B 是有界的. 那么对于任意 $\delta > 0$, 取 $\varepsilon = \sqrt{(C^2 + \delta)/(2K_1)}$, 代入式(36), 有

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} E_i(s_p) \leq B + \lim_{i \rightarrow \infty} (i - N) \left(\frac{1}{2} C^2 - K_1 \varepsilon^2 \right) = \\ B - \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (i - N) \delta. \end{aligned} \quad (37)$$

当 $i \rightarrow \infty$ 时, 式(37)等号右边表达式将趋于 $-\infty$, 从而与 $E_i(s_p)$ 为正数相矛盾. 因此, 必然存在 $\{e_{v,i}\}$ 的子序列 $\{e_{v,i_j}\}$, 对于任意 $\delta > 0$, 都有 $\|e_{v,i_j}\|_{s_p} \leq \varepsilon$, 其中 $\varepsilon = \sqrt{(C^2 + \delta)/(2K_1)}$. 从而完成了定理1中性质2的证明.

注8 在考虑随机有界初始误差的情况时, 这里证明了采用本文设计的控制律能够实现跟踪误差在绝大多数迭代次数时的收敛性能. 对于更好的解决存在初始误差的情况, 文献[23–24]等方法都可以被使用, 这里不再赘述.

注9 本文在空间域上, 沿用了经典时间域迭代学习控制的证明思路, 完成了空间迭代学习控制的证明. 从证明过程可以看出, 当运动系统在空间轨迹具有重复特性时, 利用空间状态的转换算子、学习算法和复合能量函数, 能够很好的处理基于空间位置和系统状态的不确定性干扰, 提升控制系统的跟踪性能. 而对于此类系统, 传统的时间域ILC是无法直接应用的.

4 仿真算例(Simulation examples)

考虑城轨列车^[25–26]运动系统动力学模型如下:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = 10^{-3} g [u - k_1 - k_2 v - k_3 v^2 - \\ i(s) - \frac{600}{R(s)}], \end{cases} \quad (38)$$

其中: $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度, k_1 为滚动机械阻力, k_2 是其他机械阻力系数, k_3 表示外部空气阻力系数. 实际列车运行过程中, 系数 k_1, k_2, k_3 将会受到轨道机械特性, 隧道强气流等影响, 会根据列车位置 s 的变化而变化, 通常采用经验公式进行估算. 如CRH3型列车的 $k_1 = 0.53$, $k_2 = 0.00392$, $k_3 = 0.000114$. $i(s)$ 为线路坡度附加阻力, 用坡度的千分位数表示; $600/R(s)$ 为线路弯道附加阻力, $R(s)$ 为弯道半径, 单位为m. $u = F_t - F_b$ 为作用在列车单位重量上牵引力 F_t 和制动力 F_b 的合力, 实际情况下两者不同时作用于列车. 对应式(1),

$$\begin{aligned} \theta_1 &= [-k_1 - i - 600/R], \theta_2 = -k_2, \boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2]^T, \\ \xi_1 &= 10^{-3} g, \xi_2 = 10^{-3} g \times v, \boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2]^T, \\ b &= k_3 v^2 \times 10^{-3} g. \end{aligned}$$

$u = 10^{-3} g (F_t - F_b)$, 在牵引、制动和惰性工况下分别对应 $10^{-3} g F_t$, $10^{-3} g F_b$ 和 0. 为了验证本文提出的控制算法, 给出 $\theta_1, 10^3 \times \theta_2, 10^4 \times k_3$ 的数值如图1所示.

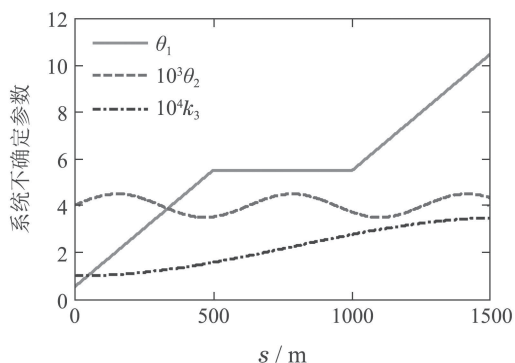


图1 系统未知参数在s域上的变化规律

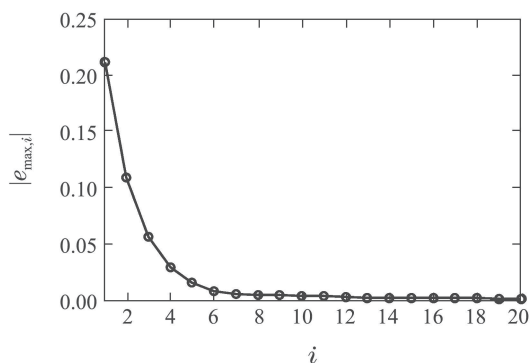
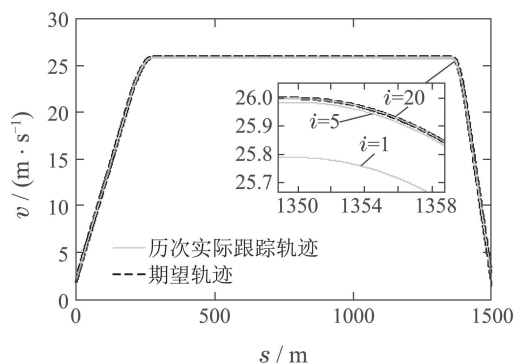
Fig. 1 The varying character of system unknown parameter along s domain

非参数不确定性 b 满足局部Lipschitz连续, 即 $|b(v_1, s) - b(v_2, s)| \leq \beta(s, v_1, v_2)|v_1 - v_2|$, 其中 $\beta(s, v_1, v_2) = 3 \times 10^{-6}(v_1 + v_2)$.

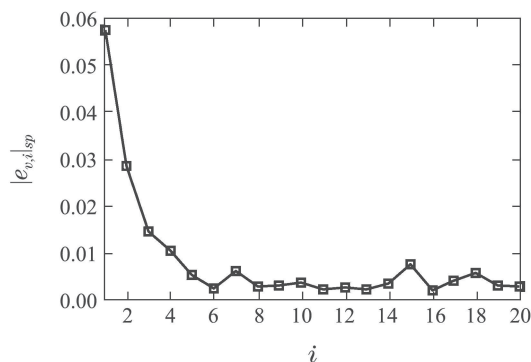
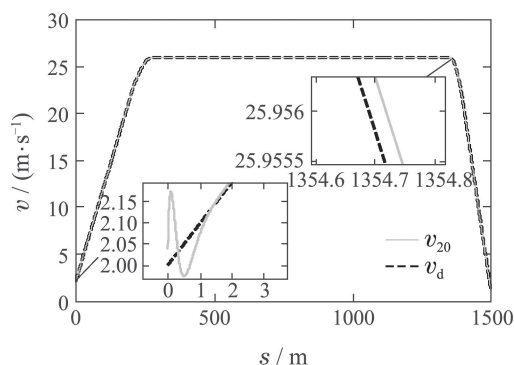
期望跟踪轨迹 $s \in [0, 1500]$, $v_d(0) = 2$, ∇v_d 以 s 的函数形式给出如下:

$$\nabla v_d(s) = \begin{cases} 0.1, & 0 \leq s \leq 200, \\ -s/800 + 0.35, & 200 < s \leq 280, \\ 0, & 280 < s \leq 1350, \\ -s/500 + 2.7, & 1350 < s \leq 1400, \\ -0.1, & 1400 < s \leq 1500. \end{cases}$$

对于此类系统, 传统的ILC无法直接使用. 这里采用本文的方法, 首先考虑 $e_{v,i}(0) = 0$ 的情况, 并使用最大跟踪误差绝对值 $|e_{\max,i}|$ 来评判跟踪性能. 控制律(14)–(16)中 $\Gamma = \text{diag}\{6, 8\}$, $K_1 = 5$, $K_2 = 5$. 图2给出了 $|e_{\max,i}|$ 跟踪误差沿迭代轴收敛规律. 可以看出, 随着不断的学习, $|e_{\max,i}|$ 快速的收敛至0. 图3给出了历次迭代过程中跟踪轨迹与期望轨迹图, 其中虚线代表期望轨迹, 实线代表历次实际跟踪轨迹. 可见, 在迭代开始时, 实际跟踪轨迹与期望轨迹相差较大; 而随着迭代次数增加, 未知参数 θ 和 b 被逐渐学习, 实际跟踪曲线也会逐渐逼近期望轨迹. 经过20次的学习后, 实际轨迹已经充分逼近期望轨迹.

图2 $e_{v,i}(0) = 0$ 时, 最大跟踪误差 $|e_{\max,i}|$ 随迭代次数收敛特性Fig. 2 The convergence of $|e_{\max,i}|$ versus iteration number when $e_{v,i}(0) = 0$ 图3 $e_{v,i}(0) = 0$ 时, 历次迭代的轨迹跟踪效果Fig. 3 The trajectory tracking performance in each iteration when $e_{v,i}(0) = 0$

考虑 $e_{v,i}(0) = \text{rand}(i) \cdot 0.5$ 的情况, 此时采用 $\|e_{v,i}\|_{s_p}$ 来评判跟踪性能, 控制律参数同上. 仿真结果如图4–5所示. 从图4可以看出, $\|e_{v,i}\|_{s_p}$ 随着迭代次数增加而收敛至较低值. 图5给出了第20次实际轨迹和期望轨迹, 实线和虚线分别代表 v_{20} 和 v_d . 从图5可见, 虽然存在随机初始误差, 但是实际轨迹能在短距离内迅速跟踪上期望轨迹.

图4 $e_{v,i}(0) = \text{rand}(i) \cdot 0.5$ 时, $\|e_{v,i}\|_{s_p}$ 随迭代次数收敛特性Fig. 4 The convergence of $\|e_{v,i}\|_{s_p}$ versus iteration number when $e_{v,i}(0) = \text{rand}(i) \cdot 0.5$ 图5 $e_{v,i}(0) = \text{rand}(i) \cdot 0.5$ 时, 第20次迭代的轨迹跟踪效果Fig. 5 The trajectory tracking performance in 20th iteration when $e_{v,i}(0) = \text{rand}(i) \cdot 0.5$

从仿真结果可见, 当存在初始随机误差的情况时, 采用所设计的控制律, 能够使控制误差随着迭代次数

增加几乎始终保持在较低水平;另外,初始误差带来的影响也仅存在于初始跟踪阶段的短距离范围内。

5 结论(Conclusions)

本文针对一类在空间区间重复运动的系统,提出了空间迭代学习控制算法。该算法克服了传统ILC必须具有时间周期的问题,对如何将时间周期ILC拓展到空间周期ILC进行了一定的探讨。该算法以系统空间位置作为周期指标,考虑了基于空间位置的参数型不确定性和基于空间位置和速度的非参数不确定性,并研究了初始误差为0以及初始误差在有界范围内随机变化两种情况。引入了基于空间状态的微分算子,将系统从时间域形式转化为空间域形式。在此基础上,设计了空间的复合能量函数和迭代学习控制律,并通过理论证明和仿真实例验证了算法的有效性。今后,将进一步研究如何将该算法拓展到空间的多输入多输出系统中。

参考文献(References):

- [1] ABIDI K, XU J X. Iterative learning control for sampled-data systems: from theory to practice [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, 58(7): 3002 – 3015.
- [2] HEHN M, D'ANDREA R. A frequency domain iterative learning algorithm for high-performance, periodic quadcopter maneuvers [J]. *Mechatronics*, 2014, 24(8): 954 – 965.
- [3] XU J X. A survey on iterative learning control for nonlinear systems [J]. *International Journal of Control*, 2011, 84(7): 1275 – 1294.
- [4] ZHAO Zhong, GAO Ying, LIU Zhili. Novel open-closed-loop iterative learning control in networked control systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(10): 1335 – 1341.
(赵众, 高颖, 刘志立. 网络控制系统中一种新形式的开闭环迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(10): 1335 – 1341.)
- [5] LI Zhifu, HU Yueming, GUO Qiwei, et al. Robust monotonically convergent feedback-forward iterative learning control for uncertain linear discrete systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 485 – 492.
(李致富, 胡跃明, 郭琪伟, 等. 不确定离散线性系统的鲁棒单调反馈-前馈迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(4): 485 – 492.)
- [6] XU J X, TAN Y. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1940 – 1945.
- [7] XU J X, JIN X, HUANG D. Composite energy function-based iterative learning control for systems with nonparametric uncertainties [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2014, 28(1): 1 – 13.
- [8] QI Liqiang, SUN Mingxuan, GUAN Haiwa. Finite-time iterative learning control for systems with nonparametric uncertainties [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(7): 1320 – 1327.
(齐丽强, 孙明轩, 管海娃. 非参数不确定系统的有限时间迭代学习控制 [J]. 自动化学报, 2014, 40(7): 1320 – 1327.)
- [9] TAN Y, DAI H, HUANG D, et al. Unified iterative learning control schemes for nonlinear dynamic systems with nonlinear input uncertainties [J]. *Automatica*, 2012, 48(12): 3173 – 3182.
- [10] XU J X, JIN X. State-constrained iterative learning control for a class of MIMO systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(5): 1322 – 1327.
- [11] HULL R, HAM C, JOHNSON R. Systematic design of attitude control systems for a satellite in a circular orbit with guaranteed performance and stability [C] // *Proceedings of AIAA/USU Conference on Small Satellite*. Logan, UT, USA: AIAA, 2000.
- [12] RAGHUNATHAN A S, KIM H D, SETOGUCHI T. Aerodynamics of high-speed railway train [J]. *Progress in Aerospace*, 2002, 38(6/7): 469 – 514.
- [13] WANG J, HOVAKIMYAN N, CAO C. Verifiable adaptive flight control: unmanned combat aerial vehicle and aerial refueling [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, 33(1): 75 – 87.
- [14] LEE J H, SEVIL H E, DOGAN A, et al. Estimation of receiver aircraft states and wind vectors in aerial refueling [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014, 37(1): 265 – 276.
- [15] XU J X, HUANG D. Initial state iterative learning for final state control in motion systems [J]. *Automatica*, 2008, 44(12): 3162 – 3169.
- [16] LIU J L, DONG X M, XUE J P, et al. Initial states iterative learning for three-dimensional ballistic endpoint control [J]. *Memetic Computing*, 2017, 9(1): 31 – 41.
- [17] AHN H, CHEN Y. Periodic adaptive learning control for velocity-dependent disturbance compensation [C] // *Proceedings of 2009 IEEE International Conference on Control and Automation*. Christchurch, New Zealand: IEEE, 2009: 1122 – 1127.
- [18] AHN H, CHEN Y. State-dependent friction force compensation using periodic adaptive learning control [J]. *Mechatronics*, 2009, 19(6): 896 – 904.
- [19] MOORE K L, GHOSH M, CHEN Y Q. Spatial-based iterative learning control for motion control applications [J]. *Meccanica*, 2007, 42(2): 167 – 175.
- [20] XU J X, HUANG D. Spatial periodic adaptive control for rotary machine systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(10): 2402 – 2408.
- [21] CONSOLINI L, VERRELLI C M. Learning control in spatial coordinates for the path-following of autonomous vehicles [J]. *Automatica*, 2014, 50(7): 1867 – 1874.
- [22] XU J X, YAN R. On initial conditions in iterative learning control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(9): 1349 – 1354.
- [23] SUN Mingxuan, YAN Qiuzhen. Error tracking of iterative learning control systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 251 – 262.
(孙明轩, 严求真. 迭代学习控制系统的误差跟踪设计方法 [J]. 自动化学报, 2013, 39(3): 251 – 262.)
- [24] RUAN Xiao'e, ZHAO Jianyong. Pulse compensated iterative learning control to nonlinear systems with initial state uncertainty [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 993 – 1000.
(阮小娥, 赵建永. 具有初始状态不确定性的非线性系统脉冲补偿迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 993 – 1000.)
- [25] ZHONG Lusheng, LI Bing, GONG Jinhong, et al. Maximum likelihood identification of nonlinear model for high-speed train [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(12): 2950 – 2958.
(衷路生, 李兵, 龚锦红, 等. 高速列车非线性模型的极大似然辨识 [J]. 自动化学报, 2014, 40(12): 2950 – 2958.)
- [26] MENG Jianjun, CHEN Xiaoqiang, XU Ruxun, et al. Traction calculation analysis and simulation of urban rail train on multi-particle model [J]. *Journal of System Simulation*, 2015, 27(3): 603 – 619.
(孟建军, 陈晓强, 胥如迅, 等. 基于多质点的城轨列车牵引计算分析与仿真 [J]. 系统仿真学报, 2015, 27(3): 603 – 619.)

作者简介:

刘矫龙 (1988–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为迭代学习控制、飞行控制, E-mail: kgd_ljl@163.com;

董新民 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为飞行控制、控制分配、机器视觉, E-mail: dongxinmin@139.com;

薛建平 (1967–), 男, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为计算机控制, E-mail: xiankg@163.com;

王海涛 (1986–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为飞行控制、空中加油, E-mail: wanghaitao198638@163.com.