

油藏注水开发低阶模型及最优控制仿真研究

徐明海¹, 孙宪航^{1†}, 巩亮¹, 贾欣鑫², 王政¹, 李会明¹

(1. 中国石油大学 储运与建筑工程学院, 山东 青岛 266580; 2. 山东省科学院 海洋仪器仪表研究所, 山东 青岛 266001)

摘要: 油藏注水开发最优控制问题计算规模大、控制变量与计算网格多, 且控制变量与目标函数之间的关系为一组非线性偏微分方程控制, 若直接进行数值求解, 对于目前的计算机计算速度和存储空间是个巨大负担. 本文采用最佳正交分解(proper orthogonal decomposition, POD)方法提出了基于低阶模型的油藏注水开发最优控制问题, 这样, 控制变量与目标函数之间的复杂关系被转变为解析函数, 仅以少量的POD系数作为优化变量且只需采用非线性规划方法即可求解, 大幅度地降低了原问题的求解复杂度与计算量. 以二维五点井网的一个井组为应用实例进行仿真研究, 结果表明: 基于低阶模型的最优控制问题所求解的最大生产净现值与经典的伴随梯度法相比仅有不超过2.5%的误差, 且计算速度优势极为明显, 当网格数为 40×40 时, 计算速度可提高30倍以上, 网格数越多, 计算速度优势越明显, 当网格数为 70×70 时, 可提速60倍以上.

关键词: 油藏注水开发; 最优控制; 最佳正交分解; 低阶模型; 非线性规划

中图分类号: TE319 文献标识码: A

Simulation study on reduced-order model and optimal control of water flooding reservoir

XU Ming-hai¹, SUN Xian-hang^{1†}, GONG Liang¹, JIA Xin-xin², WANG Zheng¹, LI Hui-ming¹

(1. College of Pipeline and Civil Engineering, China University of Petroleum, Qingdao Shandong 266580, China;
2. Institute of Oceanographic Instrumentation, Shandong Academy of Sciences, Qingdao Shandong 266001, China)

Abstract: Optimal control of water flooding reservoir production is a large-scale optimization problem accompanied with a great number of control variables and grid blocks, the relationship between control variables and objective function is governed by a set of nonlinear partial differential equations, it is a great challenge to directly numerically calculate the optimal control solutions with the current speed and storage space of computer. In this paper a reduced-order model based optimal control of water flooding reservoir is proposed using proper orthogonal decomposition (POD), the relationship between the control variables and objective function is transformed into analytic function, thus, only a small amount of POD coefficients are considered as optimization variables and are determined only using a nonlinear programming method, which considerably reduces the difficulty and the amount of calculation. The new methodology is approved on a well group of two dimensional five point well pattern. The results show that the net-present-value (NPV) obtained by the new methodology is approached to within 97.5% of the NPV obtained by the adjoint-gradient based method, besides, it is quite fast, where the achieved increase in calculation speed is more than 30 times when the number of grid is 40×40 , and the larger number of grid is, the more obvious the computational speed advantage is, the calculation speed can be increased by more than 60 times when the grid number is 70×70 .

Key words: water flooding reservoir; optimal control; proper orthogonal decomposition; reduced-order model; nonlinear programming

1 引言(Introduction)

为了最大化油田效益, 各大石油公司纷纷提出了智能油田的概念, 其目的就是在生产过程中实时地更新生产方案, 通过智能调控, 在原油增产的同时尽可能减小生产成本. 油田开发最优控制是智能油田的核

心技术之一, 即基于最优控制理论^[1]实时地调整注采井的控制参数使得在特定生产周期内的某个目标函数(通常为生产净现值)取得极值. 然而油藏生产优化是一个复杂的、大规模的优化问题, 其控制变量与计算网格众多, 且控制变量与目标函数之间为一组复杂

收稿日期: 2016-04-17; 录用日期: 2017-01-13.

[†]通信作者: E-mail: sxh19871124@163.com.

本文责任编辑: 邓飞其.

国家自然科学基金项目(51276199), 山东省科学院青年基金项目(2015QN023)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (51276199) and Youth Foundation of Shandong Academy of Sciences (2015QN023).

的非线性偏微分方程所控制. 对于该问题的求解, 国内外学者已提出多种直接数值求解方法^[2-7], 其中伴随梯度法是目前公认最有效的^[3-5,7]. 该方法基于求解目标函数对各控制变量的梯度而逐步逼近最优解. 然而, 求解梯度需要对大量的全阶控制方程进行若干次正向数值模拟计算以及对一组伴随方程进行若干次反向模拟计算, 每求解一个伴随方程都需要求解一个维数与模型网格节点数相同的伴随向量, 且每个伴随向量的求解又涉及到维数与网格节点数相同的大尺度矩阵计算, 这对目前的计算机硬件是个巨大的挑战, 对于一个包含 $10^6 \sim 10^8$ 个网格节点的典型油藏, 进行一次完整的最优控制计算常常需要数天至数周的时间, 甚至出现因计算机内存不足而无法求解的情况. 此外, 用于计算生产净现值的各种经济参数, 如油价会因市场因素而发生变化, 这也要求对后续生产的最优控制方案进行实时地更新. 因此, 为了更好地将最优控制理论服务于油藏生产从而促进智能油田技术的开发与实施, 需要寻找一种能够既迅速又足够准确地求解最优控制方案的计算模型.

最佳正交分解 (proper orthogonal decomposition, POD)^[8]方法是从已知的物理场(由数值模拟或者实验获得)中提取出一组正交基函数, 这些基函数代表了原物理场的动力学特性, 再与Galerkin等^[9]投影方法结合即可实现对原物理系统控制方程的降阶, 即建立低阶模型, 这里的“阶”代表每个时间步长内所要求解变量的个数, 利用这种低阶模型可快速地计算出控制参数变化范围内的任一参数所对应的物理场. 这也是目前文献中以POD作为降阶工具的主流降阶方法. 通过该方法, POD已成功服务于许多研究领域, 如信号分析^[10]、流体流动与传热^[11-14]、结构动力学^[15]、工程中的反问题^[16-17]以及过程控制^[18-19]等. 其中, 文献[14]针对水驱油藏采用POD建立了低阶模型, 并采用该低阶模型对油、水流动问题进行了快速预测.

本文将POD应用于油藏注水开发问题, 在文献[14]的基础上将低阶模型与最优控制问题相结合提出了基于低阶模型的油藏注水开发最优控制问题, 从而实现直接对油藏注水开发最优控制问题的降阶. 以二维五点井网的一个井组为应用实例, 结果表明在保证较高精度的优化结果的同时可大幅度提高求解速度.

2 油藏注水开发最优控制问题(Optimal control problem of water flooding reservoir)

2.1 全阶模型(Full-order model)

假设岩石和流体均不可压缩, 且忽略重力和毛管压力, 油、水在油藏中流动的全阶控制方程^[20], 即全阶模型为

油相:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{k}k_{ro}}{\mu_o} \nabla p \right) + q_{ov} = \varphi \frac{\partial s_o}{\partial t}. \quad (1a)$$

水相:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{k}k_{rw}}{\mu_w} \nabla p \right) + q_{wv} = \varphi \frac{\partial s_w}{\partial t}, \quad (1b)$$

$$s_o + s_w = 1, \quad (1c)$$

式中: 下标o和w分别表示油相和水相; p 为流体压力, Pa; s 为流体饱和度, 无因次; φ 为岩石孔隙度, 无因次; μ 为流体粘度, Pa·s; 向量 \mathbf{k} 为岩石渗透率, m^2 ; k_r 为流体相对渗透率, 无因次; q_v 为流体在单位体积岩石内的体积流量, 1/s, 其中只有有井存在的网格块处取非零值, 且生产井处为负, 注水井处为正.

此外, 对于生产井, 油、水的生产速率由如下产量公式计算:

$$q_{lv} = \text{PID} \cdot \frac{k_{rl}}{\mu_l} (p_{\text{well}} - p_{\text{wf}}), \quad (2)$$

式中: 下标l表示油相或水相; PID为生产井生产指数, $\text{m}^2 \cdot \text{m}$, 对于固定的井, 通常为常数; p_{well} 为生产井所在网格块压力; p_{wf} 为生产井井底流压.

2.2 最优控制问题(Optimal control problem)

油田开发的主要目的就是获得最大的经济效益, 本文采用生产净现值(net present value, NPV)作为目标函数, 其表达式为

$$J = \sum_{n=1}^N \frac{\Delta t^n}{(1+b)^{t^n/365}} \left[\sum_{i=1}^{N_p} (P_o q_{o,i}^n - P_{\text{wP}} q_{\text{wP},i}^n) - \sum_{j=1}^{N_1} (P_{\text{wI}} q_{\text{wI},j}^n) \right], \quad (3)$$

式中: N 为总的模拟时间步数; Δt^n 为时间步长; N_1 和 N_p 分别为注水井和生产井的数量; $q_{o,i}^n$ 和 $q_{\text{wP},i}^n$ 分别为第 n 个时间步长内第 i 个生产井的产油速率和产水速率; $q_{\text{wI},j}^n$ 为第 n 个时间步长内第 j 个注水井的注水速率; P_o , P_{wP} 及 P_{wI} 分别为油价、产出水处理成本单价以及注水成本单价; b 为年度折现率.

一切与井有关的操作参数均可作为控制变量, 本文选取注水井的注水速率与生产井的井底流压作为控制变量, 这样, 第 n 个时间步长内的控制变量 $\mathbf{u}(n)$ 为

$$\mathbf{u}(n) = [q_{\text{wI},1}^n \cdots q_{\text{wI},N_1}^n \ p_{\text{wf},1}^n \cdots p_{\text{wf},N_p}^n]. \quad (4)$$

根据最优控制的一般模型, 油藏注水开发最优控制问题可表示为

$$\begin{aligned} \max J = & \sum_{n=1}^N \frac{\Delta t^n}{(1+b)^{t^n/365}} [P_o^T \mathbf{q}_o(n) - P_{\text{wP}}^T \mathbf{q}_w(n) + \\ & P_{\text{wI}}^T \mathbf{q}_w(n)]. \end{aligned} \quad (5)$$

约束条件:

1) 全阶模型:

油相:

$$\mathbf{q}_o(n) = \mathbf{A}_o \mathbf{p}(n) + \mathbf{B}(\mathbf{S}(n) - \mathbf{S}(n-1)). \quad (6a)$$

水相:

$$\mathbf{q}_w(n) = \mathbf{A}_w \mathbf{p}(n) + \mathbf{B}(\mathbf{S}(n-1) - \mathbf{S}(n)), \quad (6b)$$

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{S}_0. \quad (6c)$$

2) 产量公式:

油相:

$$\mathbf{q}_{ov}(n) = \mathbf{J}_o(\mathbf{p}_{well}(n) - \mathbf{p}_{wf}(n)). \quad (7a)$$

水相:

$$\mathbf{q}_{wv}(n) = \mathbf{J}_w(\mathbf{p}_{well}(n) - \mathbf{p}_{wf}(n)). \quad (7b)$$

3) 控制变量的取值范围约束:

$$\mathbf{u}_{low}(n) \leq \mathbf{u}(n) \leq \mathbf{u}_{up}(n), \quad (8)$$

其中: 全阶模型为采用有限差分法离散后的, 且离散方程、产量公式以及目标函数均以矩阵形式表示. 向量 \mathbf{p} 和 \mathbf{S} 的元素为对应于各个网格节点的压力和含水饱和度, \mathbf{p}_0 和 \mathbf{S}_0 为具体的初始条件; \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为离散方程中的系数矩阵; \mathbf{q}_o 和 \mathbf{q}_w 分别为产油及产水速率; \mathbf{q}_{ov} 和 \mathbf{q}_{wv} 分别为生产井处的产油和产水速率; \mathbf{p}_{well} 为生产井所在网格块的压力; \mathbf{p}_{wf} 为生产井井底流压; \mathbf{J}_o 和 \mathbf{J}_w 分别为以 $\text{PID} \cdot \frac{k_{ro}}{\mu_o}$, $\text{PID} \cdot \frac{k_{rw}}{\mu_w}$ 为对角元素的对角矩阵; \mathbf{P}_o , \mathbf{P}_{wp} 及 \mathbf{P}_{wl} 分别为以油价 P_o 、产出水处理成本单价 P_{wp} 以及注水成本单价 P_{wl} 为元素的向量, 其中: 对于 \mathbf{P}_{wp} , 只有对应于生产井位置处的元素不为零, 对于 \mathbf{P}_{wl} , 只有对应于注水井位置处的元素不为零; $\mathbf{u}(n)$ 为第 n 个时间步长内的控制变量, 且 $\mathbf{u}_{low}(n)$ 与 $\mathbf{u}_{up}(n)$ 分别为控制变量的取值下限与上限.

油藏注水开发的最优控制问题可描述为: 在控制变量 $\mathbf{u}(n)$ 满足取值范围约束条件式(8)时, 求解使目标函数 J 取得最大值的最优控制变量 $\mathbf{u}^*(n)$ 以及相应的最优状态变量 $\mathbf{p}^*(n)$ 与 $\mathbf{S}^*(n)$, $n = 1, \dots, N$.

3 POD技术简介(POD technique profile)

以 $F^k(x) = f(x, t_i, \mathbf{u}_j)$, $k = 1, \dots, T \times R$ 表示由数值模拟获得的对应于控制参数 \mathbf{u}_j 和时间 t_i 的物理场样本, 其中: $i = 1, \dots, T$, $j = 1, \dots, R$. POD的目的就是从已知样本中提取出一组只与空间变量 x 有关的正交基函数 $\phi_m(x)$, $m = 1, \dots, M$, 从而原物理场 $f(x, t, \mathbf{u})$ 可通过式(9)得到重构:

$$f(x, t, \mathbf{u}) = \Phi \alpha, \quad (9)$$

式中: $\Phi = [\phi_1(x) \cdots \phi_M(x)]$, 其中的 M 为截断自由度, 即基函数的数量; $\alpha = [\alpha_1 \cdots \alpha_M]$ 为对应的系数矩阵, 系数 α_m 代表第 m 个基函数对重构原物理场所贡献的程度, 是控制变量 \mathbf{u} 和时间 t 的函数, 对于已知的物理场 $f(x, t, \mathbf{u})$ 可由以下投影公式求得:

$$\alpha_m(t, \mathbf{u}) = (\phi_m(x), f(x, t, \mathbf{u})), \quad m = 1, \dots, M. \quad (10)$$

3.1 “快照”方法(Snapshot method)

Sirovich^[21]提出的“快照”方法表明POD基函数可表示为已知样本的线性叠加形式, 即

$$\phi_m(x) = \sum_{k=1}^{T \times R} b_m^k F^k(x), \quad (11)$$

式中系数 b_m^k 代表第 k 个样本对构建第 m 个POD基函数的贡献程度, 可由求解如下特征值问题获得:

$$\mathbf{C} \mathbf{b}^k = \lambda^k \mathbf{b}^k, \quad (12)$$

式中: \mathbf{C} 为一个 $T \times R$ 维的对称矩阵; λ^k 为 \mathbf{C} 的第 k 个特征值, \mathbf{b}^k 为对应的特征向量. \mathbf{C} 的每个元素为

$$C_{i,j} = \frac{1}{T \times R} \int_{\Omega} F^i(x) F^j(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, T \times R. \quad (13)$$

3.2 能量最优性(Energy optimality)

特征值 λ^k 的大小代表了第 k 个POD基函数在原物理场样本中所占据的能量多少, 即对重构原物理场所贡献的程度. 现定义参数 $\xi_M = \frac{\sum_{k=1}^M \lambda^k}{\sum_{k=1}^{T \times R} \lambda^k}$, 不难发现, ξ_M 的大小代表了前 M 个POD基函数占总能量的比例.

将特征值由大到小排列, 根据“能量最优性”原则^[8-9], 仅前 M ($M \gg T \times R$)个特征值便可使参数 ξ_M 接近1. 这样, 式(9)仅需采用极少的POD基函数即可较高精度地重构原物理场.

4 基于低阶模型的油藏注水开发最优控制问题(Reduced-order model based optimal control problem of water flooding reservoir)

4.1 低阶模型(Reduced-order model)

将式(9)代入式(6)可得油、水流动的低阶控制方程, 即低阶模型:

油相:

$$\mathbf{q}_o(n) = \mathbf{A}_o \Phi_p \alpha_p(n) + \mathbf{B} \Phi_s (\alpha_s(n) - \alpha_s(n-1)). \quad (14a)$$

水相:

$$\mathbf{q}_w(n) = \mathbf{A}_w \Phi_p \alpha_p(n) + \mathbf{B} \Phi_s (\alpha_s(n-1) - \alpha_s(n)). \quad (14b)$$

式中下标 p 和 s 分别代表压力和含水饱和度. 此外, 系数 α_p 和 α_s 的初始条件为

$$\alpha_p(0) = (\Phi_p, \mathbf{p}(0)), \quad \alpha_s(0) = (\Phi_s, \mathbf{S}(0)).$$

基于式(14), 原问题的“阶”由全阶模型的 $2N_e$ 降为 $M_p + M_s$, 故称为低阶模型, 其中: N_e 为计算所采用的网格节点数, M_p 与 M_s 分别为压力和含水饱和度的截断自由度. 这样, 求解控制参数变化后的物理场, 无需再重新求解全阶模型, 而只需采用低阶模型重新求解一组少量的POD系数.

4.2 基于低阶模型的最优控制问题(Reduced-order model based optimal control problem)

将低阶模型(式(14))代入式(5)得

$$J = \sum_{n=1}^N \frac{\Delta t^n}{(1+b)^{t^n/365}} [\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\alpha}_p(n) + \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\alpha}_s(n) - \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\alpha}_s(n-1)], \quad (15)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= (\mathbf{P}_o^T \mathbf{A}_o - \mathbf{P}_{wp}^T \mathbf{A}_w + \mathbf{P}_{wl}^T \mathbf{A}_w) \boldsymbol{\Phi}_p, \\ \mathbf{A}_2 &= (\mathbf{P}_o^T + \mathbf{P}_{wp}^T - \mathbf{P}_{wl}^T) \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}_s. \end{aligned}$$

由式(15)可发现,新的目标函数所包含的变量只有POD系数 $\boldsymbol{\alpha}_p(n)$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_s(n)$,同样,这里的POD系数也需满足一系列约束条件.这样,基于低阶模型的油藏注水开发最优控制问题可表示为

$$\max J = [\boldsymbol{\alpha}_p(n), \boldsymbol{\alpha}_s(n)], n = 1, \dots, N. \quad (16)$$

约束条件:

1) 初始条件:

$$\boldsymbol{\alpha}_p(0) = (\boldsymbol{\Phi}_p, \mathbf{p}(0)), \boldsymbol{\alpha}_s(0) = (\boldsymbol{\Phi}_s, \mathbf{S}(0)). \quad (17)$$

2) 含水饱和度取值范围约束:

$$\mathbf{S}_c \leq (\boldsymbol{\Phi}_s \boldsymbol{\alpha}_s(n)) \leq 1 - \mathbf{S}_{or}, \quad (18)$$

式中向量 \mathbf{S}_c 与 \mathbf{S}_{or} 的元素分别为对应于各个网格节点的束缚水饱和度与残余油饱和度.

3) 生产井处的产油和产水速率均为正值:

$$\mathbf{D} \mathbf{q}_o(n) > 0, \mathbf{D} \mathbf{q}_w(n) > 0, \quad (19)$$

式中 \mathbf{D} 为用于确定生产井所在网格块对应于向量 \mathbf{q}_o 和 \mathbf{q}_w 中相应元素的矩阵.

4) 注水井的注水速率取负值且受取值范围约束,此外,注水井处的产油速率为零

$$-\mathbf{q}_{\max} \leq \mathbf{E} \mathbf{q}_w(n) < 0, \mathbf{E} \mathbf{q}_o(n) = 0, \quad (20)$$

式中: \mathbf{E} 为用于确定注水井所在网格块对应于向量 \mathbf{q}_w 中相应元素的矩阵;向量 \mathbf{q}_{\max} 的每个元素表示对应注水井的最大注水速率.

5) 无井的网格块所对应的油、水体积流量均为零:

$$\mathbf{F} \mathbf{q}_o(n) = 0, \mathbf{F} \mathbf{q}_w(n) = 0, \quad (21)$$

式中 \mathbf{F} 为用于确定无井的网格块对应于向量 \mathbf{q}_o 和 \mathbf{q}_w 中相应元素的矩阵.

6) 注采平衡(任意时间步长内注水量与产液量相等):

$$|-\mathbf{E} \mathbf{q}_w(n)|_1 = |\mathbf{D} \mathbf{q}_o(n) + \mathbf{D} \mathbf{q}_w(n)|_1. \quad (22)$$

7) 生产井的产油与产水速率的比值受产量公式约束:

$$\mathbf{J}_o^{-1} \mathbf{D} \mathbf{q}_o(n) = \mathbf{J}_w^{-1} \mathbf{D} \mathbf{q}_w(n). \quad (23)$$

8) 生产井井底流压约束:

$$\mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{D} \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{\alpha}_p(n) - \mathbf{J}_o^{-1} \mathbf{D} \mathbf{q}_o(n) \leq \mathbf{p}_{\max}, \quad (24)$$

式中:向量 \mathbf{p}_{\min} 与 \mathbf{p}_{\max} 的每个元素分别为对应生产井井底流压的最小值与最大值;式中的生产井井底流压表达式由产量公式(式(7a))反算得出.

基于上述最优控制问题新的表述,目标函数与控制变量之间的复杂关系被转化为了目标函数与一组少量POD系数之间的解析函数形式,这样,油藏注水开发的最优控制问题便可转变为在POD系数 $\boldsymbol{\alpha}_p(n)$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_s(n)$ 满足约束条件式(17)–(24)时,求解使目标函数 J 取得最大值的最优POD系数 $\boldsymbol{\alpha}_p^*(n)$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_s^*(n)$,最后再反算出对应的最优控制变量.不难发现,这只是个以少量POD系数为优化变量的非线性规划问题,可由MATLAB快速求解,大幅度地节省了计算资源与降低了对计算机性能的需求.此外,当生产过程中因各种经济参数变化而需要重新制定后续生产的最优控制方案时,只需再重新求解一组少量的新的POD系数.

5 应用实例(Application example)

本文以二维五点井网的一个井组模型为应用实例来说明本文所提出的基于低阶模型的油藏注水开发最优控制问题的具体实施步骤.为了证明新方法的正确性与可行性,将其优化结果与一个未优化的参考生产方案进行了对比.同时为了体现新方法计算结果的精确度与计算速度的优势,还将其与经典的伴随梯度法的计算结果进行了对比.

5.1 问题描述(Problem formation)

模型网格划分为 40×40 ,网格大小为 10×10 m,厚度为10 m;岩石渗透率在 x 和 y 方向相等,模型井位与渗透率场如图1所示,其中:中心处有一注水井,4个角点分别为4个生产井,所有边界均封闭.岩石及流体均不可压缩,相关物性参数如表1所示.

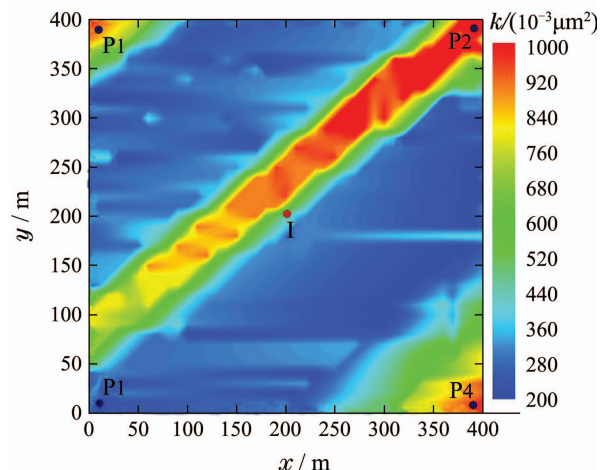


图1 井位与渗透率场

Fig. 1 Locations of wells and permeability fields Fig.

表 1 岩石及流体物性参数

Table 1 Rock and fluid properties data

参数	取值	单位
孔隙度	0.25	—
油相粘度	7.0	mPa·s
水相粘度	1.0	mPa·s
油相密度	830	kg/m ³
水相密度	1000	kg/m ³
束缚水饱和度	0.2	—
残余油饱和度	0.8	—
原始地层压力	6.2	MPa
原始含油饱和度	0.8	—
注水井注入指数	12	μm ² ·m
生产井生产指数	10	μm ² ·m

注水井的最大注水速率为360 m³/天, 各生产井井底流压的最小与最大值分别为0.2 MPa与4.5 MPa; 此外, 为了方便地将油、水相对渗透率与含水饱和度的关系代入系数矩阵A_o与A_w中, 将相对渗透率曲线拟合为如下关联式:

$$k_{ro} = 1.874\exp(-s_w/0.77) - 0.663, \quad (25a)$$

$$k_{rw} = 0.109\exp(s_w/0.557) - 0.155. \quad (25b)$$

为了说明对生产过程中的注采参数实施最优控制的重要性, 本文特意在模型中间设置一条高渗透率带横穿注水井I与生产井P2, 这样若不对生产过程中的注采参数进行优化控制, 则注水一段时间后便发生水的指进现象, 即大部分水只从生产井2流出, 其他区域大量原油得不到驱替, 最终严重影响注水开发的经济效益. 如考虑一个未对注采参数进行优化控制的参考生产方案, 即注水速率取定值260 m³/天, 生产井井底流压均取定值2.0 MPa, 生产1000 d后的含水饱和度分布如图2所示, 可明显地看出水的指进现象. 现采用本文所提出的新方法对注采参数进行最优化控制.

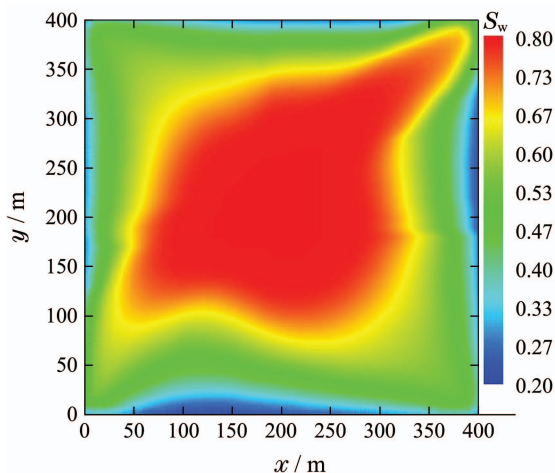


图 2 未优化的参考生产方案下的最终含水饱和度分布
Fig. 2 Final water saturation for the non-optimized reference case

5.2 优化结果(Optimization results)

本文中, 油价为1780元/m³, 产出水处理成本为330元/m³, 注水成本为165元/m³, 年度折现率为0.1. 时间步长为10天, 总的生产时间为1000天. 对于图2中的未对注采参数进行最优化控制的参考生产方案, 其总的生产净现值为2.180×10⁸元.

5.2.1 POD基函数的求解(Solutions of POD basis functions)

本文中, 注水速率在0 m³/天~360 m³/天范围内以50 m³/天为间隔选取了7个值, 每个生产井井底流压(i = 1, ..., 4)在0.2 MPa~4.5 MPa范围内从0.6 MPa开始以0.6 MPa为间隔选取了7个值. 为了使POD基函数尽可能全面地捕捉到原物理场的动力学特性, 理论上样本的数量是越多越好, 但对于控制参数较多的情况存在着巨大的工作量. 如选取上述所有控制参数组合下的样本, 则需要进行7⁵次全阶油藏数值模拟计算, 显然不切实际. 为了既能大幅度地降低选取样本的工作量, 又能较全面地捕捉到原物理场的动力学特性, 本文采用正交试验设计的方法^[22]来设计控制参数的组合用于选取样本. 对于本文的5因子7水平问题, 只需49个控制参数组合, 如表2所示. 分别计算各控制参数组合下对应于各时间步长的压力场和含水饱和度场作为样本, 对样本实施POD技术, 前5个特征值及其相应的能量分布如表3所示.

表 2 用于选取样本的控制参数组合方案

Table 2 Control parameter combination scheme for selecting samples

序号	q _w / (m ³ ·天 ⁻¹)	p _{wf1} / MPa	p _{wf2} / MPa	p _{wf3} / MPa	p _{wf4} / MPa
1	50	0.6	0.6	0.6	0.6
2	50	1.2	3.6	3.0	3.0
3	50	1.8	2.4	1.2	1.2
4	50	2.4	1.2	3.6	3.6
5	50	3.0	4.2	1.8	1.8
6	50	3.6	3.0	4.2	4.2
7	50	4.2	1.8	2.4	2.4
8	100	0.6	1.8	1.8	4.2
9	100	1.2	0.6	4.2	2.4
10	100	1.8	3.6	2.4	0.6
11	100	2.4	2.4	0.6	3.0
12	100	3.0	1.2	3.0	1.2
13	100	3.6	4.2	1.2	3.6
14	100	4.2	3.0	3.6	1.8
15	150	0.6	3.0	3.0	3.6
16	150	1.2	1.8	1.2	1.8
17	150	1.8	0.6	3.6	4.2
18	150	2.4	3.6	1.8	2.4

(转下页)

(接上页, 续表2)

序号	$q_w / (m^3 \cdot 天^{-1})$	p_{wf1} / MPa	p_{wf2} / MPa	p_{wf3} / MPa	p_{wf4} / MPa
19	150	3.0	2.4	4.2	0.6
20	150	3.6	1.2	2.4	3.0
21	150	4.2	4.2	0.6	1.2
22	200	0.6	4.2	4.2	3.0
23	200	1.2	3.0	2.4	1.2
24	200	1.8	1.8	0.6	3.6
25	200	2.4	0.6	3.0	1.8
26	200	3.0	3.6	1.2	4.2
27	200	3.6	2.4	3.6	2.4
28	200	4.2	1.2	1.8	0.6
29	250	0.6	1.2	1.2	2.4
30	250	1.2	4.2	3.6	0.6
31	250	1.8	3.0	1.8	3.0
32	250	2.4	1.8	4.2	1.2
33	250	3.0	0.6	2.4	3.6
34	250	3.6	3.6	0.6	1.8
35	250	4.2	2.4	3.0	4.2
36	300	0.6	2.4	2.4	1.8
37	300	1.2	1.2	0.6	4.2
38	300	1.8	4.2	3.0	2.4
39	300	2.4	3.0	1.2	0.6
40	300	3.0	1.8	3.6	3.0
41	300	3.6	0.6	1.8	1.2
42	300	4.2	3.6	4.2	3.6
43	350	0.6	3.6	3.6	1.2
44	350	1.2	2.4	1.8	3.6
45	350	1.8	1.2	4.2	1.8
46	350	2.4	4.2	2.4	4.2
47	350	3.0	3.0	0.6	2.4
48	350	3.6	1.8	3.0	0.6
49	350	4.2	0.6	1.2	3.0

表3 压力及含水饱和度的前5个特征值及对应的能量分布

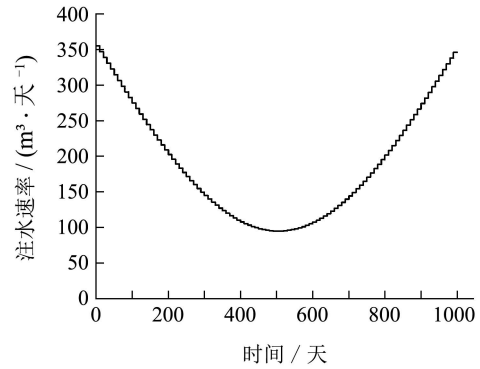
Table 3 The first five eigenvalues and corresponding energy distribution of pressure and water saturation

k	1	2	3	4	5	
λ^k	压力	27440.59	60.41	59.26	8.39	0.28
	含水饱和度	354.84	3.48	1.22	0.25	0.13
$\xi_M / \%$	压力	99.534	99.753	99.967	99.998	99.999
	含水饱和度	98.559	99.526	99.864	99.935	99.971

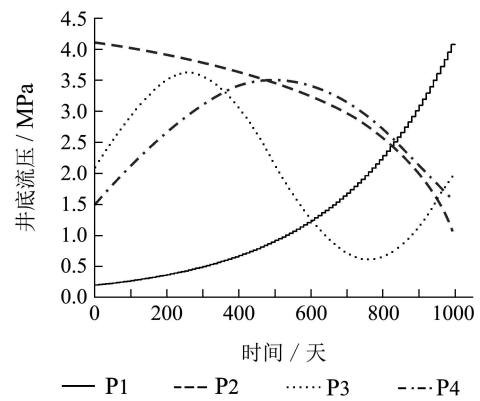
由表3可见, 仅前5个基函数便捕捉到了原物理场样本超过99.9%以上的能量. 在以下的模拟计算中, 压力和含水饱和度的POD基函数数量 M 均取5.

5.2.2 低阶模型准确性检验 (Accuracy test for reduced-order model)

为了检验低阶模型的准确性, 这里考虑一个控制参数在可变范围内任意变化的生产方案, 如图3所示. 采用低阶模型与全阶控制方程同时模拟该生产方案并比较所得结果的差异.



(a) 注水速率变化曲线



(b) 生产井井底流压变化曲线

图3 用于检验低阶模型准确性的生产方案

Fig. 3 Production case to examine the accuracy of reduced-order model

为了定量地检验精确度, 定义相对误差 E 为

$$E = \frac{|f - f_R|_2}{|f|_2} \times 100\%, \quad (26)$$

式中: $|\cdot|_2$ 为向量的2-范数, f 为全阶控制方程所求解的物理场, f_R 为低阶模型所求解的物理场.

图4给出了相对误差 E 随时间变化的曲线, 由图4可见, 在整个生产周期内, 低阶控制方程均能给出较高的求解精度. 对于含水饱和度, 平均相对误差为1.631%, 而对于压力, 平均相对误差仅为1.030%. 说明当控制参数在可变范围内任意变化时, 所求解的POD基函数仍可多次重复使用. 图5给出了1000 d时采用低阶控制方程所求解的含水饱和度场与采用全阶控制方程所得结果的对比, 由图可见, 它们并不存在明显差异.

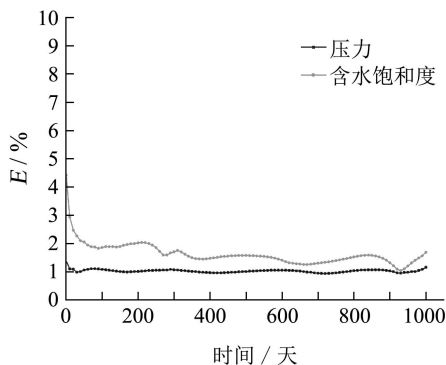
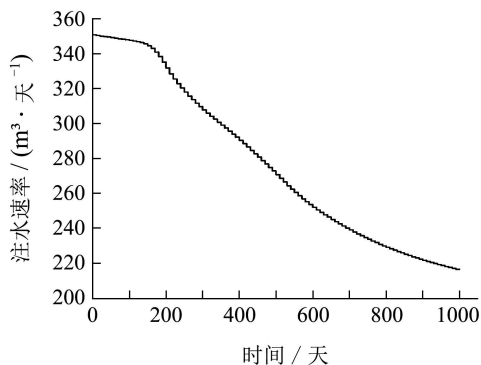
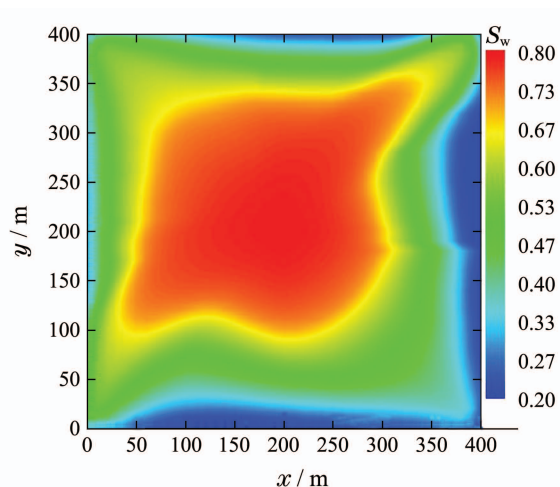


图 4 压力和含水饱和度的相对误差

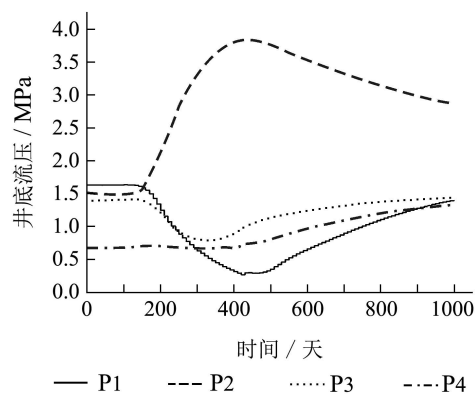
Fig. 4 Relative error of pressure and water saturation



(a) 最佳注水速率



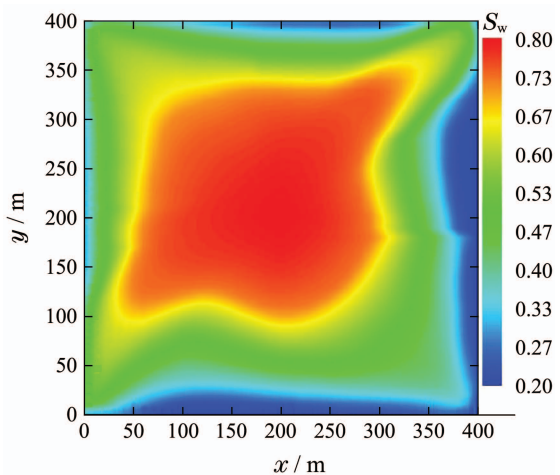
(a) 全阶控制方程求解结果



(b) 最佳生产井井底流压

图 6 最优控制参数

Fig. 6 The optimal well controls



(b) 低阶模型求解结果

图 5 最终含水饱和度场的对比

Fig. 5 Comparison of final water saturation

5.2.3 优化结果(Optimization results)

优化后的最优控制参数如图6所示. 优化后的最终含水饱和度如图7所示, 相比图2, 水的指进现象得到了明显的改善, 注入水较均匀地驱替着原油向生产井前进, 产出了更多的原油.

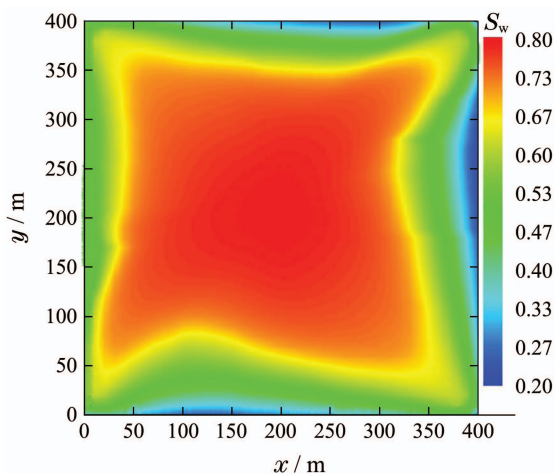


图 7 优化后的最终含水饱和度

Fig. 7 Final water saturation for the optimized case

经过优化后的累计产油量、产水量及注水量如图8所示, 累积生产净现值如图9所示. 由图8可见, 尽管优化后的累积注水量增加, 其增幅为6.917%, 使得注水成本增加, 但累积产油量有较大幅度增加, 与优化前相比增加了11.497%, 而累积产水量几乎无明显变化, 这使得生产净现值也有较大幅度地增加, 最终优化后的生产净现值为 2.483×10^8 元, 与优化前相比增加了13.899%.

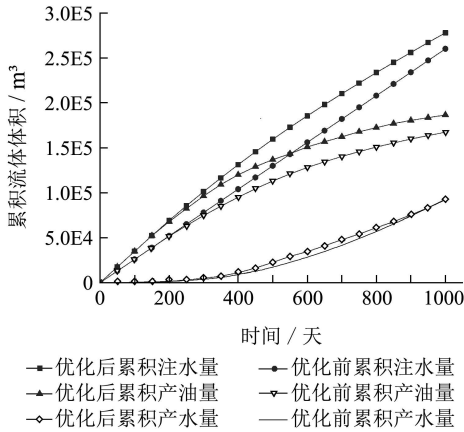


图8 优化前后的累计产液量及注水量
Fig. 8 Cumulative fluid injection and production before and after optimization

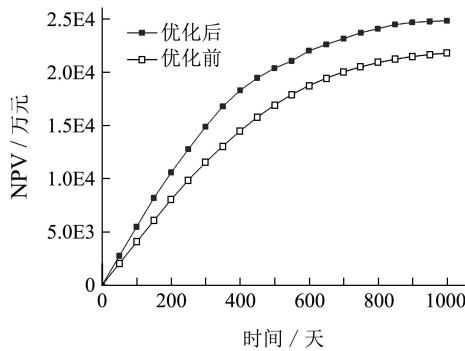


图9 优化前后的累积生产净现值
Fig. 9 Cumulative NPV before and after optimization

5.3 低阶与全阶优化结果对比(Comparison of optimization results for reduced-order and full-order models)

为了对比基于低阶模型的最优控制问题所求解精度与计算效率, 本文还采用了经典的伴随梯度法对上述油藏模型进行了优化. 这里只给出了伴随梯度法的优化结果, 具体实施过程可参见文献[7]. 图10给出了伴随梯度法的迭代求解过程, 经过18次迭代以后结果达到收敛, 其中收敛精度为 $c=0.1\%$, 即当前迭代层次的NPV与上一次迭代层次的NPV之差小于 c 时, 结果达到收敛.

表4给出了基于低阶模型的最优控制问题与伴随梯度法所求解的最终生产净现值, 由表4可见, 它们的结果相当接近, 前者达到后者的97.5%以上. 此外, 为

了对比它们的计算效率, 表4也给出了两种优化方法达到 2.483×10^8 元生产净现值时所需的计算时间, 由图10可见, 为达到该值, 伴随梯度法需8次迭代. 本文所采用计算机的CPU内存为8.00 G, 频率为3.30 GHz. 由表4可见, 新方法比伴随梯度法快30倍以上. 其中, 新方法的计算时间不包含采集样本及求解POD基函数过程所耗时间, 因这些过程与算法主体所占用的计算机内存不冲突, 可离线进行, 且对于生产过程中因各种经济参数变化而需要对后续生产的最优控制方案进行在线实时更新时, POD基函数无需重新求解, 可重复使用.

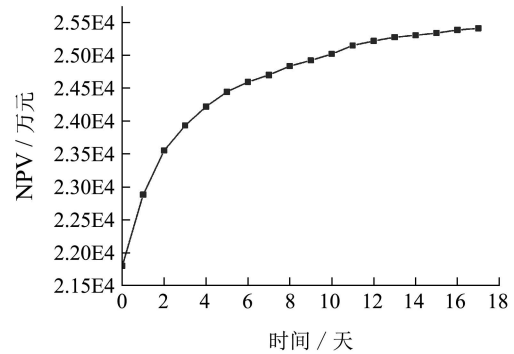


图10 伴随梯度法的生产净现值
Fig. 10 NPV vs. number of iterations for the adjoint-based gradient methodology

表4 基于低阶模型的最优控制问题与伴随梯度法优化结果对比

Table 4 Comparison of optimization results for reduced-order model based optimal control problem and adjoint-gradient based methodology

优化方法	NPV/万元	计算时间/s
基于低阶模型的最优控制问题	24830	516
伴随梯度法	25408	17654

为了进一步展示新方法计算效率的优势, 表5还给出了不同网格数下的优化结果对比. 由表5可见, 计算网格数越多, 计算速度优势越明显, 当网格数为 70×70 时, 比伴随梯度法快60倍以上. 同时, 表5的结果也表明: 在不同网格数下, 两种方法所求解的最优生产净现值误差均未超过2.5%.

表5 不同网格数下两种方法的优化结果对比

Table 5 Comparison of optimization results for two methodologies under different grid numbers

优化结果	NPV/万元		计算时间/s	
	伴随梯度法	基于低阶模型的最优控制问题	伴随梯度法	基于低阶模型的最优控制问题
50×50	25488	24922	24760	584
60×60	25532	24990	34668	658
70×70	25566	25066	47892	736

6 结论(Conclusions)

本文采用POD技术提出了基于低阶模型的油藏注水开发最优控制问题, 基于该方法, 油藏注水开发最优控制问题被转化为一个仅以少量POD系数作为优化变量的非线性规划问题. 以二维五点井网的一个井组为应用实例, 优化结果表明:

1) 优化结果能够较大幅度地提高油藏注水开发的生产净现值, 与本文中未优化的参考生产方案相比, 生产净现值增加了13.899%, 证明了该方法的正确性与可行性;

2) 与伴随梯度法相比, 优化结果仅相差不到2.5%;

3) 相对于伴随梯度法, 当网格数为 40×40 时, 可提高计算速度30倍以上, 且计算网格数越多, 计算速度优势越明显, 当网格数为 70×70 时, 可提高60倍以上. 该方法为促进智能油田技术的开发与实施提供了理论支撑, 作为一种有效的辅助手段具有一定的推广和应用潜力.

参考文献(References):

- [1] WU Shouzhong. Discrete-time optimal control-comments on dynamic programming [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1565 – 1569.
(吴受章. 离散时间最优控制—评论动态规划 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(9): 1565 – 1569.)
- [2] BROUWER D R, JANSEN J D. Dynamic optimization of water flooding with smart wells using optimal control theory [J]. *SPE Journal*, 2004, 9(4): 391 – 402.
- [3] DOUBLET D C, AANONSEN S I, TAI X C. An efficient method for smart well production optimization [J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2009, 69(1): 25 – 39.
- [4] FOROUZANFAR F, DELLA ROSSA E, RUSSO R, et al. Life-cycle production optimization of an oil field with an adjoint-based gradient approach [J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2013, 112(11): 351 – 358.
- [5] JANSEN J D. Adjoint-based optimization of multi-phase flow through porous media—a review [J]. *Computers & Fluids*, 2011, 46(1): 40 – 51.
- [6] ZHAO H, CHEN C, DO S T, et al. Maximization of a dynamic quadratic interpolation model for production optimization [J]. *SPE Journal*, 2013, 18(6): 1012 – 1025.
- [7] ZHANG Kai, LI Yang, YAO Jun, et al. Theoretical research on production optimization of oil reservoirs [J]. *Acta Petrolei Sinica*, 2010, 31(1): 78 – 83.
(张凯, 李阳, 姚军, 等. 油藏生产优化理论研究 [J]. 石油学报, 2010, 31(1): 78 – 83.)
- [8] BERKOOZ G, HOLMES P, LUMLEY J L. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows [J]. *Annual review of fluid mechanics*, 1993, 25(1): 539 – 575.
- [9] SINGH S J, CHATTERJEE A. Galerkin projections and finite elements for fractional order derivatives [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2006, 45(1/2): 183 – 206.
- [10] DIF M, KNAPPSTEIN R. Statistical analysis of the flow characteristics and cyclic variability using proper orthogonal decomposition of highly resolved LES in internal combustion engines [J]. *Computers & Fluids*, 2014, 105(10): 101 – 112.
- [11] UTTURKAR Y, ZHANG B, SHYY W. Reduced-order description of fluid flow with moving boundaries by proper orthogonal decomposition [J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2005, 26(2): 276 – 288.
- [12] DING Peng, TAO Wenquan. Fast algorithm for prediction of fluid flow and heat transfer [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2007, 41(3): 271 – 273.
(丁鹏, 陶文铨. 一种预测流动和传热问题的快速算法 [J]. 西安交通大学学报, 2007, 41(3): 271 – 273.)
- [13] WELLER J, LOMBARDI E, BERGMANN M, et al. Numerical methods for low-order modeling of fluid flows based on POD [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2010, 63(2): 249 – 268.
- [14] SUN Xianhang, XU Minghai, GONG Liang, et al. A fast POD-based method for predicting oil and water flow in water-drive reservoir [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, 36(12): 1228 – 1237.
(孙宪航, 徐明海, 巩亮, 等. 预测水驱油藏中油、水流动问题的快速方法 [J]. 应用数学和力学, 2015, 36(12): 1228 – 1237.)
- [15] KRYSL P, LALL S, MARSDEN J E. Dimensional model reduction in non-linear finite element dynamics of solids and structures [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 51(4): 479 – 504.
- [16] DING Peng, TAO Wenquan. Reduced order model based algorithm for inverse convection heat transfer problem [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2009, 43(3): 14 – 16.
(丁鹏, 陶文铨. 求解对流换热反问题的低阶模型 [J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(3): 14 – 16.)
- [17] WINTON C, PETTWAY J, KELLEY C T, et al. Application of proper orthogonal decomposition (POD) to inverse problems in saturated groundwater flow [J]. *Advances in Water Resources*, 2011, 34(12): 1519 – 1526.
- [18] LY H V, TRAN H T. Modeling and control of physical processes using proper orthogonal decomposition [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2001, 33(1): 223 – 236.
- [19] TALLET A, ALLERY C, ALLARD F. POD approach to determine in real-time the temperature distribution in a cavity [J]. *Building and Environment*, 2015, 93(11): 34 – 49.
- [20] LI Shuxia, GU Jianwei. *Basis of Numerical Reservoir Simulation* [M]. Shandong: China University of Petroleum Press, 2008: 178 – 179.
(李淑霞, 谷建伟. 油藏数值模拟基础 [M]. 山东: 中国石油大学出版社, 2008: 178 – 179.)
- [21] SIROVICH L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. part I: coherent structures [J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1987, 45(3): 561 – 571.
- [22] CHANG Zhaoguang, WANG Qinghe, DU Caifeng. *Applied Statistical Methods* [M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 2009: 166 – 180.
(常兆光, 王清河, 杜彩凤. 应用统计方法 [M]. 北京: 石油工业出版社, 2009: 166 – 180.)

作者简介:

徐海明 (1964–), 男, 博士, 教授, 研究领域包括流体流动与传热的数值计算, E-mail: minghai@upc.edu.cn;

孙宪航 (1987–), 男, 博士研究生, 研究领域包括流体流动与传热的最优控制及反问题研究, E-mail: sxh19871124@163.com;

巩亮 (1980–), 男, 博士, 研究领域包括微纳米尺度传热传质分析及油藏数值模拟, E-mail: lgong@upc.edu.cn;

贾欣鑫 (1983–), 男, 博士, 研究领域包括流动与数值传热计算以及稠油热力开采技术, E-mail: upcjsx@163.com;

王政 (1991–), 男, 硕士研究生, 研究领域包括油田加热炉结构设计及强化换热研究, E-mail: 1406259747@qq.com;

李会明 (1991–), 男, 硕士研究生, 研究领域为油藏数值模拟, E-mail: barcelonelove@163.com.