第34卷第5期 控制理论与应用 Vol. 34 No. 5
2017年5月 Control Theory & Applications May 2017

DOI: 10.7641/CTA.2017.60240

三类不动点与一类随机动力系统的稳定性

王春生[1†], 李永明[2]

(1. 广州大学华软软件学院 管理系, 广东 广州 510990;

2. 上饶师范学院 数学与计算机科学学院, 江西 上饶 334001)

摘要: 不动点理论已被成功地应用于随机动力系统零解稳定性的研究, 但Krasnoselskii不动点方法使用的较少. 本文在采用Banach和Schauder不动点方法研究的基础上进一步采用Krasnoselskii不动点方法研究了一类随机动力系统零解的指数均方稳定性, 得出了使得该系统零解指数均方稳定的充分条件. 通过实例与现有文献结论的比较表明, 相比于Banach和Schauder等不动点方法, Krasnoselskii不动点方法的应用更加灵活和简便. 本文的结论在一定程度上改进和拓展了相关文献的结果, 完善了不动点理论在研究随机动力系统零解稳定性上的应用.

关键词: 动力系统; 稳定性; 不动点理论; Krasnoselskii不动点方法; 全连续

中图分类号: O231.3 **文献标识码**: A

Three kinds of fixed points and stability of a class of stochastic dynamic systems

WANG Chun-sheng[1†], LI yong-ming[2]

(1. Department of Management, South China Institute of Software Engineering, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong 510990, China;

2. School of Mathematics & Computer Science, Shangrao Normal University, Shangrao Jiangxi 334001, China)

Abstract: The fixed point theory has been successfully applied onto the study of zero solution stability for stochastic dynamic systems; however, the Krasnoselskii fixed point is relatively less used. In this paper, on the basis of the study for Banach and Schauder fixed point methods, we furtherly use the Krasnoselskii fixed point method to study the mean square exponential stability of zero solution in a class of stochastic dynamic systems. At the same time, we have achieved sufficient condition to make the zero solution exponential mean square of this system stable. Through the comparison of the detailed example and the conclusion in the existing articles, and comparing with Banach and Schauder fixed point methods, the Krasnoselskii fixed point is more flexible and more convenient. The conclusion in this paper has improved and extended the result of relative articles to some extent, as well as has perfected the application of fixed point methods on studying stability of zero solution in stochastic dynamical system.

Key words: dynamical system; stability; fixed point theory; Krasnoselskii fixed point; completely continuous

1 引言(Introduction)

目前, 学术界研究确定型和随机型动力系统解的存在性、有界性和零解的稳定性所采用的方法主要是Lyapunov直接法和不动点方法. 鉴于Lyapunov直接法在研究确定型和随机型动力系统时遇到的困难, 很多专家和学者都采用不动点方法和其他方法进行研究, 得到了很优异的结果. 如T A Burton在文献[1–4]中利用不动点方法讨论研究了动力系统的解的存在性、周期性、有界性和稳定性; 罗交晚在文献[5]中第1次将不动点方法引进到研究随机动力系统的稳定性上去; 毛学荣还在文献[6]中采用其他方法研究了一类随机积分动力系统的指数均方稳定性. 作为此方法的推广, 作者在文献[7–11]中也已经研究多种类型的随机动力系统的稳定性. 据查阅资料得知, 很多不动点方法如Banach不动点方法、Schauder不动点方法和Krasnoselskii不动点方法等都被应用于研究动力系统零解的

收稿日期: 2016–04–20; 录用日期: 2017–03–21.

†通信作者. E-mail: paperspring@163.com; Tel.: +86 13501501806.

本文责任编委: 邓飞其.

国家自然科学基金项目(11061029), 广东省自然科学基金项目(2016A030313542), 广东省普通高校青年创新人才项目(自然科学)(2015KQNCX200)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (11061029), Guangdong Natural Science Foundation of China (2016A030313542) and Guangdong Province Youth Innovative Talents Project (Natural Sciences) (2015KQNCX200).

稳定性. 其中, 鉴于Banach不动点方法应用的简便性, 在研究动力系统零解的稳定性时, Banach不动点方法应用得最为广泛. 如前面提到的文献[1–11]. 再者, 据作者所知, Krasnoselskii不动点方法被应用于常微分方程和泛函微分方程周期解的存在性、有界性和稳定性方法的研究比较多, 如文献[12–14], 但是被应用于随机动力系统零解稳定性的研究则较少. 为了弥补这方面的研究, 本文尝试采用Krasnoselskii不动点方法研究一类随机动力系统零解的稳定性. 旨在对不动点方法的应用做进一步完善和推广.

2 主要结果(Main result)

假设$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$是一个完备的概率空间, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$右连续且包含所有的零测集, $\{\omega(t),t\geqslant 0\}$是一个定义在$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一维标准布朗运动, 函数$a(t)\in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. 考虑一类随机动力系统

$$\mathrm{d}x(t)=a(t)x(t)\mathrm{d}t+\int_0^t G(t-s)x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}w(t),\ t\geqslant 0, \quad (1)$$

其中: $G:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, 初值$x(0)=\xi$可测且$\mathrm{E}|\xi|^2<\infty$.

2.1 预备知识(Preliminary knowledge)

引理 A[15] 每一个一致均方有界和均方等度连续的函数集$(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$对$t\in T$至少存在一$T$上均方收敛的子序列.

引理 B[16] 设X是度量空间, A是X中的子集, 如果A中的任何点列必有在X中收敛的子点列, 就称A是X中的致密集.

引理 C[17–18] 设T是B映射到B的一个连续算子, 如果它把B中的任何有界集映成致密集, 则称T是全连续算子.

Banach不动点定理[18] 设T是完备的距离空间(X,ρ)到自身的压缩映射, 则存在唯一的$x\in X$, 使得$Tx=x$, 即T在X上有唯一的不动点.

Schauder不动点定理[18] 若K是Banach空间B的一凸闭子集, 而$\tau:K\to K$是全连续的, 则存在$x^*\in K$使得$\tau x^*=x^*$.

Krasnoselskii不动点定理[17] 设K是Banac空间B的有界凸闭子集, 而$\tau,s:K\to B$, 满足

1) 对任何$x,y\in K$, 有$\tau x+sy\in K$;

2) τ是压缩映射;

3) s在K上全连续, 则$\tau+s$在K内至少存在一个不动点.

比较上述3个不动点定理可以得出:

1) 3个不动点方法都要求算子是自映射的;

2) Bananch不动点方法要求算子是压缩映射算子, schauder不动点方法则要求算子是全连续的. 相比之下, Krasnoselskii不动点方法则可以根据需要将算子拆分为2个算子的和, 并保证其中一个算子满足压缩映射, 而另一个算子则满足全连续映射.

综上, 不难看出Bananch不动点方法和Schauder不动点方法是Krasnoselskii不动点方法的特殊情形. 并且, Krasnoselskii不动点方法在使用时更加灵活.

引理 D[10] 每一个一致均方有界和均方等度连续的函数集$\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\}$对$t\in T$至少存在一$T$上均方收敛的子序列.

2.2 已有的结论(Existing conclusion)

毛学荣在文献[6]中研究了系统(1)的指数均方稳定性得出引理1.

引理 1 假设存在一个$d\times d$对称矩阵Q和正常数$\lambda,\alpha,\beta,\gamma$使得, 当$t\geqslant 0$时,

i) $|x|^2\leqslant(x,Qx),\ x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$;

ii) $2(f(x,t),Qx)\leqslant-\lambda(x,Qx),\ x\in\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$;

iii) $\mathrm{tr}(g(y,t)^{\mathrm{T}}Qg(y,t))\leqslant\alpha|y|^2,\ y\in\mathbb{R}^n$;

iv) $\|G(t)\|\leqslant\beta\mathrm{e}^{-\gamma t},\ t\geqslant 0$;

v) $\alpha\beta^2<\lambda\gamma^2$.

则存在一对正数ρ和C使得, 当$t\geqslant 0$时,

$$\mathrm{E}|x(t)|^2\leqslant C\mathrm{E}|\xi|^2\mathrm{e}^{-\rho t}.$$

换句话说就是系统(1)的零解指数均方稳定.

基于不动点方法的优越性, 作者已在文献[7,10]中分别采用Banach不动点方法和schauder不动点方法研究过系统(1)的指数均方稳定性, 得出引理2–3的结论.

引理 2[7] 假设存在正数$\beta,M_0,\gamma,\kappa,M$和$\eta\in(0,1),\kappa>M>0$以及连续函数$h(t):[0,\infty)\to\mathbb{R}^+$, 当$t\geqslant 0$时,

i) $\mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}|a(s)+h(s)|\leqslant M\mathrm{e}^{-\kappa(t-s)},\ 0\leqslant s<t$;

ii) $\sup\limits_{t\geqslant 0}\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(r-t)}\mathrm{e}^{-2\int_r^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}r\leqslant M_0$;

iii) $\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}|a(s)+h(s)|\mathrm{d}s+\frac{\beta}{\gamma}[\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s]^{\frac{1}{2}}\leqslant\eta<1$;

iv) $|G(t)|\leqslant\beta\mathrm{e}^{-\gamma t}$.

则系统(1)的零解$x(t)$指数均方稳定.

引理 3[10] 假设存在正数$\kappa,\beta,M,M_0,\gamma$和连续有界函数$h(t):[0,\infty)\to\mathbb{R}^+$, 当$t\geqslant 0$时,

i) $\mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}|a(s)+h(s)|\leqslant M\mathrm{e}^{-\kappa(t-s)},\ 0\leqslant s\leqslant t$;

ii) $\sup\limits_{t\geqslant 0}\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(r-t)}\mathrm{e}^{-2\int_r^t h(u)\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}r\leqslant M_0$;

iii) $|G(t)|\leqslant\beta\mathrm{e}^{-\gamma t}$.

则系统(1)的零解$x(t)$指数均方稳定.

鉴于Krasnoselskii不动点方法的灵活性, 接下来,

这里将利用Krasnoselskii不动点方法来研究系统(1)零解的指数均方稳定性.

2.3 结论(Conclusions)

定义$\mathcal{S}$为所有$\mathcal{F}-$适应过程$\phi(t,\omega):[0,\infty)\times\Omega\to R$所构成的Banach空间, 且对固定的$\omega\in\Omega$, $\phi(t,\omega)$关于t几乎处处连续, 其初值$\phi(0)=\xi$. 当$t\to\infty$时, 存在常数α满足$0<\alpha<\gamma$, 使得当$t\to\infty$时, $\mathrm{e}^{\alpha t}\times\mathrm{E}|\phi(t,\omega)|^2\to 0$.

定义算子$\Psi=\zeta+\tau$, 其中$\zeta,\tau:S\to S$. 对任意的$\varphi(t)\in\mathcal{S}$, 令

$$\zeta(\varphi(t))=\xi\mathrm{e}^{-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}+\int_0^t[a(s)+h(s)]\varphi(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s,$$

$$\tau(\varphi(t))=\int_0^t\Big(\int_0^s G(s-r)\varphi(r)\mathrm{d}r\Big)\times\mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}\omega(s).$$

由于Krasnoselskii不动点方法将构造的算子拆分成全连续算子和压缩算子之和. 所以, 对于上述构造的算子, 文章就有两种选择方向, 这将得出下列两种不同的稳定性条件.

第1种情况: 如果给出条件保证$\zeta(\varphi(t))$是全连续算子, 且$\tau(\varphi(t))$是压缩算子, 这样就可以得出如下结论:

定理 1 假设存在正数β,M,γ,M_0和连续函数$h(t):[0,\infty)\to R$, 满足$M_0\geqslant h(t)\geqslant M>\gamma/2$. 且当$t\geqslant 0$时, $|a(t)+h(t)|$有界, $|G(t)|\leqslant\beta\mathrm{e}^{-\gamma t}$和$\beta^2/(2M\gamma^2)<1$, 则系统(1)的零解$x(t)$指数均方稳定.

证 1) $\mathcal{S}$是一个凸闭集.

对任意的$x_1,x_2,\cdots,x_n\in S$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1,$$

对任意$\varepsilon>0$, 存在$T_i>0$, 当$t>T_i$时, $\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{E}|x_i(t)|^2<\varepsilon$.

令$T=\max\{T_i, i=1,2,\cdots,n\}$, 则当$t>T$时,

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{E}|\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i(t)|^2<\varepsilon\sum_{i=1}^n\lambda_i=\varepsilon,$$

即$\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i x_i(t)\in S$.

由凸闭集的定义知, $\mathcal{S}$是一个凸闭集.

2) 由文献[7]中定理1的证明过程易知, 对任意φ, $\psi\in\mathcal{S}$, 都有$\zeta\varphi+\tau\psi\in\mathcal{S}$.

3) ζ是$\mathcal{S}$上的全连续算子.

任取$\mathcal{S}$的有界子集H. 根据引理C只须证明$P(H)$为紧致集即可.

先证$\zeta(H)$均方等度连续. 如果$\varphi\in H$, $0\leqslant t_1<t_2$, 则

$$\begin{aligned}&|(\zeta\varphi)(t_2)-(\zeta\varphi)(t_1)|^2\leqslant\\&2\{\mathrm{E}|\xi\mathrm{e}^{-\int_0^{t_2}h(u)\mathrm{d}u}-\xi\mathrm{e}^{-\int_0^{t_1}h(u)\mathrm{d}u}|^2+\\&\mathrm{E}|\int_0^{t_2}[a(s)+h(s)]\varphi(s)\mathrm{e}^{-\int_s^{t_2}h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s-\\&\int_0^{t_1}[a(s)+h(s)]\varphi(s)\mathrm{e}^{-\int_s^{t_1}h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|^2\}\leqslant\\&2\mathrm{E}|\xi|^2|\mathrm{e}^{-\int_0^{t_2}h(u)\mathrm{d}u}-\mathrm{e}^{-\int_0^{t_1}h(u)\mathrm{d}u}|^2+\\&2\mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant t_2}|\varphi(t)|^2)|\int_0^{t_2}[a(s)+h(s)]\times\\&\mathrm{e}^{-\int_s^{t_2}h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s-\\&\int_0^{t_1}[a(s)+h(s)]\mathrm{e}^{-\int_s^{t_1}h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|^2.\end{aligned}\tag{2}$$

因为当$x_1,x_2<0$时, 有$|\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}|<|x_1-x_2|$. 所以由定理1的条件得

$$\begin{aligned}&2\mathrm{E}|\xi|^2|\mathrm{e}^{-\int_0^{t_2}h(u)\mathrm{d}u}-\mathrm{e}^{-\int_0^{t_1}h(u)\mathrm{d}u}|^2\leqslant\\&2\mathrm{E}|\xi|^2|\int_0^{t_2}h(u)\mathrm{d}u-\int_0^{t_1}h(u)\mathrm{d}u|^2=\\&2\mathrm{E}|\xi|^2|\int_{t_1}^{t_2}h(u)\mathrm{d}u|^2\leqslant 2\mathrm{E}|\xi|^2M_0^2|t_2-t_1|^2.\end{aligned}\tag{3}$$

同时, 由定理1的条件知, $|a(s)+h(s)|$有界, 不妨设$|a(s)+h(s)|\leqslant M_1$, $M_1>0$.

$$\begin{aligned}&|\int_0^{t_2}[a(s)+h(s)]\mathrm{e}^{-\int_s^{t_2}h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s-\\&\int_0^{t_1}[a(s)+h(s)]\mathrm{e}^{-\int_s^{t_1}h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|^2\leqslant\\&M_1^2|\int_0^{t_2}\mathrm{e}^{-\int_s^{t_2}h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s-\\&\int_0^{t_1}\mathrm{e}^{-\int_s^{t_1}h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|^2=\\&M_1^2|\int_0^{t_1}(\mathrm{e}^{-\int_s^{t_2}h(u)\mathrm{d}u}-\mathrm{e}^{-\int_s^{t_1}h(u)\mathrm{d}u})\mathrm{d}s+\\&\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{-\int_s^{t_2}h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|^2\leqslant\\&M_1^2|\int_0^{t_1}\Big(\int_{t_1}^{t_2}h(u)\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{-\int_s^{t_2}h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|^2\leqslant\\&M_1^2|\int_0^{t_1}M_0(t_2-t_1)\mathrm{d}s+\frac{1}{M}-\frac{1}{M}\mathrm{e}^{-M(t_2-t_1)}|^2\leqslant\\&M_1^2|M_0t_1(t_2-t_1)+(t_2-t_1)|^2=\\&M_1^2(M_0t_1+1)^2|t_2-t_1|^2,\end{aligned}\tag{4}$$

所以, 对任意$0\leqslant t_1<t_2<\infty$和$\varphi\in H(S)$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}|(\zeta\varphi)(t_2)-(\zeta\varphi)(t_1)|^2\leqslant\\&\{2\mathrm{E}|\xi|^2M_0^2+2M_1^2(M_0t_1+1)^2\times\\&(\mathrm{E}\sup_{t\geqslant 0}|\varphi(t)|^2)\}|t_2-t_1|^2,\end{aligned}$$

即$P(H)$等度均方连续.

同时, $\zeta(H)$一致均方有界. 对任意$t\geqslant 0$, $\varphi(t)\in$

S, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}|(\zeta\varphi)(t)|^2=\\&\mathrm{E}|\xi\mathrm{e}^{-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}+\int_0^t[a(s)+h(s)]\times\\&\varphi(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|^2\leqslant\\&2\mathrm{E}|\xi|^2\mathrm{e}^{-2\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}+\\&2\mathrm{E}|\int_0^t[a(s)+h(s)]\varphi(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|^2,\end{aligned}\tag{5}$$

其中:

$$2\mathrm{E}|\xi|^2\mathrm{e}^{-2\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}\leqslant 2\mathrm{E}|\xi|^2\mathrm{e}^{-2Mt}<2\mathrm{E}|\xi|^2,$$

$$\begin{aligned}&2\mathrm{E}|\int_0^t[a(s)+h(s)]\varphi(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|^2\leqslant\\&2\sup_{t\geqslant 0}\mathrm{E}|\varphi(t)|^2|\int_0^t[a(s)+h(s)]\mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|^2\leqslant\\&2M_1^2\mathrm{E}\sup_{t\geqslant 0}|\varphi(t)|^2|\int_0^t\mathrm{e}^{-M(t-s)}\mathrm{d}s|^2\leqslant\\&\frac{2M_1^2}{M^2}\mathrm{E}\sup_{t\geqslant 0}|\varphi(t)|^2.\end{aligned}\tag{6}$$

综上所述,

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}|(\zeta\varphi)(t)|^2\leqslant\\&2\mathrm{E}|\xi|^2\mathrm{e}^{-2\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}+\\&2\mathrm{E}|\int_0^t[a(s)+h(s)]\varphi(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|^2<\\&2\mathrm{E}|\xi|^2+\frac{2M_1^2}{M^2}\mathrm{E}\sup_{t\geqslant 0}|\varphi(t)|^2,\end{aligned}\tag{7}$$

故$\zeta(H)$一致均方有界.

所以$\zeta(H)$为紧致集. 由引理C知, ζ是$\mathcal{S}$上的全连续算子.

4) τ是压缩算子.

对任意的$\varphi,\psi\in\mathcal{S}$, 由定理1的条件知

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\sup_{s\in[0,t]}|(\tau\varphi)(s)-(\tau\psi)(s)|^2=\\&\mathrm{E}\sup_{s\in[0,t]}|\int_0^s(\int_0^v G(v-r)\varphi(r)\mathrm{d}r)\times\\&\mathrm{e}^{-\int_v^s h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}\omega(v)-\\&\int_0^s(\int_0^v G(v-r)\psi(r)\mathrm{d}r)\mathrm{e}^{-\int_v^s h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}\omega(v)|^2=\\&\mathrm{E}\sup_{s\in[0,t]}|\int_0^s(\int_0^v G(v-r)[\varphi(r)-\psi(r)]\mathrm{d}r)\times\\&\mathrm{e}^{-\int_v^s h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}\omega(v)|^2\leqslant\\&\mathrm{E}\sup_{s\in[0,t]}\int_0^s(\int_0^v G(v-r)[\varphi(r)-\psi(r)]\mathrm{d}r)^2\\&\mathrm{e}^{-2\int_v^s h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}v\leqslant\\&\mathrm{E}\sup_{s\in[0,t]}|\varphi(s)-\psi(s)|^2\int_0^s(\int_0^v G(v-r)\mathrm{d}r)^2\\&\mathrm{e}^{-2\int_v^s h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}v\leqslant\\&\frac{\beta^2}{\gamma^2}\mathrm{E}\sup_{s\in[0,t]}|\varphi(s)-\psi(s)|^2\int_0^s\mathrm{e}^{-2\int_v^s h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}v\leqslant\\&\frac{\beta^2}{2M\gamma^2}\mathrm{E}\sup_{s\in[0,t]}|\varphi(s)-\psi(s)|^2,\end{aligned}\tag{8}$$

所以, τ为$\mathcal{S}$上的压缩算子.

根据前面的证明, 再由Krasnoselskii不动点定理知, $\Psi=\zeta+\tau$在$\mathcal{S}$上至少存在一个不动点$x(t)$, 即为系统(1)的解. 由$\mathcal{S}$集合的定义知, 系统(1)的零解指数均方稳定.

注 1 不难看出, 定理1的结论和引理3的结论近乎相同.

第2种情况: 如果给出条件保证$\zeta(\varphi(t))$是全连续算子且$\tau(\varphi(t))$是压缩算子, 这样就得出如下结论:

定理 2 假设存在正数β,M,γ,η,M_0和连续函数$h(t):[0,\infty)\to\mathbb{R}$, 当$t\geqslant 0$时,

i) $\mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}|a(s)+h(s)|\leqslant M\mathrm{e}^{-\kappa(t-s)}, 0\leqslant s<t$;

ii) $|G(t)|\leqslant\beta\mathrm{e}^{-\gamma t}$;

iii) $\sup\limits_{t\geqslant 0}\int_0^t\mathrm{e}^{-\gamma(r-t)}\mathrm{e}^{-2\int_r^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}r\leqslant M_0$;

iv) $\frac{\beta}{\gamma}[\int_0^t\mathrm{e}^{-2\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s]^{\frac{1}{2}}\leqslant\eta<1$.

则系统(1)的零解$x(t)$ 指数均方稳定.

证 由定理1的证明过程知, $\mathcal{S}$是一个凸闭集且$\zeta\varphi+\tau\psi\in\mathcal{S}$. 由引理3的证明过程知, τ是$\mathcal{S}$上的全连续算子.

同时, 由引理2的证明过程和定理2的条件知, ζ是压缩算子.

由Krasnoselskii不动点定理知, $\Psi=\zeta+\tau$在$\mathcal{S}$上至少存在一个不动点$x(t)$, 即为系统(1)的解. 由$\mathcal{S}$集合的定义, 系统(1)的零解指数均方稳定.

注 2 不难看出, 在研究系统(1)的稳定性时, 定理2没有要求$h(s)$有界, 相对于引理3具有明显的优越性.

注 3 定理2的条件中, 除条件iv)外, 其他条件与引理2的条件完全相同. 但是, 定理2的条件iv)要比引理2的对应条件iii)宽松的多.

小结 从定理1和定理2的结论以及注1–3可以看出, 在研究系统(1)零解的指数均方稳定性时, Krasnoselskii不动点方法所得的结论灵活又宽松.

下面通过几个具体实例加以佐证说明.

3 实例(Examples)

下面通过几个实例来对上述3种不动点方法研究得出的结果进行分析比较.

例 1　考虑如下随机动力系统:

$$\mathrm{d}x(t) = -(\cos t+2)x(t)\mathrm{d}t+ \int_0^t \frac{1}{4e}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t-s)}x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\omega(t),\ t\geqslant 0. \qquad (9)$$

① 令$h(t)\equiv\cos t+2$, 因为

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(s-t)}\mathrm{e}^{-2\int_s^t(\cos\mu+2)\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}s = \sup_{t\geqslant 0}\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{7}{2}(t-s)}\mathrm{e}^{2\sin s-2\sin t}\mathrm{d}s\leqslant \frac{2}{7}\mathrm{e}^4,$$

$$\frac{1/16\mathrm{e}^2}{1/4}\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t(\cos\mu+2)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s = \frac{1}{4\mathrm{e}^2}\int_0^t \mathrm{e}^{-2(\sin t-\sin s)}\mathrm{e}^{-4(t-s)}\mathrm{d}s\leqslant \frac{\mathrm{e}^4}{4\mathrm{e}^2}\int_0^t \mathrm{e}^{-4(t-s)}\mathrm{d}s\leqslant\frac{\mathrm{e}^2}{16}<1.$$

所以, 由引理2易知、引理3和定理2知, 系统(9)的零解指数均方稳定.

② 令$h(t)\equiv\cos\, t+2$, 取$M_0=3,\ M=1,\ \beta=1/(2e),\ \gamma=1/2$, 则定理1的条件都能满足. 所以, 由定理1易知, 系统(9)的零解指数均方稳定.

注 4　但是, 不存在$\lambda>0$, 使得对任意的$t\geqslant 0$, 都有$a(t)=\cos\, t+1\geqslant\lambda$. 即由文献[6]不能得到该系统的指数均方稳定性.

注 5　从例1不难看出：某些情况下, 采用不动点方法得出的结论较其他方法优越.

例 2　考虑下面随机动力系统:

$$\mathrm{d}x(t) = -(t^2+1)x(t)\mathrm{d}t+ (\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}x(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}\omega(t). \qquad (10)$$

① 如果取$h(t)=t^2+1,\ M_0=\beta=\gamma=1$, 因为

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_0^t \mathrm{e}^{-(s-t)}\mathrm{e}^{-2\int_s^t(u^2+1)\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}s\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)}\mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}s = \sup_{t\geqslant 0}\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\mathrm{d}s\leqslant 1,$$

再者

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t(u^2+1)\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t \mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{2},$$

满足定理2的所有条件, 所以由定理2易知, 系统(10)的零解指数均方稳定.

注 6　但是, 找不到有界的h(t)满足引理3的条件, 所以由引理3得不出系统(10)零解的指数均方稳定性.

注 7　从例2可看出: 由于引理3要求引入的$h(t)$有界, 所以利用Krasnoselskii不动点方法所得结论较Shauder的好.

例 3　考虑下面随机动力系统:

$$\mathrm{d}x(t)=x(t)\mathrm{d}t+(\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)}x(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}\omega(t). \qquad (11)$$

令$h(t)\equiv 1$,

① 如果取$M=M_0=\beta=\gamma=1$, 显然系统(11)满足定理1的条件, 所以由定理1可以得出系统(11)的零解指数均方稳定.

② 如果取$M=2, M_0=\kappa=\beta=\gamma=1$, 因为

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_0^t \mathrm{e}^{-(r-t)}\mathrm{e}^{-2\int_r^t 1\mathrm{d}u}\mathrm{d}r = 1-\mathrm{e}^{-t}\leqslant 1,$$

$$[\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t 1\mathrm{d}u}\mathrm{d}s]^{1/2} = [\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2t})]^{1/2}\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}<1,$$

所以, 由定理2易知, 系统(11)的零解指数均方稳定.

注 8　在引理2中, 由于$h(t):[0,\infty)\to\mathbb{R}^+$, $a(t)=1$, 所以有

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}|a(s)+h(s)|\mathrm{d}s+ [\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s]^{1/2} = \\
&\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}h(s)\mathrm{d}s+ [\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s]^{1/2} = \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+ \\
&\int_0^t \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u})+[\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s]^{1/2} = \\
&1-\mathrm{e}^{-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+ [\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s]^{1/2}= \\
&1-\mathrm{e}^{-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}+\mathrm{e}^{-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^s h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+ [\mathrm{e}^{-2\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}\int_0^t \mathrm{e}^{2\int_0^s h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s]^{1/2} = \\
&1+\mathrm{e}^{-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^s h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s-1)+ [\mathrm{e}^{-2\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}\int_0^t \mathrm{e}^{2\int_0^s h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s]^{1/2}\geqslant \\
&1+\mathrm{e}^{-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^s h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s-1)+ \mathrm{e}^{-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}[\int_0^t \mathrm{e}^0\mathrm{d}s]^{1/2} = \\
&1+\mathrm{e}^{-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^s h(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+\sqrt{t}-1)\geqslant \\
&1+\mathrm{e}^{-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}(t+\sqrt{t}-1).
\end{aligned} \qquad (12)$$

由式(12)可知, 引理2的条件iii)不满足. 所以由引理2得不出系统(11)零解的指数均方稳定性.

注 9　从例3可以看出, 有些情况下, 在研究随机动力系统稳定性时, Krasnoselskii不动点方法较Banach不动点优越. 这是由于Banach不动点方法要求全部算子满足压缩映射的缘故, 这也正是Krasnoselskii不动点方法优越性所在.

4　结语(Summary)

文章分别采用Krasnoselskii不动点方法研究了一类随机动力系统零解的指数均方稳定性, 得出了两个稳定性定理(定理1和定理2). 从文中对两个定理的理论分析以及文后给出的实例可见:

1) 不动点方法通过引入合适的$h(s)$函数构造算子, 再用不动点方法判断模型的稳定性, 一定程度上改进了其他方法的结论;

2) 在研究系统(1)的稳定性时, 文章将Krasnoselskii不动点方法得出的结论(定理1和定理2)与Banach不动点方法和schauder不动点方法给出的结果(引理2–3)进行了分析和比较. 通过分析比较得出:

在采用Krasnoselskii不动点方法研究随机动力系统零解的稳定性时, Krasnoselskii不动点方法可以根据需要灵活的构造算子, 这样就使得所得的结论相比其他两种不动点方法灵活和宽松. 这也使得Krasnoselskii不动点方法的运用更加简便易行.

总之, 在研究随机动力系统零解的稳定性时, Krasnoselskii不动点方法不失为是一种简便、优越、易操作的方法. Krasnoselskii不动点方法相比经典的Lyapunov直接法、Banach不动点方法以及schauder不动点方法具有显著的优越性.

参考文献(References):

[1] BURTON T A. Fixed points and stability of a nonconvolution equation [J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2004, 132(12): 3679 – 3687.

[2] BURTON T A, FURUMOCHI T. A note on stability by Schauder's theorem [J]. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2001, 44(1): 73 – 82.

[3] BURTON T A, FURUMOCHI T. Fixed points and problems in stability theory [J]. *Dynamical Systems and Applications*, 2001, 10(1): 89 – 116.

[4] RAFFOUL Y N. Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delays using fixed-point theory [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2004, 40(7/8): 691 – 700.

[5] LUO J W. Fixed points and stability of neutral stochastic delay differential equations [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, 334(1): 431 – 440.

[6] MAO X R. Exponential stability for stochastic differential delay equations in Hilbert space [J]. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1991, 42(165): 77 – 85.

[7] WANG C S. Fixed points and stability of stochastic integro-differential equations [J]. *Journal of Guangzhou University (Natural Science Edition)*, 2009, 8(2): 49 – 52.

[8] WANG Chunsheng, LI Yongming. Stability of neutral stochastic differential equations with some variable delays [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2015, 50(5): 82 – 87.
(王春生, 李永明. 中立型多变时滞随机微分方程的稳定性 [J]. 山东大学学报(理学版), 2015, 50(5): 82 – 87.)

[9] WANG Chunsheng. The stability of neutral stochastic integro-differential equations [J]. *Journal of Sichuan University of Science & Engineering (Natural Science Edition)*, 2011, 24(1): 81 – 84.
(王春生. 中立型随机积分微分方程的稳定性 [J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2011, 24(1): 81 – 84.)

[10] WANG Chunsheng. Stability of stochastic differential equations: The two fixed points of comparison [J]. *Journal of Sichuan University of Science & Engineering (Natural Science Edition)*, 2011, 25(4): 81 – 84.
(王春生. 随机微分方程稳定性的两种不动点方法的比较 [J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2012, 25(4): 81 – 84.)

[11] WANG Chunsheng. Fixed points and stability of stochastic Vollterradifferential equations of nonconvolution type [J]. *Journal of Jingchu University of Technology*, 2011, 26(2): 30 – 33.
(王春生. 不动点与非卷积型随机Vollterra微分方程的稳定性 [J]. 荆楚理工学院学报, 2011, 26(2): 30 – 33.)

[12] LUO Shisong. *Stability of solutions of nonlinear functional differential equations based on fixed point theory* [D]. Changsha: Central South University, 2012.
(罗世嵩. 基于不动点理论的非线性泛函微分方程解的稳定性 [D]. 长沙: 中南大学, 2012.)

[13] CHEN Anping. *Qualitative study of nonlinear fractional differential equation* [D]. Xiangtan: Xiangtan University, 2011.
(陈安平. 非线性分数微分方程的定性研究 [D]. 湘潭: 湘潭大学, 2011.)

[14] ZHANG Hai. *Periodic solution and stability of degenerate delay differential systems* [D]. Hefei: Anhui University, 2007.
(张海. 退化时滞微分系统的周期解与稳定性问题 [D]. 合肥: 安徽大学, 2007.)

[15] JOSEPH P N, HENRY M P. An Arzela-Ascoli type theorem for random functions [J]. *International Journal of Mathematics & Mathematical Sciences*, 1991, 14(4): 789 – 796.

[16] GUO Dajun. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Second Edition. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 2001: 21.
(郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 第2版. 济南: 山东科技出版社, 2001: 21.)

[17] CHENG Qixiang, ZHANG Dianyu, WEI Guoqiang, et al. *Real Variable Function and Functional Analysis* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2010: 12.
(程其襄, 张奠宇, 魏国强, 等. 实变函数与泛函分析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010: 12.)

[18] SHI Bao, WANG Xingping, GAI Mingjiu, et al. *Introduction to Functional Analysis and Its Application* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2006: 60.
(时宝, 王兴平, 盖明久, 等. 泛函分析引论及其应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2006: 60.)

作者简介:

王春生 (1982–), 男, 理学硕士, 讲师, 主要研究方向为随机动力系统的稳定性, E-mail: paperspring@163.com;

李永明 (1970–), 男, 理学硕士, 教授, 主要研究方向为概率统计, E-mail: 921710652@qq.com.