第 34 卷第 1 期
2017 年 1 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 34 No. 1
Jan. 2017

DOI: 10.7641/CTA.2017.60276

切换系统多面体区域的生存性判别

吕剑峰[1,2†], 高 岩[1]

(1. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093; 2. 内蒙古科技大学 理学院, 内蒙古 包头 014010)

摘要: 本文研究了切换系统关于多面体区域的生存性判别问题. 考虑多面体由有限点集凸包来表示, 利用非光滑分析理论, 得到一个切换系统生存性的充分条件. 该条件只需检验在极点处是否满足特定条件, 而不需要对每个边界点进行验证. 其优点在于将生存性的判别转化为向量内积与切锥的计算. 这种生存性判别方法简便易行. 最后通过实例阐述了算法的有效性.

关键词: 切换系统; 生存性; 多面体; 切换控制; 非光滑分析

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Determining the viability of a polytope for a switched system

LÜ Jian-feng[1,2†], GAO Yan[1]

(1. School of Management, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;
2. College of Science, Inner Mongolia University of Science and Technology, Baotou Inner Mongolia 014010, China)

Abstract: This paper is devoted to the viability criterion for a polytope under a switched system. A sufficient viability criterion for a polytope, which is expressed by a convex hull of finite number of points, is proposed by using nonsmooth analysis. Based on this criterion, instead of all boundary points, just several vertices are needed to be verified whether satisfying some conditions. The advantage of the proposed methods is that determining the viability is transformed into computing vectors inner product and tangents. This method of determining the viability is easy to be complemented. Finally, two examples are listed to illustrate the effectiveness of main results of this paper.

Key words: switched system; viability; polytope; switching control; nonsmooth analysis

1 引言(Introduction)

近年来, 切换系统的研究引起了人们的广泛关注. 切换系统是一类重要的混杂系统, 它包含若干个子系统, 并按某种切换规则在各个子系统间进行切换. 切换系统在电力系统、化工过程、网络通信、机械系统等领域都有广泛应用. 生存性是控制理论中的一个重要研究内容. 控制系统在一个区域上的生存性是指对于该域内任何初始条件, 系统的运动都不离开此区域. 在理论方面, 控制系统中的很多问题都可以转化为生存性来研究, 例如系统的可达性、可控性、李亚普诺夫稳定性等[1–2]. 在应用方面, 系统的安全域设计以及机器人、航空器的导航避障都可通过生存性设计来实现. 目前, 关于生存性的研究主要集中在一个给定区域, 如何判断其是否为生存的和如何计算区域内的最大生存域.

已有研究成果主要关注线性控制系统和非线性控制系统的生存控制问题[3–11], 而关于切换系统的生存性研究较少, 且没有给出生存域的具体判别准则. 本文研究了一类切换系统的生存性判别问题, 考虑有限点集凸包组成的多面体区域, 通过算法得到多面体的所有边和面, 基于非光滑分析理论给出了在多面体上生存的判别准则.

2 预备知识(Preliminaries)

考虑下述切换系统:

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t), \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$为切换系统的状态变量, 子系统之间的切换规则$\sigma(t) : [t_0, +\infty) \to \Lambda$, 是时间$t$的分段常值函数, 指标集$\Lambda = \{1, 2, \cdots, N\}$, 并且$\sigma(t) = i$表示第$i$个子系统$\dot{x}(t) = A_i x$起作用$(i = 1, 2, \cdots, N)$. 在切换时刻系统发生跳变, 其解是处处连续的, 并且是非光滑的.

收稿日期: 2016−05−03; 录用日期: 2016−11−09.
†通信作者. E-mail: gaoyan@usst.edu.cn.
本文责任编委: 胡跃明.
国家自然科学基金项目(11171221), 教育部博士点基金项目(20123120110004), 内蒙古科技大学创新基金(2015XYPYL10, 2015XYPYL11)资助.
Supported by National Natural Science Foundation of China (11171221), Doctoral Program Foundation of Institutions of Higher Eduction of China (20123120110004) and Innovation Fund Project of Inner Mongolia University of Science and Technology (2015XYPYL10, 2015XYPYL11).

定义 1[1]　设$W \subset \mathbb{R}^n$, 如果对任意初始状态$x_0 \in W$, 存在(1)的解$x(t)=x(t,x_0)$, 使得$x(t)\in W, \forall t \geqslant 0$, 则称切换系统(1)关于区域$W$是生存的, W称为切换系统(1)的生存域, 解$x(t)$称为系统(1)的一个生存解.

在生存性判别中需要用到集合的切锥和法锥, 下面给出其定义.

定义 2[1]　设$K\subset \mathbb{R}^n$非空, 集合K在点$x\in K$的法锥定义为

$$NP_K(x)=\{y\in\mathbb{R}^n | d_K(y+x)=|y|\},$$

其中$d_K(x)$表示点x到非空集合K的距离, 即$d_K(x)=\inf\limits_{y\in K}|x-y|$.

定义 3[1]　设$K\subset \mathbb{R}^n$非空, 集合K在点$x\in K$的切锥定义为

$$T_K(x)=\{\upsilon\in\mathbb{R}^n | \liminf_{t\to 0^+}\frac{d_K(x+t\upsilon)}{t}=0\}.$$

其中$d_K(x)$表示点x到非空集合K的距离, 即$d_K(x)=\inf\limits_{y\in K}|x-y|$.

事实上, $\upsilon\in T_K(x)$当且仅当存在$h_k>0, \upsilon_k\in\mathbb{R}^n(k=1,2,\cdots)$, 且满足$h_k\to 0, \upsilon_k\to\upsilon$, 使得对任意$k>0$, 有$x+h_k\upsilon_k\in K$成立.

将文献[1]中的生存性条件应用到切换系统, 得到如下结论.

定理 1　闭集$D\subset\mathbb{R}^n$关于系统(1)是生存的充要条件是

$$T_D(x)\cap(\bigcup_{i=1}^{m}A_ix)\neq\varnothing,\ \forall x\in D, \tag{2}$$

其中$\varnothing$表示空集.

根据切锥的定义易见, 当x为集合D的内点时$T_{\rm D}(x)=\mathbb{R}^n$, 此时式(2)总成立, 于是判别式(2)是否成立, 只须考虑D的边界点. 而D的边界有无穷多点, 定理1对这种情况无法验证, 下面本文给出一种可以具体实现的判别方法.

设$a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{R}^n, \lambda_i\geqslant 0, i=1,\cdots,m$, 且有$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$, 称点$a=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_ia_i$为$a_1,\cdots,a_m$的一个凸组合[2].

集合S的凸包, 记为$\operatorname{co}S$, 是由S中的所有凸组合形成的集合, 换言之$a\in\operatorname{co}S$当且仅当a可表示为$a=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_ia_i$, 其中$k$为一正整数, $a_i\in S, \lambda_i\geqslant 0, i=1,\cdots,k$满足$\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i=1$[2].

点集$\{a_1,\cdots,a_m\}$, 其中$a_i\in\mathbb{R}^n, i=1,\cdots,m$的凸包$\operatorname{co}\{a_1,\cdots,a_m\}$可表示为

$$\operatorname{co}\{a_1,\cdots,a_m\}=\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_ia_i | \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,\ \lambda_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,m\}.$$

$\mathbb{R}^n$空间中的有界凸多面体都可表示为上式的形式, 这里的$a_i(i=1,\cdots,m)$在几何上看是相应多面体的极点.

3　生存性判别(Determining the viability)

切换系统(1)在某个区域的生存性取决于区域边界点是否满足生存性条件, 对于每个边界点即判断是否存在某个子系统$A_k, k\in\varLambda$使得生存性条件成立, 而区域有无穷多个边界点, 我们不能对所有边界点进行判别. 本文考虑了切换系统在一类特殊区域上的生存性, 如果区域是由有限点集的凸包组成的多面体, 基于非光滑分析理论, 系统生存性可通过判别有限个边界点得到, 从而给出了切换系统在多面体区域生存的一个充分判别准则.

下面讨论给定一个多面体如何判别它是否为系统(1)的生存域.

定理 2　设$W=\operatorname{co}\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_d\}$, 其中$\omega_i\in\mathbb{R}^n, i=1,2,\cdots,d$, 若有

1) W边界上任意两个相邻极点$\omega_i,\omega_j(i,j\in\{1,\cdots,d\})$, 存在某个子系统$A_k$使得$A_k\omega_{\rm s}\in T_{\rm W}(\omega_{\rm s})$ $(s=i,j)$成立;

2) 对于W的任一平面H, 不妨设$H=\operatorname{co}\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_q}\}$, x_0是面H的内点, $p_0\in NP_W(x_0)$, 存在子系统A_k, 满足$<A_k\omega_{i_j},p_0>\leqslant 0, j=1,2,\cdots,q$. (其中$<A_k\omega_{i_j},p_0>$表示向量$A_k\omega_{i_j}$与向量$p_0$的内积.)

则系统(1)在W上生存.

证　只需判别在W的所有边界点处的生存性. 边界点分3种情况: 极点、边、面的内点. 下面分别讨论具体生存性:

i) 极点: 由已知1), 系统(1)在极点处生存;

ii) 边: 对于多面体的任一条边, 一定是连接某两个极点的线段, 下证切换系统在线段上任意一点处均生存. 设x是连接任意两个极点ω_i,ω_j的边上任意一点, 则存在$\lambda(0<\lambda<1)$, 使得$x=\lambda\omega_i+(1-\lambda)\omega_j$, 由已知1), 存在某个子系统(不妨设为$A_k$)在极点$\omega_i$与$\omega_j$处生存, 即$A_k\omega_i\in T_{\rm W}(\omega_i)$与$A_k\omega_j\in T_{\rm W}(\omega_j)$. 下面证明切换系统(1)在点$x$处是生存的. 由$A_k\omega_i\in T_{\rm W}(\omega_i)$及切锥的定义, 存在$s_i>0, \eta_i\in W$, 使得$A_k\omega_i=s_i(\eta_i-\omega_i)$成立, 其中$\eta_i=\sum\limits_{m=1}^{d}\lambda_m\omega_m$, $\sum\limits_{m=1}^{d}\lambda_m=1, \lambda_m\geqslant 0, m=1,2,\cdots,d$.

对于$A_k\omega_j\in T_{\rm W}(\omega_j)$, 存在$s_j>0$ $\eta_j\in W$, 使得

$$A_k\omega_j=s_j(\eta_j-\omega_j)$$

成立, 其中$\eta_j=\sum\limits_{m=1}^{d}\mu_m\omega_m$, $\sum\limits_{m=1}^{d}\mu_m=1, \mu_m\geqslant 0, m=1,2,\cdots,d$. 取$s=\max\{s_i,s_j\}$, 令

$$\xi_i = \omega_i + \frac{s_i}{s}(\eta_i - \omega_i) = \frac{s_i}{s}\sum_{m=1}^{d}\lambda_m\omega_m + (1-\frac{s_i}{s})\omega_i,$$

因为系数$\frac{s_i}{s} \geqslant 0, 1+(\lambda_i-1)\frac{s_i}{s} \geqslant 0$, 且

$$\frac{s_i}{s}\sum_{m=1}^{d}\lambda_m + (1-\frac{s_i}{s}) = \frac{s_i}{s}(\sum_{m=1}^{d}\lambda_m - 1) + 1 = 1,$$

即ξ_i可表示为W的极点的凸组合, 故$\xi_i \in W$.

由$\xi_i = \omega_i + \frac{s_i}{s}(\eta_i - \omega_i)$, 知$s(\xi_i - \omega_i) = s_i(\eta_i - \omega_i)$, 又$A_k\omega_i = s_i(\eta_i - \omega_i)$, 所以$s(\xi_i - \omega_i) = A_k\omega_i$, 其中$\xi_i \in W$. 同理, 存在$\xi_j \in W$, 使得$s(\xi_j - \omega_j) = A_k\omega_j$成立.

设

$$\xi_i = \sum_{m=1}^{d} a_m\omega_m, \sum_{m=1}^{d} a_m = 1, a_m \geqslant 0,\ m=1,2,\cdots,d,$$

$$\xi_j = \sum_{m=1}^{d} b_m\omega_m, \sum_{m=1}^{d} b_m = 1, b_m \geqslant 0,\ m=1,2,\cdots,d,$$

$$s\xi_i = (A_k + sI)\omega_i, \tag{3}$$

$$s\xi_j = (A_k + sI)\omega_j, \tag{4}$$

其中I是单位矩阵. 式(3)和式(4)分别乘以λ与$1-\lambda$, 得

$$s\lambda\xi_i = (A_k + sI)\lambda\omega_i,$$
$$s(1-\lambda)\xi_j = (A_k + sI)(1-\lambda)\omega_j.$$

两式相加, 并将ξ_i, ξ_j代入, 有

$$s(\lambda\xi_i + (1-\lambda)\xi_j) = (A_k + sI)(\lambda\omega_i + (1-\lambda)\omega_j),$$

$$s(\lambda\sum_{m=1}^{d} a_m\omega_m + (1-\lambda)\sum_{m=1}^{d} b_m\omega_m) = (A_k + sI)x,$$

$$s(\sum_{m=1}^{d}(\lambda a_m + (1-\lambda)b_m)\omega_m - x) = A_kx,$$

而

$$\sum_{m=1}^{d}(\lambda a_m + (1-\lambda)b_m) =$$
$$\lambda\sum_{m=1}^{d} a_m + (1-\lambda)\sum_{m=1}^{d} b_m = \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

由$a_m \geqslant 0,\ b_m \geqslant 0, 0 < \lambda < 1$, 有$\lambda a_m + (1-\lambda)b_m \geqslant 0, m = 1,2,\cdots,d$, 则

$$\sum_{m=1}^{d}(\lambda a_m + (1-\lambda)b_m)\omega_m \in W,$$

令

$$\xi = \sum_{m=1}^{d}(\lambda a_m + (1-\lambda)b_m)\omega_m,$$

则$\xi \in W$. 于是证明了对任意的x, 存在$s > 0, \xi \in W$, 使得$s(\xi - x) = A_kx$成立, 此即$A_kx \in T_W(x)$, 于是系统(1)在点x处是生存的, 由x的任意性, 系统(1)在W所有边上的点处生存;

iii) 面的内点: 设H是W的任一平面, 则H是若干个极点的凸包, 不妨设

$$H = \mathrm{co}\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_q}\},$$

由2), 平面H上存在某个内点$x_0, p_0 \in NP_W(x_0)$与子系统A_k, 使得$<A_k\omega_{i_j},\ p_0> \leqslant 0, j = 1,2,\cdots,q$. 下面证明系统在$H$的任意内点$x$处均生存. 由$H$是凸集可知, 存在$a_m \geqslant 0,\ m = 1,2,\cdots,q$, 使得$x = \sum_{m=1}^{q} a_m\omega_{i_m}$, 其中$\sum_{m=1}^{q} a_m = 1$. 由于$x$与$x_0$均为平面$H$的内点, 则$NP_W(x)$与$NP_W(x_0)$中的向量平行, 由内积的定义与

$$< A_k\omega_{i_j}, p_0 > \leqslant 0,\ j = 1,2,\cdots,q$$

可知, 对$\forall p \in NP_W(x)$, 有

$$< A_k\omega_{i_j}, p > \leqslant 0,\ j = 1,2,\cdots,q.$$

因此,

$$< A_kx, p > = < A_k(\sum_{m=1}^{q} a_m\omega_{i_m}), p > =$$
$$\sum_{m=1}^{q} a_m < A_k\omega_{i_m}, p >,$$

于是有

$$< A_kx, p > = (A_kx)^{\mathrm{T}}p \leqslant 0,$$

由W在点x的切锥$T_{\mathrm{W}}(x)$知, $A_kx \in T_W(x)$. 所以系统(1)在点x处是生存的, 由x的任意性知系统(1)在所有面的内点处均生存. 定理得证.

定理2给出了切换系统关于多面体区域生存性的解析刻画, 定理中计算W的边和面的算法[12]见表1, 该算法需输入多面体W的极点集合Ω_0, 通过创建以Ω_0为叶子的二叉树T, 输出W的边和面的集合.

表 1 算法

Table 1 Algorithm

$k := 0; f_0 = \|\Omega_0\|;$	%$\|\Omega_0\|$: 多面体的顶点个数.
$\Omega_{(0)} = \Omega_0;$	
while$f_k \geqslant 2$ do	%f_k表示k维面的顶点个数.
$f_{k+1} := 0$; $\Omega_{(k+1)} := \varnothing$	%置集合$\Omega_{(k+1)}$为空集.
for each pair of	
elements F and F' in $\Omega_{(k)}$	
do $F'' := F \cap F'$;	% 连接$\Omega_{(k)}$中的任两个元
	%素F和F'
if $F'' \notin T$ then	
if $F'' = F$ or $F'' := F'$ then	
delete F'' from $\Omega_{(k)}$;	% 去掉$\Omega_{(k)}$中的面F''
$f_k := f_k - 1$	% k维面的个数减1
endif	
add F'' to T and to $\Omega_{(k+1)}$;	
$f_{k+1} := f_{k+1} + 1$	% $k+1$维面的个数加1
endif	
endfor	
output $\Omega_{(k)}$; $k = k + 1$	%输出k维面的集合
endwhile	
end	

4　数值算例(Examples)

例 1　考虑切换系统$\dot{x}(t)=A_\sigma x(t)$, 其中: $x\in\mathbb{R}^3$, $\sigma\in\{1,2,3,4\}$,

$$A_1=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&-1&-1\\1&0&1\end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&-1&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

多面体$W=\mathrm{co}\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$如图1所示, 其中:

$$\omega_1^{\mathrm T}=[1\ \ 0\ \ 0],\ \omega_2^{\mathrm T}=[0\ \ 1\ \ 0],$$

$$\omega_3^{\mathrm T}=[0\ \ 0\ \ 1],\ \omega_4^{\mathrm T}=[0\ \ -1\ \ 0].$$

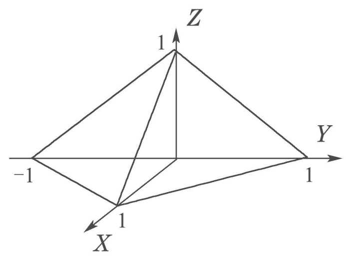

图 1　多面体生存域

Fig. 1　Viable set of the polyhedron

下面判别切换系统在给定多面体W上的生存性. 只需判别所有边和面上的点, 因为此多面体的极点较少, 所以很容易得到其边和面, 其边为

$$\omega_1\omega_2,\omega_1\omega_3,\omega_1\omega_4,\omega_2\omega_3,\omega_2\omega_4,\omega_3\omega_4.$$

其面为

$$H_1=\mathrm{co}\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},\ \ H_2=\mathrm{co}\{\omega_1,\omega_2,\omega_4\},$$

$$H_3=\mathrm{co}\{\omega_1,\omega_3,\omega_4\},\ \ H_4=\mathrm{co}\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}.$$

首先判别边上点的生存性, 由

$$A_1\omega_2=[0\ \ -1\ \ 0]^{\mathrm T},\ A_1\omega_4=[0\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm T}$$

知$A_1\omega_2\in T_W(\omega_2)$, $A_1\omega_4\in T_W(\omega_4)$, 则边$\omega_2\omega_4$上的点均满足生存性条件. 由

$$A_2\omega_1=[1\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm T},\ \ A_2\omega_2=[0\ \ -1\ \ 1]^{\mathrm T},$$

$$A_2\omega_3=[0\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm T},$$

及W在$\omega_1,\omega_2,\omega_3$处的切锥知

$$A_2\omega_1\in T_W(\omega_1),\ A_2\omega_2\in T_W(\omega_2),\ A_2\omega_3\in T_W(\omega_3),$$

则子系统A_2在$\omega_1\omega_2,\omega_1\omega_3,\omega_2\omega_3$上的所有点处均生存. 同理, 子系统$A_4$在$\omega_1\omega_4,\omega_3\omega_4$上的所有点处均生存, 所以所有边上的点都生存.

其次, 判别多面体面H_1, H_2, H_3, H_4上点的生存性. 对于面$H_1=\mathrm{co}\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, 可计算其上任一内点$x$的法向量$p=[1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm T}$, 对于子系统$A_1$,

$$A_1\omega_1=[-1\ \ 0\ \ -1]^{\mathrm T},\ A_1\omega_2=[0\ \ -1\ \ 0]^{\mathrm T},$$

$$A_1\omega_3=[-1\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm T},\ <A_1\omega_1,p>=-2<0,$$

$$<A_1\omega_2,p>=-1<0,\ <A_1\omega_3,p>=-1<0.$$

定理2的条件2)成立, 即平面H_1上的所有内点都满足生存性条件. 同理可得, 对于平面H_2, 存在子系统A_3, 使平面H_2上的所有内点都满足生存性条件. 对于W的面H_3, H_4, 存在子系统A_4, A_2使得面H_3, H_4上的内点均满足生存性条件. 综上所述, 切换系统在多面体W上生存.

下面给出具体的切换设计: 当系统的状态到达多面体边$\omega_1\omega_2$时, 切换到子系统A_2或A_3; 当状态到达边$\omega_1\omega_3$时, 切换到子系统A_2或A_4; 当状态到达边$\omega_1\omega_4$时, 切换到子系统A_3或A_4; 当状态到达边$\omega_2\omega_3$时, 切换到子系统A_2; 当状态到达边$\omega_2\omega_4$时, 切换到子系统A_1或A_3; 当状态到达边$\omega_3\omega_4$时, 切换到子系统A_4; 当状态到达面H_1的内部时, 切换到子系统A_1; 当状态到达面H_2的内部时, 切换到子系统A_3或A_4; 当状态到达面H_3的内部时, 切换到子系统A_1或A_4; 当状态到达面H_4的内部时, 切换到子系统A_1, A_2或A_3.

例 2　考虑切换系统$\dot{x}(t)=A_\sigma x(t)$, 其中: $x\in\mathbb{R}^3$, $\sigma\in\{1,2,3\}$,

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

多面体$W=\mathrm{co}\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}$如图2所示, 其中:

$$\omega_1^{\mathrm T}=[1\ \ 0\ \ 0],\ \omega_2^{\mathrm T}=[1\ \ 1\ \ 0],$$

$$\omega_3^{\mathrm T}=[0\ \ 1\ \ 0],\ \omega_4^{\mathrm T}=[0\ \ 0\ \ 0],$$

$$\omega_5^{\mathrm T}=[1\ \ 0\ \ 1],\ \omega_6^{\mathrm T}=[1\ \ 1\ \ 1],$$

$$\omega_7^{\mathrm T}=[0\ \ 1\ \ 1],\ \omega_8^{\mathrm T}=[0\ \ 0\ \ 1].$$

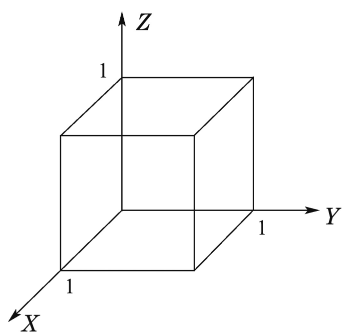

图 2　多面体生存域

Fig. 2　Viable set of the polyhedron

下面判别切换系统在给定多面体W上的生存性.

只需判别所有边和面上的点, 其边为

$$\omega_1\omega_2, \omega_2\omega_3, \omega_3\omega_4, \omega_1\omega_4, \omega_1\omega_5, \omega_2\omega_6,$$
$$\omega_3\omega_7, \omega_4\omega_8, \omega_5\omega_6, \omega_6\omega_7, \omega_7\omega_8, \omega_5\omega_8.$$

其面为

$$H_1 = \mathrm{co}\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},\ H_2 = \mathrm{co}\{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\},$$
$$H_3 = \mathrm{co}\{\omega_2, \omega_3, \omega_6, \omega_7\},\ H_4 = \mathrm{co}\{\omega_3, \omega_4, \omega_7, \omega_8\},$$
$$H_5 = \mathrm{co}\{\omega_1, \omega_4, \omega_5, \omega_8\},\ H_6 = \mathrm{co}\{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}.$$

首先判别边上点的生存性, 由

$$A_1\omega_1 = [1\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ A_1\omega_2 = [1\ \ -1\ \ 0]^{\mathrm{T}},$$
$$A_1\omega_3 = [0\ \ -1\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ A_1\omega_4 = [0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}},$$
$$A_1\omega_7 = [1\ \ -1\ \ 1]^{\mathrm{T}},\ A_1\omega_8 = [1\ \ 0\ \ 1]^{\mathrm{T}}$$

知

$$A_1\omega_1 \in T_W(\omega_1),\ A_1\omega_2 \in T_W(\omega_2),$$
$$A_1\omega_3 \in T_W(\omega_3),\ A_1\omega_4 \in T_W(\omega_4),$$
$$A_1\omega_7 \in T_W(\omega_7),\ A_1\omega_8 \in T_W(\omega_8),$$

则边$\omega_1\omega_2, \omega_1\omega_4, \omega_2\omega_3, \omega_3\omega_4, \omega_3\omega_7, \omega_4\omega_8, \omega_7\omega_8$上的点均满足生存性条件. 同理可得, 子系统$A_2$在边$\omega_1\omega_5$, $\omega_2\omega_6, \omega_5\omega_6, \omega_6\omega_7$上的所有点处均生存, 子系统$A_3$在边$\omega_5\omega_8$上的所有点处均生存, 所以所有边上的点都生存.

下面判别多面体面上点的生存性. 对于面$H_1 = \mathrm{co}\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, 可计算其上任一内点$x$的法向量$p = [0\ \ 0\ \ -1]^{\mathrm{T}}$, 对于子系统$A_1$, 由于

$$< A_1\omega_1, p >=< A_1\omega_2, p >= 0,$$
$$< A_1\omega_3, p >=< A_1\omega_4, p >= 0,$$

则平面H_1上的所有内点在子系统A_1下均生存. 对于面$H_2 = \mathrm{co}\{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}$, 可计算其上任一内点$x$的法向量$p = [1\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$, 对于子系统$A_2$, 由于

$$< A_2\omega_1, p >= -1 < 0,\ \ < A_2\omega_2, p >= 0,$$
$$< A_2\omega_5, p >= -1 < 0,\ \ < A_2\omega_6, p >= 0,$$

则平面H_2上的所有内点在子系统A_2下均生存. 同理, 平面H_3上的所有内点在子系统A_1, A_3下均生存. 平面H_4上的所有内点在子系统A_1, A_2, A_3下均生存. 平面H_5上的所有内点在子系统A_1, A_3下均生存. 平面H_6上的所有内点在子系统A_3下均生存. 综上所述, 切换系统在多面体W上生存.

具体的切换策略设计如下: 当系统的状态到达多面体边$\omega_3\omega_4$, $\omega_3\omega_7$时, 任何子系统均生存, 无需切换; 当状态到达边$\omega_1\omega_2$, $\omega_1\omega_4$, $\omega_2\omega_3$时, 切换到子系统A_1或A_2; 当状态到达边$\omega_4\omega_8$, $\omega_7\omega_8$时, 切换到子系统A_1或A_3; 当状态到达边$\omega_1\omega_5$, $\omega_2\omega_6$, $\omega_5\omega_6$, $\omega_6\omega_7$时, 切换到子系统A_2; 当状态到达边$\omega_5\omega_8$时, 切换到子系统A_3; 当状态到达面H_1的内部时, 切换到子系统A_1或A_2; 当状态到达面H_2的内部时, 切换到子系统A_2; 当状态到达面H_3, H_5的内部时, 切换到子系统A_1或A_3; 当状态到达面H_4的内部时, 无需切换; 当状态到达面H_6的内部时, 切换到子系统A_3.

5 结语(Concluding remarks)

本文研究了切换系统的生存性判别问题, 当多面体由有限点集凸包表示时, 建立了切换系统多面体区域生存性的充分判别准则. 文中给出的方法简便易行, 可直接用于生存性判别.

参考文献(References):

[1] AUBIN J P. *Viability Theory* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2011.

[2] GAO Yan. *Nonsmooth Optimization* [M]. Beijing: Science Press, 2008.
(高岩. 非光滑优化 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.)

[3] XIONG Jiandong, LIU Yongqi, SHEN Zhiping, et al. Stabilizing slow-switching strategy for continuous-time switched linear systems [J]. *Control and Decision*, 2016, 31(5): 797 – 804.
(熊建栋, 刘永奇, 沈志萍, 等. 连续线性切换系统的镇定慢切换设计 [J]. 控制与决策, 2016, 31(5): 797 – 804.)

[4] WU J, SUN Z D. Observer-driven switching stabilization of switched linear systems [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2556 – 2560.

[5] HU T S, MA L Q, LIN Z L. Stabilization of switched systems via a composite quadratic functions [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2008, 53(11): 2571 – 2585.

[6] GAO Yan. Determining viability of polytopic set for a linear control system [J]. *Control and Decision*, 2016, 31(9): 1720 – 1722.
(高岩. 线性控制系统多面体区域的生存性判别 [J]. 控制与决策, 2016, 31(9): 1720 – 1722.)

[7] GAO Yan. On viable set for a linear control system [J]. *Control and Decision*, 2007, 22(7): 833 – 835.
(高岩. 线性控制系统的生存域 [J]. 控制与决策, 2007, 22(7): 833 – 835.)

[8] ZHANG Xia, GAO Yan, XIA Zunquan. Unbounded polyhedral invariant sets for linear control systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(6): 874 – 880.
(张霞, 高岩, 夏尊铨. 线性控制系统的无界多面体不变集 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(6): 874 – 880.)

[9] CHEN Zheng, GAO Yan. Computation of approximate viable sets for linear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(11): 1473 – 1478.
(陈征, 高岩. 线性系统近似生存域的计算 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(11): 1473 – 1478.)

[10] CHEN Z, GAO Y. Determining the viable unbounded polyhedron under linear control systems [J]. *Asian Journal of Control*, 2014, 16(5): 1561 – 1567.

[11] GAO Y. Viability criteria for differential inclusions [J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2011, 24(5): 825 – 834.

[12] KOMEI F, VERA R. Combinatorial face enumeration in convex polytopes [J]. *Computational Geometry*, 1994, 4(4): 191 – 198.

作者简介:

吕剑峰 (1984–), 男, 博士研究生, 从事混杂系统稳定性与生存性的研究, E-mail: lvjianfeng2006@126.com;

高　岩 (1962–), 男, 教授, 博士生导师, 从事混杂系统控制、非光滑优化等研究, E-mail: gaoyan@usst.edu.cn.