

## 带强连通分支的多智能体系统可控包含控制

陈世明<sup>†</sup>, 王培, 李海英, 赖强

(华东交通大学 电气与自动化工程学院, 江西 南昌 330013)

**摘要:** 研究有强连通子图拓扑结构的有向多智能体系统领导者选择及可控包含控制问题. 根据网络拓扑结构, 智能体被分为两类: 单元智能体和一般智能体. 首先设计强连通子图中个体组成的单元智能体的一致性协议实现各个单元的一致; 后由单元智能体和一般智能体构成新的拓扑结构, 结合复杂网络可控性理论与二分图最大匹配算法确定满足网络可控的最少领导者集合, 并为所有智能个体设计相应的控制协议, 驱使跟随者渐近收敛到多个领导者组成的动态凸包中, 从而实现网络的可控包含控制. 仿真结果验证了理论分析的正确性.

**关键词:** 多智能体系统; 有向网络拓扑; 包含控制; 领导者选择

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Controllable containment control of multi-agent systems with strongly connected sub-graph

CHEN Shi-ming<sup>†</sup>, WANG Pei, LI Hai-ying, LAI Qiang

(School of Electrical and Automation Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang Jiangxi 330013, China)

**Abstract:** In this paper, the leader selection and controllable containment for given topology that has strongly connected sub-graph of directed multi-agent systems is investigated. According to the topology structure, the agents are classified into two categories: unit agents and general agents. Firstly, the consensus protocol of unit agents in the strongly connected graph is designed to achieve consensus of each unit; Secondly, a new topological structure is constructed by unit agents and general agents. Combining the complex network controllability theory with the algorithm of bipartite graph maximum matching to determine the minimum leader set satisfying the network controllable. Then the corresponding control protocol is designed for all agents, which drives all followers to asymptotically converge to the dynamic convex hull spanned by the leaders, so as to the controllable containment control of the whole network is realized. Finally, the simulation results are provided to illustrate the correctness of the theoretical analysis.

**Key words:** multi-agent systems; directed topology; containment control; leader selection

### 1 引言(Introduction)

近年来, 多智能体一致性研究受到了越来越多学者的关注. 一致性问题作为分布式协同控制的一个重要研究方向, 主要任务是设计控制协议, 使系统能够通过局部信息交互在关键信息上达成一致, 最终达到理想的一致性状态. Olfati-Saber, Ren等最早对于一致性问题展开了研究工作<sup>[1-3]</sup>. 根据领导者个体数目的不同, 一致性问题可划分为以下几种情况: 无领导者一致性、一致性追踪(领导-跟随一致性)、多领导者一致性. 在实际应用中, 无领导者一致性已得到深入的研究<sup>[4]</sup>, 关于单领导者一致性的研究, 文献[5-6]做了较为详细的介绍.

多智能体协同控制已取得了众多优秀的研究成果<sup>[7]</sup>, 而包含控制作为一种特殊的多领导者协同控制近年来更是发展迅速<sup>[8-16]</sup>. 所谓包含控制是指一组跟随者在多个领航者的引领下, 实现并保持在由领导者所围成的最小几何空间(凸包)中运动. 包含控制在多智能体处理危险物资、敌区搜索、火灾营救以及合作运输等任务中有大量的潜在应用. Ji Cao等<sup>[8-9]</sup>最早展开了相关课题的研究. 文献[10]研究了拉格朗日系统包含控制问题, 并提出了基于神经网络的包含控制协议. 文献[11-12]考虑了噪声环境下的多智能体包含控制, 两篇文章分别引入了衰减增益法和时延增益法来抑制噪声并实现有限时间包含. Su等<sup>[13-14]</sup>研究了输

收稿日期: 2016-05-03; 录用日期: 2016-12-13.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: c1977318@hotmail.com.

本文责任编辑: 俞立.

国家自然科学基金项目(61364017, 11662002), 江西省科技厅项目(20161BBE53008)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61364017, 11662002) and Project of Science and Technology Department of Jiangxi Province (20161BBE53008).

入饱和情况下的多智能体包含控制,提出了两种低增益反馈方法求取系统的半全局状态反馈量和输出反馈量,并据此设计控制协议实现系统的包含控制.文献[15]和文献[16]分别针对分阶异质群体和基于输出反馈调节的全异质群体的包含控制进行了研究.

随着多领导者一致性的研究,人们发现多智能体系统能控性是一个非常重要且具有实际意义的课题.系统能控性是指通过对网络中某些领导者个体施加外部控制输入,网络中其它跟随者个体能够通过智能体之间的相互作用,由任意的初始状态达到预期的最终状态. Tanner于文献[17]中最早提出多智能体系统的能控概念并建立了相应模型.文献[18]研究了高阶系统的能控性,并证明了二阶、高阶系统能控性等价于单阶系统且系统能控性不受个体自身动态性能影响,完全由拓扑图决定.文献[19]进一步研究了网络的结构可控性问题.在能控性模型的基础上,学者们又研究了领导者角色对系统能控性的影响.文献[20]从代数和图论的角度研究了无向图中满足系统能控的一些领导者选取方案.文献[21–22]分别研究了有向离散系统和时延系统中满足可控的领导者选择方案.文献[23]针对各种不同的系统建立了统一的能控性模型,并探讨了不同系统中满足系统可控的最少领导者个体选取问题.文献[24]将可控性与包含控制相结合,针对二阶有向网络包含控制中的领导者选择进行了研究.文献[25]进一步研究了有向加权通信拓扑的线性异构多智能体系统的可控性问题,并证明了异构多智能体系统的可控性是由其交互拓扑图决定的.

考虑到带有强连通分支有向多智能体系统时,其网络的可控性问题将变得更加复杂.之前的研究方法将不再完全适用.鉴于此,本文对带强连通分支多智能体系统的可控包含控制问题进行了研究,文中根据网络的拓扑结构把智能体分为两类:单元智能体和一般智能体,首先确定网络中强连通子图中的单元智能体,并为其设计相应的控制协议实现各个单元的一致,后应用图论中二分图最大匹配算法确定新拓扑结构中满足网络可控的最少领导者个体,并为所有个体设计相应的控制协议,驱使跟随者个体渐近收敛到领导者个体组成的动态凸包中,实现网络的可控包含控制.

## 2 预备知识(Some preliminaries)

在现代控制理论中,系统可控性是反映输入对系统状态的控制能力的一般概念.给定一个线性定常控制系统

$$\dot{x}=Ax(t)+Bu(t), x \in \mathbb{R}^N, u \in \mathbb{R}^M, \quad (1)$$

其中 $A$ 和 $B$ 分别为系统矩阵和输入矩阵.如果对于任意给定的初态 $x(0)=x_0$ 和终态 $x_f$ ,都存在控制输入 $u$ 和有限时刻 $t'$ 使得 $x(t')=x_f$ ,就称系统(1)是可控的.可控性一个经典的充要判据是对应的可控性矩阵满秩,表示为

$$\text{rank } Q_c \triangleq \text{rank}(B, AB, \dots, A^{N-1}B) = N. \quad (2)$$

对于多智能体系统而言,网络的可控性一般是指:通过对网络中某些领导者个体施加外部控制输入,网络中其他跟随者智能体能够通过个体间的相互作用,由任意的初始状态达到预期的最终状态.

现将系统(1)视为由 $N$ 个节点组成的有向网络 $G=(V, E)$ 的状态方程,矩阵 $A=\{a_{ij}|i, j \in [1, N]\}$ 表示网络中节点的邻接关系, $E=\{(x_i, x_j)|a_{ij} \neq 0\}$ 表示网络中节点间的边集,如若节点 $i$ 能够接受到节点 $j$ 的信息,有 $a_{ij} > 0$ .  $x(t)=(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$ 表示 $N$ 个节点在 $t$ 时刻的状态,矩阵 $B=\{b_{ij}|i \in [1, N], j \in [1, M]\}$ 表示节点与外部控制信号的连接关系, $u(t)=(u_1(t), u_2(t), \dots, u_M(t))^T$ 为 $t$ 时刻 $M$ 个节点的输入控制信号, $b_{ij}=1$ 表示节点 $i$ 上施加信号 $u_j(t)$ .智能体网络中有向路径是一系列边集所形成的序列,表示节点之间的连接关系.如果一个有向网络中至少有一个智能体到其他任意智能体都存在一条有向路径,那么就称这个有向图中存在有向生成树.在有向图 $G$ 中,若任意两个节点 $i, j$ ,都存在一条有向路径起始于 $i$ 终止于 $j$ ,则图 $G$ 为强连通图.若图 $G'$ 为图 $G$ 的强连通子图,则称 $G'$ 为 $G$ 的强连通分支.本文中假设节点不存在自环.

**假设 1** 网络拓扑结构中含有一棵有向生成树,即网络中至少存在一个智能体到其他任意智能个体都有一条有向路径.

**引理 1**<sup>[26]</sup> 若有向图 $G$ 为强连通图,则其对应的邻接矩阵 $A$ 是不可约的.

对于 $N$ 阶矩阵 $A$ 而言,如果存在一个排列阵 $P$ 使得 $P^TAP$ 为一个分块上三角阵( $P^T$ 为 $P$ 的转置),就称矩阵 $A$ 是可约的;否则称矩阵 $A$ 是不可约的.矩阵 $A$ 经过任意的初等变换,去掉不可约子矩阵的行列后剩下的子矩阵为矩阵 $A$ 的最大可约部分.

在此引入图 $\bar{G}(\bar{A})$ 为图 $G(A)$ 的子图,且 $\bar{G}(\bar{A})$ 所对应的邻接矩阵 $\bar{A}$ 为 $A$ 的最大可约子矩阵,则称 $\bar{G}(\bar{A})$ 为图 $G(A)$ 的缩聚图.

**引理 2**<sup>[21]</sup> 图 $G$ 对应的Laplacian矩阵为 $L$ ,记 $L$ 的特征值为 $\lambda_1(L), \lambda_2(L), \dots, \lambda_i(L)$ .若图 $G$ 为强连通图且满足假设1,则 $L$ 的非零特征根的实部均大于零且 $L$ 的0特征值对应的特征向量 $r^T$ 满足 $r^T \mathbf{1}=1$ .

**引理 3**<sup>[19]</sup> 有向网络中,完全控制该网络所需的最少输入或驱动节点选取取决于网络中的最大匹配.

所谓最大匹配是指:给定一个二分图 $G(A)$ , $M'$ 为图 $G(A)$ 边集的一个子集,如果 $M'$ 满足当中的任意两条边都不依附于同一个顶点,则称 $M'$ 是一个匹配,图中包含边数最多的匹配称为图的最大匹配.

**定义 1** 令 $C$ 是实向量空间 $V \subseteq \mathbb{R}^N$ 的集合,如果对于任何 $z \subseteq [0, 1]$ 和集合 $C$ 中任何 $x, y$ 都有点 $(1 -$

$z)x+zy$ 在集合  $C$  中, 则对于  $V$  中点  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  的凸包是指包含  $X$  中所有点的最小凸集, 用  $\text{Co}\{X\}$  表示, 则

$$\text{Co}\{X\} = \left\{ \sum_{i=1}^N a_i x_i \mid x_i \in X, a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^N a_i = 1 \right\}.$$

**定义 2** 对一有向图  $G(A)$ , 假设其有  $k$  个强连通分支, 记为  $G' = (G'_1, G'_2, \dots, G'_k)$ , 则  $G'$  中的智能体称为单元智能体 (unit agent, U-agent), 其他智能体为一般智能体 (general agent, G-agent); 为方便后文论述, 这  $k$  个强连通分支亦定义  $k$  个单元, 表示为  $U = (U_1, U_2, \dots, U_k)$ .

### 3 单元智能体概念的提出 (Put forward the concept of unit agents)

#### 3.1 二分图最大匹配求取驱动节点 (Get driving nodes by bipartite graph maximum matching)

在 U-agent 的概念引入前, 先介绍有向网络中最大匹配的求取方法. 由引理 3 可知, 有向网络的结构可控性问题取决于网络中的最大匹配. 这里应用二分图最大匹配算法来求取网络中的最大匹配, 将有向图  $G(A)$  转换为二分图  $H(A)$ , 且有

$$H(A) = (V_A^+, V_A^-, E),$$

$V_A^+ = \{x_1^+, x_2^+, \dots, x_N^+\}$ ,  $V_A^- = \{x_1^-, x_2^-, \dots, x_N^-\}$  分别表示状态矩阵  $A$  各列与各行的节点集合,  $E = \{(x_i, x_j) \mid a_{ij} \neq 0\}$  表示边集.

由引理 3 对最大匹配的定义并结合二分图最大匹配算法, 可得出网络中的最大匹配节点集, 对于一个非匹配节点数不为 0 的网络, 非匹配节点即为驱动节点. 下图以一个有向网络为例描述了二分图最大匹配算法求取驱动节点的过程.

图 1 为网络拓扑结构图, 将图 1 化为图 2 所示二分图形式, 用最大匹配算法求取此二分图的最大匹配边, 由图可知其最大匹配边集为:  $1^+ \rightarrow 2^-$ ,  $2^+ \rightarrow 5^-$ ,  $3^+ \rightarrow 2^-$ ,  $4^+ \rightarrow 3^-$ , 可知节点 2, 3, 5 为匹配节点, 1, 4 为非匹配节点; 即节点 1, 4 为该网络的驱动节点.

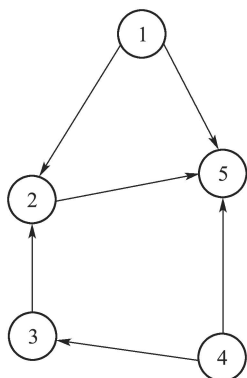


图 1 网络拓扑结构

Fig. 1 Network topology

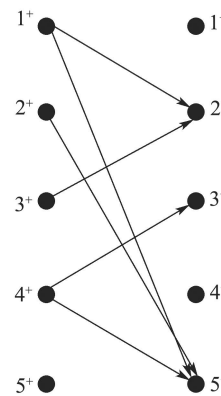


图 2 二分图求取最大匹配

Fig. 2 Calculate the maximum matching by bipartite graph

#### 3.2 单元智能体概念的引入 (The introduction of the concept of unit agents)

由定义 2 中对强连通子图  $G'$  的定义可知, 强连通分支中任意两个个体之间都存在一条有向路径, 即强连通分支只需对其中任意智能体施加控制信号即可使得控制信号在强连通分支全局可达. 但对于入度为零出度不为零的强连通子图而言, 由强连通图自身的可控性, 应用最大匹配算法求取的驱动节点中可能存在无效的驱动节点, 对这类控制节点施加控制输入并不能使整个网络有效可控. 图 3 以一个简单图为例描述了此种情况.

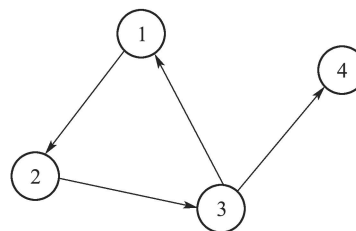


图 3 网络拓扑结构

Fig. 3 Network topology

如图 3 所示可知, 智能体 1, 2, 3 所构成的子图为强连通图, 直接应用第 3.1 节所示的二分图最大匹配算法可得到图 3 网络的驱动节点有两组: 节点 1 或者节点 4. 即通过对个体 1 或个体 4 施加控制输入能够使得图 3 所示网络可控. 结合式 (2) 验证可知, 当智能体 1 作为驱动节点施加控制输入时满足网络可控, 智能体 4 施加控制输入时可控性矩阵不满秩, 即节点 4 为无效的驱动节点, 从图中观察也能较明显的看出节点 4 作为驱动节点不能有效的使得控制信息全局可达.

在此引入定义 2 所示 U-agent 概念, 可将网络中强连通分支智能体集视为一个整体, 即网络中智能个体分为两类: U-agent 和 G-agent. 在图 3 中节点 1, 2, 3 为 U-agent, 先为 U-agent 设计一致性协议, 实现 U-agent 的一致后个体 1, 2, 3 构成一个单元, 再应用最大匹配算法即可知该单元为网络唯一的驱动节点. U-agent

概念的引入能够避免伪驱动节点的出现,得到网络中有效的驱动节点,从而实现网络的可控。

#### 4 单元智能体的一致性 (Consensus of unit agent)

对于一个由 $N$ 个节点构成的多智能体网络 $G(A)$ ,首先为U-agent设计一致性协议实现各个单元的一致,得到 $G(A)$ 的缩聚图 $\bar{G}(\bar{A})$ .在此考虑多智能体系统的动力学方程如下:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

结合引理2找出其邻接矩阵 $A$ 中的 $k$ 个不可约子矩阵,即为系统中的强连通子图 $G' = (G'_1, G'_2, \dots, G'_k)$ ,对 $G'$ 中的个体施加如下的控制输入:

$$u_i(t) = -K \sum_{j \in G'_i} a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)), \quad (4)$$

其中 $K$ 为设计的反馈矩阵。

**定理1** 考虑由动力学系统(3)所组成的有向积分器网络,若网络满足假设1,当 $K = B^T P$ 时,其中 $P$ 为对称的正定矩阵且满足方程(5),在控制协议(4)的作用下 $G' = (G'_1, G'_2, \dots, G'_k)$ 中的U-agent能够实现一致(在此以一个单元为例来对控制协议进行证明,假设该单元中有 $s$ 个智能个体)。

$$A^T P + PA + I_s - PBB^T P = 0. \quad (5)$$

**证** 方程(5)的解 $P$ 满足 $P = P^T > 0$ ,则式(5)也可表示为 $(A - BB^T P)^T P + P(A - BB^T P) + (I_s + PBB^T P) = 0$ ,可知 $A - BB^T P$ 为Hurwitz矩阵,结合引理2 $L$ 的非零特征根的实部均大于零可知, $A - \lambda_i(L)BK$ 亦为Hurwitz矩阵.多智能体系统(3)结合控制输入(4)可以表示成如下形式:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + BK \sum_{j \in G'_i} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)). \quad (6)$$

由状态量 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_s(t))^T$ 以及 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_M(t))^T$ ,式(6)可由以下矩阵形式表示:

$$\dot{x}(t) = (I_s \otimes A - L \otimes BK)x(t). \quad (7)$$

现令矩阵 $Y \in \mathbb{C}^{s \times (s-1)}$ ,  $W \in \mathbb{C}^{(s-1) \times s}$ ,  $Q \in \mathbb{C}^{s \times s}$ 以及上三角矩阵 $\Delta \in \mathbb{C}^{(s-1) \times (s-1)}$ 如下:

$$Q = [1 \ Y], \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} r^T \\ W \end{bmatrix}$$

及

$$Q^{-1}LQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \Delta & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

结合引理2矩阵 $L$ 的非零特征根的实部均大于零,

$\Delta$ 为上三角矩阵,引入变量 $z = (Q^{-1} \otimes A)x$ .则式(7)可转化为

$$\dot{z} = (I_s \otimes A - Q^{-1}LQ \otimes BK)z.$$

进一步简化可得

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A & 0_{s \times (s-1)} \\ 0_{(s-1) \times s} & I_{s-1} \otimes A - \Delta \otimes BK \end{bmatrix} z. \quad (8)$$

观察可知 $I_{s-1} \otimes A - \Delta \otimes BK$ 为 $A - \lambda_i(L)BK$ 的上三角子矩阵,由之前条件可知 $A - \lambda_i(L)BK$ 为Hurwitz矩阵,故 $I_{s-1} \otimes A - \Delta \otimes BK$ 也为Hurwitz矩阵,因此式(8)可化为

$$|z(t) - \begin{bmatrix} e^{At} & 0_{s \times (s-1)} \\ 0_{(s-1) \times s} & 0_{(s-1) \times (s-1)} \end{bmatrix} z(0)| \rightarrow 0,$$

即当 $t \rightarrow \infty$ 时有

$$|x(t) - (1r^T \otimes e^{At})x(0)| \rightarrow 0.$$

可知当 $t \rightarrow \infty$ 时,不同单元中的单元智能体能够实现一致,且一致状态取决于 $(1r^T \otimes e^{At})x(0)$ .

证毕。

#### 5 领导者选择及其可控包含控制 (Leaders selection and controllable containment control)

对于由 $N$ 个节点构成的多智能体网络 $G(A)$ ,由第3节得到 $G(A)$ 的缩聚图 $\bar{G}(\bar{A})$ ,设图 $\bar{G}(\bar{A})$ 中有 $N'$ 个智能体( $N' \leq N$ ),其中组成U-agent的个体有 $k'$ 个( $k' \geq k$ ),其他G-agent有 $N' - k'$ 个。

**定义3** 对于由 $N'$ ( $N' \leq N$ )个智能体所组成的有向网络,用二分图最大匹配算法确定满足网络可控的驱动节点集.找出的驱动节点即为该网络中的领导者,其个数记为 $N' - m$ ( $m < N'$ ).非驱动节点为网络中的跟随者,其个数为 $m$ .分别用 $L = \{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{N'}\}$ 和 $F = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 代表领导者和跟随者的集合。

根据定义3,确定多智能体系统中的领导者和跟随者个体,系统中领导者之间无通信,且领导者不受跟随者的影响,跟随者个体只有部分能够知道领导者状态信息.系统中智能体的动力学模型如式(3)所示,现设计分布式控制协议如下:

$$u_i(t) = \sum_{j \in N'} a_{ij} u_j(t) - K \sum_{j \in N'} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)). \quad (9)$$

对于控制律(9),其中 $K$ 为设计的反馈矩阵,对于 $m$ 个跟随者而言, $u_j$ 为第 $i$ 个个体所相邻的智能体的控制输入;对于 $N' - m$ 个领导者个体而言,由于其不存在影响它的邻居个体, $u_j$ 则表示外部输入的预期量.领导者的控制输入如下式所示:

$$u_i(t) = \sum_{j \in N' - m} (u_j(t) - x_i(t)).$$

**定理 2** 考虑由动力学系统(3)所组成的有向多智能体网络, 应用二分图最大匹配算法确定网络中领导者和跟随者集合. 若网络满足假设1, 应用控制协议(9), 当  $K = B^T P$  时, 其中  $P$  为对称的正定矩阵且满足 Riccati 不等式(10), 所有的跟随者能够渐近收敛于由领导者所构成的凸包中.

$$A^T P + PA - 2PBB^T P < 0. \quad (10)$$

证 由控制协议式(9)可知

$$Bu_i = B \sum_{j \in N'} a_{ij} u_j - BK \sum_{j \in N'} a_{ij} (x_i - x_j).$$

由于  $u_i$  项是不受  $u_j (j \in N')$  的变化而变化, 故对上式做变换可得

$$B \sum_{j \in N'} a_{ij} (u_i - u_j) = -BK \sum_{j \in N'} a_{ij} (x_i - x_j). \quad (11)$$

现令  $\sigma_i = \sum_{j \in N'} a_{ij} (x_i - x_j)$ , 则  $\dot{\sigma}_i = \sum_{j \in N'} a_{ij} (\dot{x}_i - \dot{x}_j)$ , 将式(3)带入该式可得

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i &= \sum_{j \in N'} a_{ij} (Ax_i + Bu_i - Ax_j - Bu_j) = \\ &A\sigma_i + B \sum_{j \in N'} a_{ij} (u_i - u_j). \end{aligned} \quad (12)$$

将式(11)代入式(12)可得

$$\dot{\sigma}_i = (A - BK)\sigma_i. \quad (13)$$

因此研究系统式(3)和式(9)的稳定性可以转化为研究式(13)的稳定性, 现构造 Lyapunov 函数如下:

$$H = \sigma^T (I_{N'} \otimes P) \sigma, \quad (14)$$

其中  $\sigma = [\sigma_1^T, \sigma_2^T, \dots, \sigma_{N'}^T]^T$ . 对  $H$  求导可得

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \dot{\sigma}^T (I_{N'} \otimes P) \sigma + \sigma^T (I_{N'} \otimes P) \dot{\sigma} = \\ &\sigma^T [(I_{N'} \otimes (A - BK))^T (I_{N'} \otimes P)] \sigma + \\ &\sigma^T [(I_{N'} \otimes P) (I_{N'} \otimes (A - BK))] \sigma = \\ &\sigma^T [(I_{N'} \otimes (AP + PA))] \sigma - \\ &\sigma^T [(I_{N'} \otimes (K^T B^T P + PBK))] \sigma, \end{aligned}$$

其中  $K = B^T P$ , 代入上式可得

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \sigma^T [(I_{N'} \otimes (AP + PA))] \sigma - \\ &\sigma^T [(I_{N'} \otimes (PBB^T P + PBB^T P))] \sigma = \\ &\sigma^T [(I_{N'} \otimes (AP + PA - 2PBB^T P))] \sigma. \end{aligned}$$

由于  $P$  满足不等式(10), 故可得  $\dot{H} < 0$ , 即系统及控制协议是渐近稳定的.

对于跟随者个体而言, 由控制协议(9)易知系统稳定时  $x_i \rightarrow x_j, j \in F \cup L$ . 对于与领导者个体有直接通信的跟随者而言, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\min_{j \in L} x_j \leq x_i \leq$

$\max_{j \in L} x_j$ . 对于与领导者个体无直接通信的跟随者而言, 由假设1可知, 其至少存在一个直接或间接的邻居个体与领导者个体有通信, 故  $t \rightarrow \infty$ , 亦有  $\min_{j \in L} x_j \leq x_i \leq \max_{j \in L} x_j$ . 综上所述可知, 对于跟随者智能体  $i \in F$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $\min_{j \in L} x_j \leq x_i \leq \max_{j \in L} x_j$ , 最终跟随者个体会收敛到领导者个体组成的凸包中. 证毕.

### 6 仿真实验(Simulations)

本节考虑由13个智能体组成的有向网络, 其网络拓扑结构如图4所示.

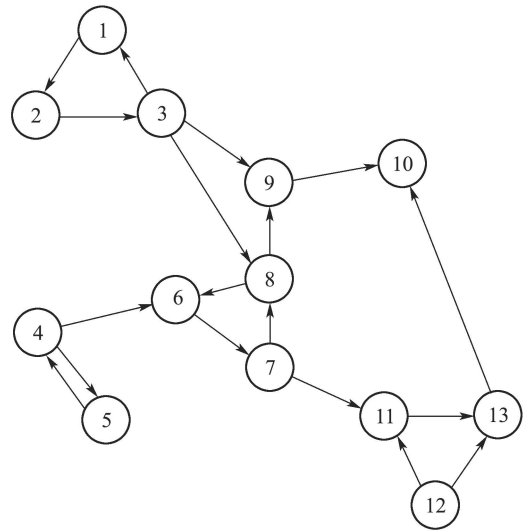


图4 网络拓扑结构

Fig. 4 Network topology

先不考虑 U-agent 的引入, 针对图4拓扑结构应用第3.1节所述方法确定网络中的驱动节点, 可得网络的驱动节点集有4组: 1) 个体6, 9, 12; 2) 个体1, 6, 12; 3) 个体5, 9, 12; 4) 个体1, 5, 12; 在此以第1组为例应用第5节所示包含控制协议验证其包含控制过程, 其个体运动轨迹如图5所示.

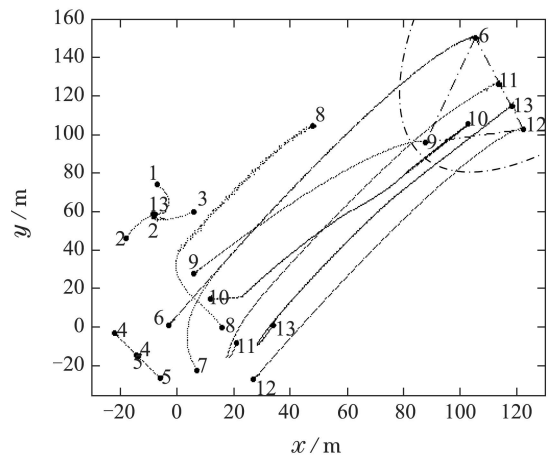


图5 个体6, 9, 12为领导者时智能体运动轨迹

Fig. 5 Agents motion trajectory with leaders 6, 9, 12

图5中点线范围内为智能体运动的目标地, 范围内

任选3个位置量作为领导者个体的输入量,领导者之间的队形受定义1及目标量信息约束,跟随者个体则应用包含控制协议(9)实现包含控制。

由图5可知,智能体不能有效地实现可控包含控制,其中个体1,2,3及4,5由于之间的相互信息作用且不受领导者个体信息影响从而不能有效的收敛到凸包中,个体8受个体3和7的影响也能未收敛到凸包中。其中智能体6,9为无效的驱动节点。

引入U-agent的概念后结合引理1及定义2确定网络中的U-agent与G-agent,可得图4中有3个单元 $U_1$ (个体1,2,3), $U_2$ (个体4,5), $U_3$ (个体6,7,8),首先应用如第4节所述的一致性协议实现U-agent的一致性,得到网络的缩聚图7。U-agent的运动轨迹如图6所示。

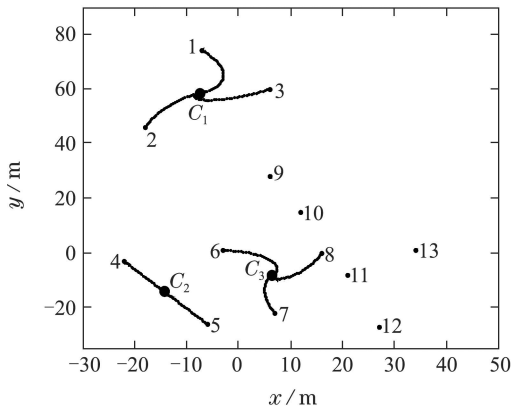


图6 U-agent运动轨迹  
Fig. 6 The motion trajectory of unit agents

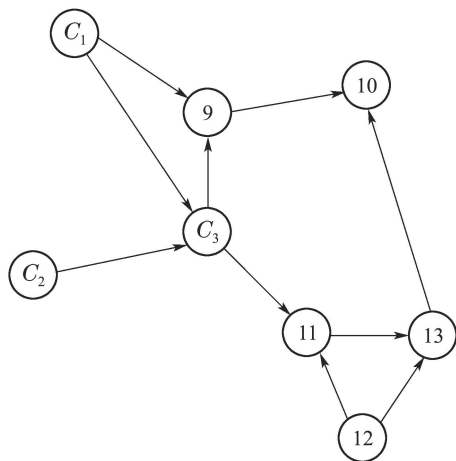


图7 网络拓扑缩聚图  
Fig. 7 Network topology condensation graph

由网络的缩聚图7,结合第3.1节的最大匹配算法确定图7中满足网络可控的最少领导者个体,可知图7的最大匹配边集为 $C_1^+ \rightarrow 9^-$ ,  $C_2^+ \rightarrow C_3^-$ ,  $C_3^+ \rightarrow 11^-$ ,  $9^+ \rightarrow 10^-$ ,  $11^+ \rightarrow 13^-$ ,  $12^+ \rightarrow 11^-$ ,  $13^+ \rightarrow 10^-$ 。即个体 $C_1, C_2, 12$ 为网络的非匹配节点(领导者个体)。结合第5节设计的控制协议仿真得到图7中节点的运

动轨迹如图8所示,由图可看出智能体能够有效的实现可控包含控制。

**注1** 图5,8中三角点划线代表领导者组成的凸包。图8中:粗黑色圆点代表U-agent形成的单元,其他圆点代表G-agent。

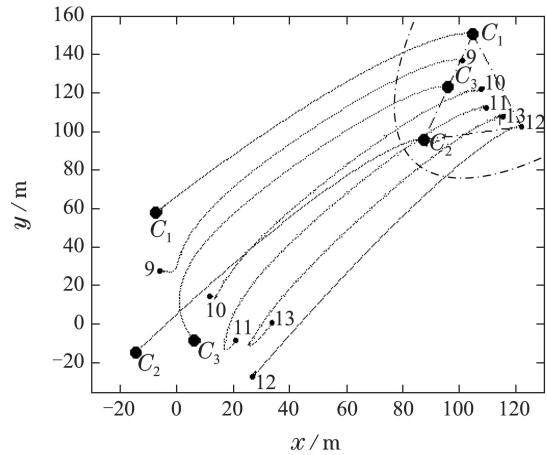


图8 智能体可控包含控制运动轨迹图  
Fig. 8 The motion trajectory of agents satisfied controllable containment control

### 7 结论(Conclusions)

本文针对具有强连通子图的有向拓扑结构多智能体网络,根据其拓扑结构将网络中的智能体划分为U-agent与G-agent,并采用一致性协议实现U-agent的一致从而得到网络的缩聚图,后结合二分图最大匹配算法,求取满足网络可控的最少的领导者集合,并依据智能体邻接个体的相对信息为智能体设计相应的控制协议,驱使跟随者能够渐近收敛到由多个领导者所构成的动态凸包中,从而实现网络的可控包含控制。仿真结果验证了理论方案的正确性。

### 参考文献(References):

- [1] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [2] REN W, BEARD R W. *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications* [M]. Berlin: Springer Verlag, 2008: 22 – 34.
- [3] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 215 – 233.
- [4] CHEN Shiming, CHEN Xiaoling, XU Qinggang, et al. Adaptive weighted fusion based linear distributed filtering algorithm [J]. *Control and Decision*, 2015, 30(4): 605 – 610. (陈世明, 陈小玲, 徐青刚, 等. 基于自适应加权融合的分布式滤波算法 [J]. *控制与决策*, 2015, 30(4): 605 – 610.)
- [5] CAO Y C, REN W. Distributed coordinated tracking with reduced interaction via a variable structure approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 33 – 48.
- [6] SONG Haiyu, YU Li, HU Hongxiang. Group consensus in multi-agent systems via pinning control [J]. *Control Theory & Applica-*

- tions, 2012, 29(6): 765 – 772.  
(宋海裕, 俞立, 胡鸿翔. 牵制控制下的多智能体系统群一致性 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(6): 765 – 772.)
- [7] CHEN Shiming, HUA Yuxin, ZHU Zhenmin, et al. Fast flocking algorithm for multi-agent systems by optimizing local interactive topology [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(12): 2092 – 2099.  
(陈世明, 化俞新, 祝振敏, 等. 邻域交互结构优化的多智能体快速蜂拥控制算法 [J]. 自动化学报, 2015, 41(12): 2092 – 2099.)
- [8] JI M, FERRARI-TRECCATE G, EGERSTEDT M. Containment control in mobile networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(8): 1972 – 1975.
- [9] CAO Y C, STUAT D, REN W. Distributed containment for multiple autonomous vehicles with double-integrator dynamic: Algorithms and experiments [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, 19(4): 929 – 938.
- [10] MEI J, REN W, MA G. Distributed containment control for Lagrangian networks with parametric uncertainties under a directed graph [J]. *Automatica*, 2012, 48(4): 653 – 659.
- [11] LIU S, XIE L H, ZHANG H S. Mean square containment control of multi-agent systems with transmission noises [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(11): 1787 – 1795.
- [12] WANG Y, CHENG L, HOU Z G. Containment control of multi-agent systems in a noisy communication environment [J]. *Automatica*, 2014, 50(7): 1922 – 1928.
- [13] SU H S, JIA G, CHEN M Z Q. Semi-global containment control of multi-agent systems with intermittent input saturation [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(9): 3504 – 3525.
- [14] SU H S, CHEN M Z Q. Multi-agent containment control with input saturation on switching topologies [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 9(3): 399 – 409.
- [15] ZHENG Y, WANG L. Containment control of heterogeneous multi-agent systems [J]. *International Journal of Control*, 2014, 87(1): 1 – 8.
- [16] HAGHSHENAS H, BADAMCHIZADEH M A, BARADARANNIA M. Containment control of heterogeneous linear multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2015, 54(4): 210 – 216.
- [17] TANNER H G. On the controllability of nearest neighbor interconnections [C] // *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Paradise Island, the Bahamas: Springer, 2004, 3: 2467 – 2472.
- [18] RAHMANI A, JI M, MESBAHI M. Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 48(1): 162 – 186.
- [19] LIU Y Y, SLOTINE J J, BARABASI A L. Controllability of complex networks [J]. *Nature*, 2011, 473(7346): 167 – 173.
- [20] JI Z J, LIN H, YU H S. Leaders in multi-agent controllability under consensus algorithm and tree topology [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(9): 918 – 925.
- [21] LU Z, ZHANG L, JI Z. Controllability of discrete-time multi-agent systems with directed topology and input delay [J]. *International Journal of Control*, 2016, 89(1): 179 – 192.
- [22] NAJAFI M, SHAIKHOLESLAM F. Graph theoretical methods to study controllability and leader selection for dead-time systems [J]. *Transactions on Combinatorics*, 2013, 2(4): 25 – 36.
- [23] COMMAULT C, DION J M. Input addition and leader selection for the controllability of graph-based systems [J]. *Automatica*, 2013, 49(11): 3322 – 3328.
- [24] CHEN Shiming, WANG Pei, LAI Qiang, et al. Controllable containment control of second order directed multi-agent networks [J]. *Control and Decision*, 2016, 31(4): 745 – 749.  
(陈世明, 王培, 赖强, 等. 二阶有向多智能体网络的可控包含控制 [J]. 控制与决策, 2016, 31(4): 745 – 749.)
- [25] GUAN Y, JI Z, ZHANG L, et al. Controllability of heterogeneous multi-agent systems under directed and weighted topology [J]. *International Journal of Control*, 2016, 89(5): 1009 – 1024.
- [26] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. England: Cambridge University Press, 1985: 531 – 541.

#### 作者简介:

**陈世明** (1977–), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为多智能体协调控制、蜂拥控制、复杂网络理论, E-mail: c1977318@hotmail.com;

**王培** (1990–), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为多智能体协调控制, E-mail: wp19900715@126.com;

**李海英** (1993–), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为多智能体协调控制, E-mail: haiy1993@126.com;

**赖强** (1987–), 男, 博士, 讲师, 主要研究方向为多智能体协调控制, E-mail: laiqiang87@126.com.